Nailə Kələntərli
Şəhla Vəliyeva
Aza Əhmədova

RİYAZİYYAT

$$A = P \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} P^{-1}$$

Azərbaycan Respublikasının Gənclər və İdman Nazirliyi

Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və
İdman Akademiyası

Nailə Merac qızı Kələntərli
Şəhla Mikayıl qızı Vəliyeva
Aza Namiq qızı Əhmədova

R İ Y A Z İ Y Y A T

Dərslik

İxtisas: 050804 – İdman menecmenti və kommunikasiya

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirinin 18.07.2023-cü il tarixli 3-29/3-2-458F/2023 №-li əmri ilə təsdiq edilmişdir.

"Müəllim" nəşriyyatı
Bakı – 2024

Müəlliflər:
Kələntərli Nailə Merac qızı, Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyası, İdman menecmenti və kommunikasiya kafedrasının müdiri, m.ü.e.d, professor əvəzi;
Vəliyeva Şəhla Mikayıl qızı, Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyası, İdman menecmenti və kommunikasiya kafedrasının baş müəllimi
Əhmədova Aza Namiq qızı, Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyası, İdman menecmenti və kommunikasiya kafedrasının müəllimi

Rəyçilər:
Əbiyev Telman Qulam oğlu, Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyası, İdman menecmenti və kommunikasiya kafedrasının dosenti, r.ü.f.d, əməkdar müəllim
Səfərov Zaman Vahab oğlu, AMEA-nın Mexanika və Riyaziyyat İnstitutunun dosenti, r.ü.f.d.

Elmi redaktor:
Əbiyev Telman Qulam oğlu, Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyası, İdman menecmenti və kommunikasiya kafedrasının dosenti, r.ü.f.d, əməkdar müəllim

Kələntərli N.M., Vəliyeva Ş.M., Əhmədova A.N.
RİYAZİYYAT / Dərslik. – Bakı: “Müəllim” nəşriyyatı, - 2024. - 128 s.

“Riyaziyyat” adlı dərslik Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasının bakalavr pilləsində təhsil alan tələbələri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

ISBN: 978-9952-8504-0-6

ÖN SÖZ

Gələcək kadrların hazırlandığı ali məktəblərdə öyrənilən fənlər arasında riyaziyyatın xüsusi əhəmiyyəti vardır. Tələbələrin riyazi biliyini yüksəltmək, onların yaradıcı təfəkkürünü, istedadlarını inkişaf etdirmək, müstəqil hesablama aparmaq vərdişlərini artırmaq üçün “Riyaziyyat” fənni mühüm əhəmiyyətə malikdir. Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasının tələbələri üçün yazılmış bu dərslikdə çoxluq anlayışı, həqiqi ədədlər çoxluğu və məhdud ədədlər çoxluğu, ədədi ardıcıllıqlar, yığılan və dağılan ardıcıllıqlar, funksiyanın limiti, kəsilməz funksiyalar, funksiyanın kəsilmə nöqtələri və onların təsnifatı, funksiyanın törəməsinin tapılması və törəmənin əsas teoremləri, birdəyişənli funksiyanın ekstremumlarının hesablanması, matris anlayışı, matris üzərində xətti əməllər və onların xassələri, determinantın tərifi, xassələri və hesablanma qaydaları, matrisin ranqı və onun hesablanma üsulları, vektorial və skalyar kəmiyyətlər, vektorların xətti asılılığı, Dekart koordinat sistemi, qeyri-müəyyən və müəyyən inteqral və onların xassələri, inteqralın tətbiqi və hesabı təşkil edir.

Dərslikdə nəzəri materialla yanaşı misalların izahli həlli verilmişdir. Hər mövzuya aid auditoriyada həll ediləcək tapşırıqlar verilib. Dərslik Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasınında “İdman menecmenti və kommunikasiya” – şifr 050804 ixtisası üçün nəzərdə tutulmuş tədris planı ixtisas fənləri bloku əsasında tərtib edilmiş və ixtisasın İFB-03 fənlər blokuna daxil edilmiş “Riyaziyyat” fənn proqramını tam əhatə etmişdir.

Dərslikdən daha səmərəli istifadə etmək üçün aşağıda verilən addımları təqib etmək tövsiyyə olunur:

1. Mövzunun əvvəlində verilən nəzəri biliklərin öyrənilməsi

2. Mövzuya aid həlli ilə verilən izahlı misalların diqqətlə oxunması

3. Sərbəst həll etmək üçün verilmiş misalları həll edərkən mövzuda verilən izahlı misalların həllinə nəzər salınmalıdır.

I FƏSİL. MATRİSLƏR VƏ DETERMİNANTLAR

1.1. Matris anlayışı

Matrislər texnikanın və iqtisadiyyatın müxtəlif sahələrində geniş tətbiq olunur. Bu baxımdan bir çox riyazi məsələlərin həllində matrislər mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Tərif 1: *m* sayda sətirdən və *n* sayda sütundan ibarət olan rəqəmlər cədvəlidir.

Matris cədvəlinin hər bir elementinə Matris Ko*mponenti* deyilir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ matrisin ölçüsüdür

Matrislərin qısa yazılışı üçün adətən böyük hərflərdən istifadə olunur.

Məsələn, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ matrisinin ölçüsü $3\times\ 3$ (3 sətir, 3 sütun var)

Tərif: Matrisin sətirlərinin sayı sütunlarının sayına bərabər olarsa ($m = n$), həmin matrisə kvadrat matris deyilir. Kvadrat matrisin sətir və ya sütunlarının sayına onun tərtibi deyilir.

Nümunə: $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Kvadrat matrisin sol yuxarı küncündən sağ aşağı küncünə qədər bir düz xətt üzərində yerləşən bütün elementləri baş diaqonal elementləri, sağ yuxarı küncdən sol aşağı küncə qədər bütün elementləri isə əlavə diaqonal elementləri adlanır.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

burada (1, 7, 6) matrisin baş diaqonalı, (0, 7, 5) isə əlavə diaqonalıdır.

Tərif: Əgər kvadrat matrisin baş diaqonal elementlərindən başqa bütün elementləri sıfıra bərabərdirsə, ona diaqonal matris deyilir.

Nümunə: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Tərif: Diaqonal matrisin, baş diaqonal elementləri vahidə bərabər olarsa, ona **vahid matris** deyilir.

Nümunə: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ üç tərtibli vahid matrisdir

$İ = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ bu matris isə skalyar matrisdir

(baş diaqonaldakı ədədlər eyni olarsa skalyar matris olur)

Tərif: Əgər matris $1\times n$ ölçülü (bir sətir) matrisdirsə **sətir-matrisi**, $m \times 1$ ölçülü (bir sütun) matris isə **sütun-matrisi** adlanır.

Qeyd: $1\times n$ ölçülü sətir-matrisi faktiki olaraq R^n fəzasına daxil olan vektor, $m \times 1$ ölçülü sütun-matris isə R^m daxil olan vektordur.

Məsələn, 1×2 ölçülü sətir-matris $(1,2) \in R^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}$$

3×1 ölçülü sütun-matrisi isə $(3,1) \in R^3$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tərif: Həm sətir və sütunlarının sayı, həm də uyğun elementləri bərabər olarsa, onda bu matrislərə bərabər matrislər deyilir və $A = B$ kimi yazılır.

Nümunə: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Tərif: Bütün elementləri sıfıra bərabər olan matrislər **sıfır** matrisi adlanır və 0 hərfi ilə işarə edilir.

Nümunə $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tərif: *B* matrisinin bütün elementləri A matrisinin uyğun elementlərinin əksidirsə, onda *B* matrisinə *A* matrisinin əksi deyilir və $B = -A$ kimi işarə edilir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Tərif: İxtiyarı *m x n* ölçülü *A* matrisinin bütün sətirləri ilə uyğun sütunlarının yerini dəyişdikdə, yeni alınan *n x m* ölçülü matris əvvəlki matrisin çevrilmişi (transponirə olunmuş) adlanır və A^T kimi işarə edilir.

Məsələn, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

1.2. Matrislər üzərində əməllər

Tərif: A=(a_{ij}) matrisinin k ədədinə hasili, elementləri A matrisinin bütün elementlərinin k ədədinə hasilindən düzəldilmiş B=(b_{ij}) matrisinə deyilir və $B = k\,A$ kimi işarə edilir. Aydındır ki, $B = k\,A$= ($k\,a_{ij}$) .

$$A = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Tərif: $m \times n$ ölçülü A= (a_{ij}) və B= (b_{ij}) matrislərinin cəmi elementləri A və B matrislərinin uyğun elementlərinin cəmindən düzəldilmiş C=(c_{ij}) matrisinə deyilir və C= A+B kimi işarə edilir .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ və } B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A + B = C$$

yəni,

$$C\begin{pmatrix} 1+1 & 3+3 \\ 2+2 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ deməli, } A + B =$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

1. 3. Matrisin ədədə hasili və matrisin cəminin xassələri

1. $A \cdot k = k \cdot A$

2. $A \cdot (k \cdot L) = (A \cdot k) \cdot L$

3. $A + B = B + A$

4. $(A + B) + C = A + (B + C)$

5. $A \cdot (k + L) = A \cdot k + A \cdot \mathrm{L}$

6. $(A + B) \cdot k = A \cdot k + B \cdot k$

7. $A + 0 = A$, *A* matrisinin 0 matrisi ilə cəmi *A* matrisinə bərabərdir

8. $A + (-A) = 0$, *A* matrisi ilə onun əksi olan matrisin cəmi sıfır matrisə bərabərdir,

Burada *A*, *B*, *C* eyni ölçülü matrislər, *k* və L isə ədədlərdir.

Misallar: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

1. 4. Matrislərin vurulması

Qeyd: Əgər *A* matrisinin sütunlarının sayı *B* matrisinin sətirlərinin sayına bərabər olarsa, onda *A* matrisini *B* matrisinə vurmaq olar.

(Birinci matrisin hər bir sətrini 2-ci matrisin sütunlarına vururuq)

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ və $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 & 3 \cdot 9 + 5 \cdot 8 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} 4 + 12 & 9 + 16 & 0 + 16 \\ 12 + 30 & 37 + 40 & 0 + 5 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 16 & 25 & 2 \\ 42 & 67 & 5 \end{bmatrix}$$ deməli,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 25 & 2 \\ 42 & 67 & 5 \end{bmatrix}$$ olar

Misal 1: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$

Həlli: $A_{2.3} \cdot B_{3.1} = C_{2.1}$

$$C = \begin{matrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Misal 2: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $A + B = ?$

Həlli: $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & -2+4 \\ 6+2 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$

Misal 3: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $A - B = ?$

$$\begin{bmatrix}4 & -2\\6 & 8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4-1 & -2-4\\6-2 & 8-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6\\4 & 8\end{bmatrix}$$

Misal 4: Q = A + B · C

A = $\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}$; C = $\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$

1) B · C = $\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 3\\5 & -2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\cdot(-2) & + & 2\cdot 2\\1\cdot(-2) & + & 3\cdot 2\\5\cdot(-2) & - & (-2)\cdot 2\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}6\\4\\-14\end{bmatrix}$

2) Q = A + B · C $= \begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\4\\-14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+6\\-1+4\\5-14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\3\\-9\end{bmatrix}$

Ev tapşırığı 1. Matrislər üzərində əməllər

1) A = $\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{11}\\\mathbf{10} & \mathbf{6}\end{pmatrix}$**; B =** $\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{12}\\\mathbf{8} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$ matrisləri üçün A × B təyin edin:

cavab: $\begin{pmatrix}100 & 69\\88 & 138\end{pmatrix}$

2) C = $\mathbf{4} \times \begin{pmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{-7}\\\mathbf{12} & \mathbf{9}\end{pmatrix}$**; B =** $\begin{pmatrix}\mathbf{-5} & \mathbf{10}\\\mathbf{6} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$ matrisləri üçün B × C təyin edin:

cavab: $\begin{pmatrix}380 & 500\\-24 & -276\end{pmatrix}$

3) $\mathbf{C=2\times\begin{pmatrix}5 & -7\\ 2 & 9\end{pmatrix}}$**;** $\mathbf{B=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 6 & -2\end{pmatrix}}$ matrisləri üçün $\mathrm{B\times C}$ təyin edin:

cavab: $\begin{pmatrix}-134 & 28\\ 88 & -36\end{pmatrix}$

4) $\mathbf{A=\begin{pmatrix}2 & 12\\ 10 & -6\end{pmatrix}}$**;** $\mathbf{B=2\times\begin{pmatrix}14 & -2\\ 5 & 13\end{pmatrix}}$ matrisləri üçün C = A + B təyin edin:

cavab: $\begin{pmatrix}30 & 8\\ 20 & 20\end{pmatrix}$

1.5. Matrisin determinantı

Tərif*:* $m\times n$ ölçülü hər bir *A* kvadrat matrisinə müəyyən qayda ilə hesablanmış bir ədəd qarşı qoymaq olar. Bu ədəd *n*-tərtibli *A* matrisinin determinantı və ya sadəcə olaraq *n*-tərtibli determinant adlanır. det A; $|A|$ və yaxud da Δ ilə işarə edilir.

Determinant matrisdən fərqli olaraq cədvəl deyil, ədəddir. Determinantlardan xətti cəbrin müxtəlif məsələlərində geniş istifadə olunur.

Nümunə, A $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{11}\\ a_{11} & a_{11}\end{pmatrix}$ matrisinin determinantı

det A $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ kimi ifadə edilir.

İki tərtibli determinant aşağıdakı qaydada təyin olunan ədədə deyilir:

det A $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ burada $a_{11} \cdot a_{22}$ baş diaqonal, $a_{12} \cdot a_{21}$ isə əlavə diaqonal adlanır.

Göründüyü kimi, iki tərtibli determinant, baş və əlavə diaqonal elementlərinin hasilləri fərqinə bərabərdir.

Nümunə: $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-4 \cdot 5) - (3 \cdot 2) = -20 - 6 = -26$

Nümunə**:** $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$

Üç tərtibli determinant aşağıdakı qaydada təyin olunan ədədə deyilir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \qquad \text{(üç bucaq qaydası)}$$

$$\Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} +$$

$$+a_{21}\,a_{32}\,a_{13} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11}$$

Misal: $\Delta \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ determinantı təyin edin:

1) $1 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 + 0 + 12 = 24$

2) $2 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 0 - 0 - 2 = -2$

3) $24 - 2 = 22$

1.6. Determinantın xassələri

1) Determinantın bütün uyğun sətir və sütunlarının yerini dəyişdikdə onun qiyməti dəyişməz.

$$\Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2) Determinantın iki qonşu sətrinin (və ya sütununun) bir-biri ilə yerini dəyişdikdə determinantın ancaq işarəsi dəyişər.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3) İki sətri (sütunu) eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 0$$

1.7. Xətti tənliklər sisteminin Kramer qaydası ilə həlli

Xətti tənliklər sisteminin köklərinin tapılmasında matrislərin əhəmiyyəti daha mühümdür. Xətti tənliklər sisteminin həllində Kramer, matris, Qauss üsullarından istifadə olunur. Xətti tənliklər sitemində dəyişənlərin sayı tənliklərin sayına bərabər olduğu halda hər üç üsuldan istifadə etmək mümkün olsa da, dəyişənlərin sayı tənliklərin sayından fərqləndiyi halda yalnız Qauss üsulundan istifadə etmək mümkündür. Bu baxımdan da Qauss metodu daha universal metoddur. Xətti tənliklər sistemində dəyişənlərin sayı tənliklərin sayına bərabər olduğu halda Kramer qaydasından istifadə etməklə tənliklər sisteminin həllini tapmaq daha məqsədə uyğundur.

Tutaq ki, aşağıdakı kimi üç dəyişənli, üç tənlikli xətti tənliklər sistemi verilmişdir:

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Tənliyin əmsallarından təşkil olunmuş əsas determinantı hesablayaq:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 5 \neq 0$$

$\Delta \neq 0$ olduğundan xətti tənliklər sisteminin yeganə həlli var.

($\Delta = 0$ olarsa, sistemin həlli yoxdur)

$x = \frac{\Delta\ x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta\, y}{\Delta}$. $z = \frac{\Delta\, z}{\Delta}$ köklərini tapaq.

Əvvəlcə $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ determinantlarını hesablayaq.

Δx determinantını hesablamaq üçün əsas determinantda birinci sütunda sərbəst hədlər yazılır:

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 15$$

Δy determinantını hesablamaq üçün əsas determinantda ikinci sütunda sərbəst hədlər yazılır:

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -5$$

Δz determinantını hesablamaq üçün əsas determinantda üçüncü sütunda sərbəst hədlər yazılır:

$$\Delta z = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 5$$

Bələliklə, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, köklərini tapaq:

$$x = \frac{\Delta\ x}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\Delta\, y}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1; \quad z = \frac{\Delta\, z}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16\,,$$

$$x = \frac{\Delta\, x}{\Delta}, \quad \mathrm{y} = \frac{\Delta\, y}{\Delta}.$$

$$\Delta \boldsymbol{x} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -16 \qquad \Delta \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -32$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\Delta\, x}{\Delta} = \frac{\mathbf{-16}}{\mathbf{-16}} = 1 \qquad \mathrm{y} = \frac{\Delta\, y}{\Delta} = \frac{\mathbf{-32}}{\mathbf{-16}} = 2.$$

Ev tapşırığı 2. Xətti tənliklər sistemini həll edin:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ *cavab: x=2 ; y=3*

2) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$ *cavab: x=1 ; y=2 ; z=3*

3) $\begin{cases} 5x - 3y + z = -1 \\ 2x - y - 2z = -5 \\ x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$ *cavab: x=0 ; y=1 ; z=2*

4) $\begin{cases} -3x + 2y - z = -3 \\ x + y + z = 4 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$ x + y−z=?

A) 0; B)1; C) -1; D)2; E)3

5) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - y + z = -1 \end{cases}$ $x^2 + y^2 + z^2$=?

A)5, B)4, C)2, D)3, E)1

1.8. Minor və cəbri tamamlayıcı

Matris kimi determinantlar da sətir və sütunlardan ibarətdir. $\boldsymbol{n}$ tərtibli determinantın hər hansı elementinin yerləşdiyi sətir və sütunu sildikdən sonra yerdə qalan elementlər $\boldsymbol{n-1}$ tərtibli bir determinant əmələ gətirir. Bu determinanta həmin elementin minoru deyilir. $\boldsymbol{a_{ij}}$ elementinin minorunu M_{ij} ilə işarə edirlər. M_{ij} minorunun $(-1)^{i+j}$ vuruğu ilə hasilinə $\boldsymbol{a_{ij}}$ elementinin cəbri tamamlayıcısı deyilir və $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ kimi işarə olunur.

Qeyd edək ki, $\boldsymbol{n}$ - tərtibli ($\mathbf{n} > \mathbf{3}$) determinantları iki və ya üç tərtibli determinantlara gətirməklə hesablamaq olar. Yəni, $\boldsymbol{n}$ - tərtibli determinantı təyin etmək üçün əvvəlcə minor və cəbri tamamlayıcı anlayışları daxil edilir.

Misal: iki və üç tərtibli determinantlar üçün qeyd olunan minoru təyin edək:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \text{ üçün } M_{12} = |2| = 2 \text{ ; } \quad M_{21} = |\,3\,| = 3;$$

$$M_{22} = |\,-4\,| = -4;$$

(minorda sətir və sütunlar pozularaq yerdə qalan elementlər qeyd olunur)

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ üçün}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 40 = -28; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -8$$

1.9. Matrisin ranqının tapılması

Matrisin ranqını tapmaq üçün bu matrisin sətir və ya sütunlarından düzəldilmiş minorunu yoxlamaq lazımdır. Əgər bunlardan birinin determinantı sıfırdan fərqlidirsə, onda matrisin ranqı bu minorun tərtibinə bərabərdir. Əgər bu minorlardan hamısının determinantı sıfıra bərabər olarsa, onda bir vahid az olan minorlara keçirik. Əməliyyatı etdikdən sonra aldığımız minor sıfırdan fərqlidirsə, matrisin ranqı bu minorun tərtibinə bərabərdir. Əks halda yenə bir vahid az olan minorlara keçirik. Bu qayda ilə davam etsək son nəticədə matrisin heç olmasa bir elementi sıfırdan fərqli minoru olarsa, onda matrisin ranqı r = 1 olar. yəni, rang = r

Nümunə: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 10 =$

$= 2 \neq 0$. Deməli, r = 2.

Qeyd: Birinci sütunun dördüncü sətrindəki 5 ədədinin yerinə 6 ədədi olarsa, onda matrisin ranqı vahidə bərabər olur, $12 - 12 = 0$; r = 1

Ev tapşırığı 3. Aşağıdakı determinantları hesablayın:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

cavab: a) 78 ; b) - 12; c) - 35

d) Q = A + B · C

$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ olarsa Q = ?

cavab: $\begin{bmatrix} 18 \\ 4 \\ -17 \end{bmatrix}$

e) $Q = 3{\cdot}A - 2{\cdot}B$

$$A = 3\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \;; \quad B = 2\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

cavab: $\begin{bmatrix} 20 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

k) $\Delta B = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 17 \\ -4 & 6 & -8 \\ 15 & 9 & 3 \end{vmatrix} \qquad M_{13} = ?$

cavab: -126

II FƏSİL. VEKTORLAR CƏBRİ

2.1. Skalyar və vektorial kəmiyyətlər

Fiziki kəmiyyət – hər hansı bir fiziki hadisə və ya cismin kəmiyyətcə xarakteristikasıdır. Hər bir fiziki kəmiyyətin öz adı, işarəsi, vahidləri, simvolu və s. vardır. Məsələn: Uzunluq, həcm, zaman, sürət, qüvvə, temperatur, tutum, kütlə və s. daxildir.

Skalyar kəmiyyət – yalnız ədədi qiyməti olan kəmiyyətdir.

Skalyar kəmiyyətlər istiqamətə malik deyildir. Skalyar kəmiyyətlərə: zaman, kütlə, temperatur, həcm, sıxlıq və s. daxildir.

Vektorial kəmiyyət - ədədi qiyməti və istiqaməti olan kəmiyyətdir.Vektorial kəmiyyətlərə: qüvvə, impuls, sürət, təcil və s. kimi kəmiyyətlər daxildir.

Qeyd: ***Vektorun modulu onun ədədi qiymətidir.***

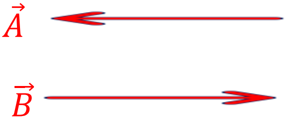
Tərif: Başlanğıcı və sonu olan istiqamətlənmiş düz xətt parçasına vektor deyilir. Vektoru ya başlanğıc və son nöqtələri, ya da kiçik latın hərfləri ilə üzərində ox işarəsi qoymaqla işarə edirlər:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\overrightarrow{\mathbf{AB}}} \mathbf{B}$$

$\overrightarrow{AB}$ və yaxud $\vec{a}$ kimi. Düz xətt parçasının uzunluğuna bu vektorun uzunluğu deyilir. $|\overrightarrow{AB}|$ və ya $|\vec{a}|$ işarə edilir. Müstəvinin istənilən nöqtəsi də vektor sayılır. Bu vektora **sıfır** vektor deyilir və $|\vec{0}|$ kimi işarə edilir.

Tərif: Başlanğıcı və sonu üst-üstə düşən istiqamətlənmiş düz xətt parçasına sıfır vektor deyilir **($\vec{0}$)**

Əks vektorlar: Uzunluqları bərabər olan və istiqamətcə əks olan vektorlara əks vektor deyilir. $(\vec{A})$ və $(\vec{B})$ vektorları əks vektorlardır.



2.2. Kollinear vektorlar

Əgər iki vektor bir düz xətt və ya paralel düz xətlər üzərində yerləşərsə onlar kollinear vektorlardır. Kollinear olmaq üçün vektorların eyni istiqamətli olması şərt deyil. Paralel düz xətlər üzərində yerləşən əks istiqamətli vektorlar da kollineardır. Kollinear vektorların uzunluğu da eyni olmaya bilər, amma onların uzunluqları mütənasib olmalıdır.

Tərif. Əgər $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorları üçün $\vec{x} = k\,\vec{y}$ və ya $\vec{y} = k\vec{x}$ bərabərliyi ödənilərsə, onda $\vec{x}$ və $\vec{y}$ kollinear vektorlardır adlanır.

Başqa sözlə, kollinear olmaq o deməkdir ki, $\vec{x}$ vektorunun vektor $x_1,\ x_2,\ x_3 \cdots\cdots x_n$ koordinatları, $\vec{y}$ vektorunun

y_1, y_2, y_3 $\cdots\cdots$ y_n koordinatları ilə mütənasibdir. Yəni, x_1 = k y_1, x_2 = k y_2, x_3 = k y_3, ... , x_n = k y_n bərabərliyi doğrudur.

Tərif. n - ölçülü vektor, nizamla götürülmüş n sayda ixtiyari x_1 , x_2 , x_3 $\cdots\cdot$ x_n həqiqi ədədləri vasitəsilə təyin olunan və $\vec{x}$ = (x_1, x_2, x_3 $\cdots\cdots$ x_n) kimi işarə edilən elementə deyilir. x_1, x_2, x_3 $\cdots\cdots$ x_n ədədləri $\vec{X}$ vektorunun koordinatları adlanır.

Qeyd 1: R^n fəzasına daxil olan ixtiyari x vektoru üçün, bu vektorun uzunluğu (modulu) - $|\vec{x}|$ hesablanır. Yəni, $\left|\vec{X}\right| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_n}^2}$

Nümunə: $\vec{a}$ = (0, 3, 4) vektorun uzunluğu

$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}$ = 5 bərabərdir.

2.3. Vektorların toplanması və çıxılması

Tərif: $\vec{X}$ = (x_1, x_2, x_3 $\cdots\cdots$ x_n) və $\vec{Y}$ =(y_1, y_2, y_3 $\cdots\cdots$ y_n) vektorlarının cəmi $\vec{X}+\vec{Y}$ =(x_1+y_1;x_2+y_2; x_3+y_3 +$\cdots\cdots$ x_n+y_n) qaydada təyin olunan vektora deyilir. Vektorların çıxılması:

$$\vec{X} - \vec{Y} = (x_1 - y_1;\ \ x_2 - y_2;\ \ x_3 - y_3 \cdots\cdots x_n - y_n)$$

<u>(əgər koordinatlar məlum olarsa bu üsulları tətbiq etmək olar)</u>

Nümunə: $\vec{X}$ = (1, 3 , -1) və $\vec{Y}$ = (2, - 5, -1) vektorlarının cəmini təyin edək:

$\vec{X} + \vec{Y}$ = (1, 3,−1)+(2, − 5, −1) = (1+2, 3+(− 5), (−1)+ (−1)) =(3, − 2, −2)

Vektorlar cəminin xassələri

Xassə 1. $\vec{x} + y = \vec{y} + \vec{x}$

Xassə 2. $(x + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

Xassə 3. İxtiyari $\vec{x}$ üçün $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

Xassə 4. İxtiyari *x* vektoru üçün $\vec{x} + \overrightarrow{(-x)} = 0$

Xassə 5. $k(\vec{x} + \vec{y}) = k \cdot \vec{x} + k \cdot \vec{y}$

2.4. Vektorların skalyar hasili

Tərif. İki vektorun cəmi və vektorun həqiqi ədədə vurulması əməlləri $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_n)$ şəkilli vektorlar çoxluğu n – ölçülü vektorlar fəzası adlanır və R^n kimi işarə edilir.

Tərif. R^n fəzasında $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_n)$ və $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3 \cdots\cdots y_n)$ vektorlarının skalyar hasili aşağıdakı qaydada təyin olunan ədədə deyilir:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \cdot y_1; \quad x_2 \cdot y_2; \quad \cdots\cdots x_n \cdot y_n)$$

Yəni, $\vec{a} = (a_1 \cdot a_2)$ və $\vec{b} = (b_1 \cdot b_2)$ üçün $\vec{a}\,\vec{b} = (a_1 \cdot b_1) +$ $+(a_2 \cdot b_2)$

Skalyar hasilin xassələri

Xassə1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

Xassə 2. $(k \cdot \vec{x}, \ \vec{y}) = \mathrm{k}\,(\vec{x}, \ \vec{y})$

Xassə 3. $(\vec{x}, \ \vec{y} + \vec{c}) = (\vec{c} \ \ \vec{x}) + (\vec{c} \ \ \vec{y})$

Xassə 4. Əgər $\vec{x} \neq 0$ olarsa, onda $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, əgər $\vec{x} = 0$ isə, onda $(\vec{x}, \ \vec{x}) = 0$ olur

Qeyd 1: Əgər, $\vec{a}$ *və* $\vec{b}$ vektorları perpendikulyardırsa, onda onların hasili

$$\vec{a}\,\vec{b} = 0$$

Misal 1: $\vec{a} = (2, \ 4)$ və $\vec{b} = (3, \ 1)$ vektorların skalyar hasilini tapın:

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) = (2 \cdot 3) + (4 \cdot 1) = 6 + 4 = 10$$

Misal 2: $\vec{a} = (2, \ 8)$ və $\vec{b} = (3, \ 4)$ vektorların skalyar hasilini tapın:

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) = (2 \cdot 3) + (8 \cdot 4) = 6 + 32 = 38$$

Qeyd 2: Sıfır olmayan 2 vektorlar arasındakı φ bucağının kosinusu, uyğun olaraq, aşağıdakı düsturlarla tapılır: $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$ buradan da $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Misal 3: $\vec{a} = (1, \ 1, \ 0{,}5)$ və $\vec{b} = (0, \ 2, \ 2)$ vektorları arasındakı bucağı təyin edin:

1) $\vec{a}\,\vec{b}$ = ($1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 2\cdot 0{,}5$) = 3

2) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \sqrt{1^2+1^2+0{,}5^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+2^2} = \sqrt{2{,}25}\cdot\sqrt{8} =$
$= 1{,}5\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

3) $cos\,\alpha = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{3}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

Vektorların skalyar hasilinə aid məsələ həlli

Məsələ 1. $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}|$ l $= 8$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ olarsa, $\overline{a}\cdot\overline{b}$ skalyar hasilini tapın.

Həlli:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|cos\varphi = 5\cdot 8\cdot cos\frac{\pi}{3} = 40\cdot\frac{1}{2} = 20$$

Məsələ 2. $|\overline{a}| = 2$; $|\overline{b}| = 3$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$ olarsa, $(3\overline{a} - 2\overline{b})(5\overline{a} - 6\overline{b})$ skalyar hasilini tapın.

Həll:

$$(3\overline{a} - 2\overline{b})(5\overline{a} - 6\overline{b}) = 15\overline{a}^2 - 18\,\overline{a}\,\overline{b} - 10\overline{a}\,\overline{b} + 12\,\overline{b}^2 =$$

$$= 15\cdot 4 - 28|\overline{a}|\,|\overline{b}|\,cos\frac{\pi}{3} + 12\cdot 9 = 168 - 28\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 84$$

Məsələ 3. $|\overline{a}$l $= 3$; l $\overline{b}$l $= 4$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$ olarsa, $\overline{a}\,(2\overline{a} - \overline{b})$ skalyar hasilini tapın.

Həlli:

$\overline{a}\,(2\overline{a}-\overline{b})= 2\overline{a}^2-\overline{a}\overline{b} =2\cdot 9-\,|\overline{a}||\overline{b}|cos\frac{\pi}{3} =$

$=18-3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} =12$

Məsələ 4. $|\overline{a}| =3$, $|\overline{b}| =5$ olarsa, ***m***-in hansı müsbət qiymətində $\overline{a}$+m$\overline{b}$ və $\overline{a}$ $-$m$\overline{b}$ vektorları perpendikulyardır?

Həlli:

$\overline{a}+m\overline{b}$ və $\overline{a}-m\overline{b}$ vektorlarının perpendikulyar olması üçün

$$(\overline{a}+m\overline{b})\,(\overline{a}-m\overline{b}) = 0$$

$$\overline{a}^2 - m^2\overline{b}^2 =0$$

$$9-25\,m^2 = 0$$

$$25\,m^2 = 9$$

$$m^2 = \frac{9}{25}$$

$$m = \pm\frac{3}{5}$$

Məsələnin şərtində *m*-in müsbət qiyməti tələb olunduğundan cavabı $m = \frac{3}{5}$ olar.

Məsələ 5. $\overline{a}\,(1;\ 2)$ və $\overline{b}\,(3;\ 4)$ vektorlarının skalyar hasilini tapın:

Həlli :

$ab = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ olduğundan $ab = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$

Vektorial hasilə aid məsələ həlli

Məsələ 6. $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 4$, $\varphi = 30°$ olarsa, $[\vec{a}\ ;\ \vec{b}]$ vektorial hasilini tapın:

Həlli :

$$[\vec{a}\ ;\ \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\, sin\varphi = 5 \cdot 4 \cdot sin30° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

Məsələ 7. $\vec{a} = \{2; -1;\ 3\}$; $\vec{b} = \{3; -1;\ 0\}$ vektorları verilmişdir. $[\vec{a} + \vec{b}\ ;\ 2\ \vec{b}]$ vektorial hasil vektorunun koordinantlarını tapın.

Həlli :

$[\vec{a} + \vec{b}\ ;\ 2\ \vec{b}] = [\vec{a}\ ;\ 2\ \vec{b}] + [\vec{b}\ ;\ 2\ \vec{b}]$. Burada, $\vec{b}$ və $2\ \vec{b}$ vektorları kollienar olduğundan $[\vec{b}\ ; 2\ \vec{b}] = 0$ olar. Onda

$$[\vec{a} + \vec{b}\ ; 2\ \vec{b}] = [\vec{a}\ ; 2\ \vec{b}] = 2\ [\vec{a}\ ;\ \vec{b}]$$

$$[\vec{a}\ ;\ \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right\} = \{3; 9; 1\}$$

Beləliklə , $[\vec{a} + \vec{b}\ ; 2\ \vec{b}] = [\vec{a}\ ; 2\ \vec{b}] = 2\ [\vec{a}\ ;\ \vec{b}] =$

$= 2\ \{3; 9; 1\} = \{6; 18; 2\}$

Məsələ 8. $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ olarsa, $[\vec{a}\ ;\ \vec{b}]$ vektorial hasilini tapın:

Həlli:

Skalyar hasilin tərifinə əsasən $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\, cos\varphi$

$$cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{12}{10 \cdot 2} = \frac{3}{5}$$

Vektorial hasilin tərifinə görə $[\vec{a}\ ;\ \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\, sin\varphi$

$$sin\varphi = \sqrt{1 - cos\varphi^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$[\vec{a}\ ;\ \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\, sin\varphi = 10 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = 16.$$

Məsələ 9. $\vec{a} \perp \vec{b}$ verilmişdir. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$ vektorial hasilini hesablayın:

Həlli:

$\vec{a} \perp \vec{b}$ olduğundan $sin\varphi = sin90° = 1$

$$(3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 3[\vec{a}\ ;\ \vec{a}] - 6\,[\vec{a}\ ;\ \vec{b}] - [\vec{b}\ ;\ \vec{a}] +$$
$$+2\,[\vec{b}\ ;\ \vec{b}] = 3 \cdot \vec{0} - 6\,[\vec{a}\ ;\ \vec{b}] + [\vec{a}\ ;\ \vec{b}] + 2 \cdot \vec{0} =$$
$$= -5\,[\vec{a}\ ;\ \vec{b}] = -5|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\, sin\varphi = -5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = -60$$

Vektorların qarışıq hasilinə aid məsələ həlli

Məsələ 10. $\vec{a}\ \{1; 2; 4\}$, $\vec{b}\ \{0; 3; -1\}$, $\vec{c}\ \{1; 0; 5\}$ vektorlarının qarışıq hasilini tapın:

Həlli:

$$\left([\vec{a}\ ;\ \overrightarrow{b}],\ \vec{c}\ \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \cdot 4 +$$

$$+ 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \cdot 5 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 =$$

$$= 15 + 0 - 2 - 12 - 0 - 0 = 1.$$

Məsələ 11. $\overrightarrow{a}\ \{1;2;3\}$, $\vec{b}\ \{1;1;1\}$, $\vec{c}\ \{1;2;1\}$ vektorlarının qarışıq hasilini tapın:

Həlli:

$$\left([\vec{a}\ ;\ \overrightarrow{b}],\ \vec{c}\ \right) = \left(\overrightarrow{a}\ ,\ [\vec{b}\ ;\ \overrightarrow{c}]\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 + 6 + 2 - 3 - 2 - 2 = 2.$$

Məsələ 12. $\overrightarrow{x}\ \{1;2;1\}$, $\vec{y}\ \{1;3;4\}$, $\vec{z}\ \{2;3;1\}$ vektorları üzərində qurulmuş parallelepipedin həcmini tapın.

Həlli :

$$V = |(\ [\vec{x}\ ;\ \overrightarrow{y}],\ \vec{z}\ )| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 +$$

$$+2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 1 =$$

$$= 3 + 3 + 16 - 6 - 2 - 12 = 2$$

Məsələ 13. Uc nöqtələrinin koordinantları $A\{1;1;1\}$, $B\{1;2;3\}$, $C\{2;3;4\}$, $D\{1;4;2\}$ olan piramidanın həcmini tapın:

Həlli :

$\overrightarrow{AB}$ $=\{1-1;\ 2-1;\ 3-1\} = \{0; 1; 2\}$

$\overrightarrow{AC} = \{2-1;\ 3-1;\ 4-1\} = \{1; 2; 3\}$

$\overrightarrow{AD}$ $=\{1-1;\ 4-1;\ 2-1\} = \{0; 3; 1\}$

$$V = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}(0+6+0-0-1-0) = \frac{5}{6}$$

$$\left(V = \frac{1}{6}\cdot V_{parallepiped} = \frac{1}{6}\cdot \left|\left(\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right], \overrightarrow{AD}\right)\right|\right.$$

Məsələ 14. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ vektorları sağ üçlük təşkil edirlər, qarşılıqlı perpendikulyardırlar. $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 3$ olarsa, $\left([\vec{a}\ ;\ \vec{b}],\ \vec{c}\ \right)$ hasilini tapın:

Həlli:

$\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, $[\vec{a}\ ;\ \vec{b}] = \vec{d}$ qəbul edək. Onda $\vec{d}\perp\vec{a}$, $\vec{d}\perp\vec{b}$ və $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d}$ vektorları sağ üçlük təşkil edirlər.

Şərtə görə $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$ və $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ vektorları sağ üçlük təşkil edirlər. Buradan da $\vec{d}\uparrow\uparrow\vec{c}$. Bu da o deməkdir ki, $\vec{d}$ və $\vec{c}$ vektorları arasındakı bucaq $(\vec{d}\,\hat{}\,\vec{c}\ ) = 0$. $\vec{d}$ vektorunun uzunluğunu tapaq:

$$|\vec{d}| = [\vec{a}\ ;\ \vec{b}] = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\ sin\ (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\ )$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\ \text{ olduğundan, }\ sin\ (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\ ) = sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\left|\vec{d}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|.$$

Beləliklə , $\left([\vec{a}\ ;\ \overrightarrow{b}],\ \vec{c}\ \right) = (\ \vec{d} \cdot \overrightarrow{c}\ ) = \left|\vec{d}\right| \cdot |\vec{c}|\ cos(\vec{d}\,\hat{}\,\overrightarrow{c})$

$$cos(\vec{d}\,\hat{}\,\overrightarrow{c}) = cos0 = 1$$

$$\left([\vec{a}\ ;\ \overrightarrow{b}],\ \vec{c}\ \right) = (\ \vec{d} \cdot \overrightarrow{c}\ ) = \mathrm{l}\overline{d}\mathrm{l} \cdot |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{c}| =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Ev tapşırığı 4. Vektorlar üzərində əməllər:

a) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 20$, $|\,\overline{a}\mathrm{l} = 5$, $\left|\,\overline{b}\mathrm{l} = 8\right.$ olarsa, φ =?

cavab: 60°

b) $\vec{a} = (7,\ 2)$ və $\vec{b} = (8, 3)$ vektorların skalyar hasilini tapın.

cavab: 62

c) $|\,\overline{a}| = 4$, $\left|\,\overline{b}\right|\mathrm{l} = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ olarsa $\overline{a} \cdot \overline{b}$ skalyar hasilini tapın.

cavab: 12

d) $|\,\overline{a}| = 2$, $\left|\,\overline{b}\right| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ olarsa, $(3\,\overline{a} - 2\,\overline{b})\,(5\overline{a} - 6\overline{b})$ skalyar hasilini tapın.

cavab: 84

e) $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}|$ l $= 8$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ olarsa $\overline{a} \cdot \overline{b}$ skalyar hasilini tapın.

cavab: 20

k) $|\overline{a}$l $= 6$, $|\overline{b}$l $= 5$, $\varphi = 30°$ olarsa, $[\vec{a}\ ;\ \overrightarrow{b}]$ vektorial hasilini tapın.

cavab: 15

m) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ olarsa, $[\vec{a}\ ;\ \overrightarrow{b}]$ vektorial hasilini tapın.

cavab: 0

n) $|\overline{a}$l $= 3$, $|\overline{b}$l$= 1$ və $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları arasındakı bucaq 60° olarsa,

$\overline{a}$ və $\overline{a} - 2\,\overline{b}$ vektorlarının skalyar hasilini tapın.

cavab: 6

III FƏSİL. ALİ CƏBRİN ELEMENTLƏRİ

3.1. Çoxluqlar. Çoxluqlar üzərində əməllər

Çoxluq: Çoxluq anlayışı riyaziyyatın ilkin anlayışlarından biri olaraq hər hansı bir təriflə ifadə edilmir. Lakin çoxluq dedikdə bircins və ya bircins olmayan obyektlər yığımı (sistemi) başa düşülür. Çoxluğu təşkil edən obyektlər çoxluğun elementləridir.Çoxluqlar adətən böyük hərflərlə A, B, C,..., işarə edilir.Çoxluğun elementləri isə kiçik hərflərlə (a, b, c,) işarə olunur. Çoxluğun bütün elementlərini A = $\{a_1, \ a_2, \dots\dots, a_n\}$ və ya B = $(b_1, \ b_2, \dots\dots, b_n)$ kimi ifadə edirlər edirlər. Çoxluqlar öz elementləri ilə birqiymətli təyin olunur.

A çoxluğunun elementlərinin sayı n(A) ilə işarə olunur.

Nümunə: A= $\{0,2,4,6,8\}$ çoxluğu üçün n(A) = 5

Tərif: Elementlərinin sayı sonlu olan çoxluğa sonlu çoxluq, elementlərinin sayı sonsuz olan çoxluğa isə sonsuz çoxluq deyilir.

Heç bir elementi olmayan çoxluğa boş çoxluq deyilir və $\emptyset$ kimi işarə edilir. Boş çoxluq üçün n ($\emptyset$) = 0

Əgər A çoxluğunun bütün elementləri həm də B çoxluğunun elementidirsə, onda A çoxluğu B çoxluğunun alt çoxluğu adlanır. Yəni, A $\subset$ B

n elementli çoxluğun bütün alt çoxluqlarının sayı 2^n-dir.

Nümunə: A= $\{a, b, c\}$, n = 3 alt çoxluqlarının sayı 2^3=8

Tərif: Eyni elementlərdən təşkil olunmuş çoxluqlara bərabər çoxluqlar deyilir.

Nümunə: A $\{1, 4, 5, 7, 9\}$ və B $\{4, 9, 1, 7, 5\}$ A = B,

yəni $n(A) = n(B)$

C{ 2, 3, 9, 12 }; D { 3, 2, 12, 9 } C = D,

yəni $n(C) = n(D)$

Misal 1: A=$\{2, 3\}$; B =$\{ x^2 - 5x + 6 = 0\}$ çoxluqları bərabərdir.

$$n(A) = n(B)$$

3.2. Çoxluqların birləşməsi

Tərif: İki çoxluğun bütün elementlərindən (və ya iki çoxluğun heç olmazsa birinə daxil olan elementlərdən) təşkil olunmuş çoxluğa bu çoxluqların birləşməsi deyilir. Simvolik olaraq A∪B kimi işarə olunur.

Yəni, A və B çoxluqlarından birləşməsi nəticəsində alınan yeni C çoxluğuna hər iki çoxluğun bütünü elementləri daxildir.

Nümunə**:** A = $\{1,2,3\}$ və B = $\{2,3,4\}$ A∪B = $\{1,2,3,4\}$

Çoxluğun özü ilə birləşməsi özünə bərabərdir.

$$A \cup A = A$$

Çoxluğun boş çoxluqla birləşməsi özünə bərabərdir.

$$A\cup\emptyset=A$$

Nümunə: C = { 2, 3 , 7 , 8, 9 } , D = { 8, 9, 11, 12 }

C ∪ D = { 2, 3 , 7 , 8, 9, 11, 12 }

(C-nın bütün elementləri daxil edilir, sonra D-də olub C-də olmayanlar daxil edir.)

3.3. Çoxluqların kəsişməsi

Tərif: A və B çoxluqlarının hər ikisinə eyni zamanda daxil olan bütün elementlərdən ibarət olan C çoxluğuna bu çoxluqların kəsişməsi deyilir.

Başqa sözlə: Çoxluqların ortaq (eyni) elementərindən təşkil olunmuş çoxluğa bu çoxluqların kəsişməsi deyilir**.** (A ∩ B)

Nümunə: A= {1,2,3} B = {2,3,4} A∩B = {2,3, }

Misal 2*:* A $[2, \quad 15)$ və B $(-1, \quad 14]$ Aralıqlarının kəsişmələrini təyin edin:

Cavab: A ∩ B = [2, 14]

3.4. Çoxluqların fərqi

Tərif. A və B çoxluqlarının fərqi A çoxluğunun B-yə daxil olmayan elementləri çoxluğuna deyilir və A\B kimi işarə olunur.

Başqa sözlə, A çoxluğunda olan B çoxluğunda olmayan elementlərdən təşkil olunmuş çoxluğa A-nın B-dən fərqi deyilir və A\ B işarə olunur. B- də olan A –da olmayan elementlərdən təşkil olunmuş çoxluğa B - nin A - dan fərqi deyilir

və B \ A işarə olunur.

Nümunə: A= $\{1,2,3,4\}$ və B = $\{1,2,13,15\}$

A\ B = $\{3,4\}$ və B\ A= $\{13,15\}$

Misal 3*:* Fərz edək ki, A = {1, 2, 3 ,4} və B = {3, 4, 5} ibarətdir.

Bu iki çoxluq üçün A \ B fərqini və B \ A qeyd edin:

Həlli:

A \ B = {1, 2}

B \ A = { 5 } olar

Əgər B⊂ A olarsa, A\ B fərqinə B çoxluğunun A çoxluğuna tamamlayıcısı deyilir.

Xassələr

1) n (A∪B) = n (A) + n (B) – n (A∩B)
2) n (A∪B) = n (A\ B) + n (B\A) + n (A∩B)
3) n (A) = n (A\ B) + n (A∩B)
4) n (B) = n (B\A) + n (A∩B)

Çoxluqlar üçün aşağıdakı qanunlar doğrudur:

1) Çoxluğun özü ilə kəsişməsi özünə bərabərdir. $A \cap A = A$

2) Çoxluğun boş çoxluqla kəsişməsi boş çoxluqdur. $\emptyset \cap A = \emptyset$

3) $A \cap B = B \cap A$ və $A \cup B = B \cup A$ (yerdəyişmə qanunu)

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ və $(A \cup B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (qruplaşdırma qanunu)

Mövzuya aid məsələ həlli

Məsələ 1. Çoxluğun alt çoxluqlarının sayı 32 olarsa çoxluğun neçə elementi var?

Həlli: n elementli çoxluğun bütün alt çoxluqlarının sayı 2^n – dir.

$32 = 2^5$ $\quad n = 5$

Məsələ 2. n (A) =18, n (B) =14, n (A∩B) =10 olarsa, n(A∪B) = ?

Həlli :

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 18 + 14 - 10 = 22$

Məsələ 3. n (A∩B) = 5, n (A\ B) =10 olarsa, n (A) = ?

Həlli:

$n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) = 10 + 5 = 15$

Məsələ 4. n (A\ B) = 20, n (B\A) = 10, n (A∪B) = 38, n (A) =?

Həlli :

$$n(A\cup B) = n(A\setminus B) + n(B\setminus A) + n(A\cap B)$$

$$38 = 20 + 10 + n(A\cap B)$$

$$n(A\cap B) = 38 - 30 = 8$$

Məsələ 5. n (A\B) =15, n (B\A) = 14, n (A∪B) = 35 olarsa, n (B) =?

Həlli :

(Çoxluqlar haqqında qeyd edilən qaydalardan istifadə etməklə məsələni həll edək)

$$n(A\cup B) = n(A\setminus B) + n(B\setminus A) + n(A\cap B) \quad (2)$$

$$15 + 14 + n(A\cap B) = 35$$

$$n(A\cap B) = 35 - 29 = 6$$

$$n(A) = n(A\setminus B) + n(A\cap B) \quad (3)$$

$$n(A) = 15 + 6 = 21$$

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) \quad (1)$$

$$n(B) = n(A\cup B) + n(A\cap B) - n(A) = 35 + 6 - 21 = 20$$

Ev tapşırığı 5. Çoxluqları təyin edin:

a) Fərz edək ki, A = {1, 5, 7 ,8 } və B = { 1, 8, 9 } ibarətdir.

Bu iki çoxluq üçün A \ B fərqini və B \ A qeyd edin.

cavab (5,7); (9)

b) A $[2,15)$ və B $(-1, 14]$ Aralıqlarının kəsişmələrini təyin edin.

cavab: $[2\,;14]$

c) n (A\ B) = 20, n (B\A) =10, n (A∪B) = 38 olarsa, n (A) =?

cavab: 28

d) n (A\ B) = 20, n (B\A) =10, n (A∪B) = 45 olarsa, n (A∩B) =?

cavab: 15

e) n (A) =20, n (B) = 14, n (A∪B) =30 olarsa, n (A\ B) =?

cavab: 16

ə) n (A) = 2 n(B), n (A∩B) = n (B) – 3, n (A∪B) = 23 olarsa, n (B)=?

cavab: 13

k) $n(A \setminus B) = 12$, $n(B \setminus A) = 11$, $n(A \cup B) = 36$ olarsa, $n(A) + n(B) + n(A \cap B) = ?$

cavab: 62

m) **(** $-\infty$, **7**) və (4, $+\infty$) aralığının kəsişməsini qeyd edin.

cavab: (4 ;7)

IV FƏSİL. HƏQİQİ ƏDƏD. HƏQİQİ ƏDƏDİN MÜTLƏQ QİYMƏTİ

4.1. Həqiqi ədədin mütləq qiyməti

Əgər x ədədini iki tam m və n ($n \neq 0$) ədədlərinin $x = \frac{m}{n}$ nisbəti kimi təsvir etmək mümkün olarsa, ona rasional ədəd deyilir.

İstənilən rasional x ədədi sonlu və ya sonsuz dövrü onluq kəsr şəklində göstərilə bilər. Əgər x ədədini dövrü olmayan sonsuz $x = a_{0,} a_{1,} a_{2,} \dots, a_{n,} \dots$ onluq kəsr şəklində göstərmək mümkündürsə, ona irrasional ədəd deyilir.

Bütün rasional və irrasional ədədlər çoxluğunu həqiqi ədədlər çoxluğu adlandırırlar. Hər bir həqiqi ədədə ədəd oxunun müəyyən nöqtəsi uyğundur.

Həqiqi x ədədinin mütləq qiyməti (modulu) mənfi olmayan və

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

münasibəti ilə təyin olunan $|x|$ ədədinə deyilir.

Başqa sözlə, bir rəqəmin 0-dan uzaqlığına həmin rəqəmin mütləq qiyməti deyilir.

Mütləq qiymət bir ölçüdür. x - ədədinin mütləq qiyməti $|x|$ kimi yazılır.

Müsbət ədədin modulu ədədin özünə bərabərdir.

Mənfi ədədin modulu mənfi ilə vurulur və moduldan kənara çıxarılır.

Mütləq dəyərin qiyməti ya 0 olar yada müsbət qiymət olar.

Mütləq dəyərin qiyməti mənfi ola bilməz.

x - ədədini moduldan çıxararkən 3 hal mümkündür:

$$|X| = \begin{cases} -x, & x < 0 \quad isə \\ 0, & x = 0 \quad isə \\ x, & x > 0 \quad isə \end{cases}$$

Ədədin modulunun çıxarılması:

1) $|-7| = -(-7) = 7$

2) $|0| = 0$

3) $|7| = 7$

4) $|1+3| + |1-3| = 4 + |-2| = 4 + 2 = 6$

5) $|\sqrt{5}+3| = \sqrt{5} + 3$

6) $\left|\sqrt{3} - 2\right| = -(\sqrt{3} - 2) = -\sqrt{3} + 2$

4.2. Cəmin, fərqin, hasilin, nisbətin mütləq qiyməti haqqında teoremlər

Teorem 1. İki həqiqi ədəd cəminin mütləq qiyməti, həmin ədədlərin mütləq qiymətləri cəmindən böyük deyildir:

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$$

Teorem 2. İki həqiqi ədədin fərqinin mütləq qiyməti, onların mütləq qiymətləri fərqindən kiçik deyildir:

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \geq |\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}|$$

Teorem 3. İki həqiqi ədəd hasilinin mütləq qiyməti həmin ədədlərin mütləq qiymətlərinin hasilinə bərabərdir:

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|$$

Teorem 4. İki həqiqi ədədin nisbətinin mütləq qiyməti həmin ədədlərin mütləq qiymətləri nisbətinə bərabərdir:

$$\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right| = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{y}|}, \quad y \neq 0$$

Teorem 5. $|x| < M$ bərabərsizliyi $-M < x < M$ bərabərsizlikləri ilə ekvivalentdir (eynigüclüdür).

Bərabərsizliyi həll edin:

1) $|x - 5| < 2$

$-2 < x - 5 < 2$ bərabərsizliyin hər tərəfinə 5 ədədini əlavə etsək

$3 < x < 7$

2) $\left|2x - 3\right| < 1$

$-1 < 2x - 3 < 1$ bərabərsizliyin hər tərəfinə 3 ədədini əlavə etsək

$2 < 2x < 4$

$1 < x < 2$

Ev tapşırığı 7: Aşağıdakı bərbərsizlikləri həll edin:

a) $\left|x - 1\right| < 3$; *cavab: (-2 ; 4)*

b) $\left|3x - 6\right| < 3$; *cavab: (1 ; 3)*

c) $\left|2x + 5\right| > 1$ *cavab:* $(-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$

d) $\left|x - 5\right| \leq 7$ *cavab:* $[-2; 12]$

e) $\left|x + 3\right| \geq 4$ bərabərsizliyini ödəməyən neçə tam ədəd var? *cavab: 7*

4.3. Kəmiyyətin təqribi qiymətinin tapılması. Əsl xəta və mütləq xəta

Təqribi ədədlərin yuvarlaqlaşdırılması qaydası:

Praktik məsələlərin həllində bəzən kəmiyyətlərin təqribi qiymətlərindən istifadə olunur. Kəmiyyətin dəqiq qiyməti ilə təqribi qiymətinin fərqinin modulu təqribi qiymətin mütləq xətası adlanır.

Mütləq xəta = |dəqiq qiymət – təqribi qiymət|

$\Delta A = |A_{ölç} - A_{həq}|$ burada

ΔA – mütləq xəta

$A_{ölç}$ – dəqiq qiymət

$A_{ölç}$ – təqribi qiymət -dir

Yəni, Mütləq xəta ölçmələr nəticəsində alınan təqribi qiymətin kəmiyyətin həqiqi qiymətindən nə qədər fərqləndiyini göstərir.

Nümunə: 5,019 ədədini yüzdə bir və onda bir dəqiqliyi ilə yuvarlaqlaşdıraq. Yuvarlaqlaşma zamanı yol verilən mütləq xətanı hesablayaq.

Həlli:

$5{,}019 \approx 5{,}02$ (yüzdə birə qədər yuvarlaqlaşdırma).

Yəni, 5,019 ədədi 0,001 qədər artmışdırş. Bu zaman mütləq xəta

$\Delta A = |A_{ölç} - A_{həq}| = |5{,}019 – 5{,}02| = 0{,}001$ olar.

Ədədi onda birə qədər yuvarlaqlaşdırdıqda $5{,}019 \approx 5$ olur. Bu zaman ədəd 0,019 qədər azalmış olur. Bu halda ədədin mütləq xətası

$\Delta A = |5{,}019 – 5| = 0{,}019$ olar.

Nisbi xəta – Mütləq xətanın ölçülən kəmiyyətin həqiqi qiymətinə nisbətidir.

Nisbi xəta, nisbi göstərici olduğu üçün %-lə hesablanılır. Yəni,

$$\varepsilon = \frac{\Delta A}{A_{həq}} \cdot 100\%$$ (ε - nisbi xətanın işarəsidir)

Nümunə: $A_{həq} = 5$; $A_{ölç} = 5{,}019$ olan ədədin

$$\Delta A = |A_{ölç} - A_{həq}| = |5{,}019 - 5| = 0{,}019$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta A}{A_{həq}} \cdot 100\% = \frac{0{,}019}{5} \cdot 100 = 0{,}38\% \text{ olar}$$

4.4. Faizin hesablanma qaydaları

Tərif: Ədədin yüzdə biri hissəsinə faiz (%) deyilir.

Faizin % - hesablanma qaydası:

1) Ədədi faizlə ifadə etmək üçün 100-ə vurmaq lazımdır.

Nümunə: 0,5 ədədini faizlə ifadə edin:

$0{,}5 \cdot 100 = 50\%$

2) Faizi ədədə çevirmək üçün 100-ə bölmək lazımdır.

Nümunə: 60% -i ədədlə ifadə edin.

$\frac{60}{100} = 0{,}6$

3) Ədədin faizini tapmaq üçün ədədi 100-ə bölüb, faiz göstərən ədədə vurmaq lazımdır.

Nümunə: 40 ədədinin 60%-ni tapın.

$\frac{40}{100} \cdot 60 = 24\%$

4) Faizinə görə ədədi tapmaq üçün ədədi 100-ə vurub, faiz göstərən ədədə bölmək lazımdır.

Nümunə: 30%-i 150 olan ədədi tapın.

$\frac{150 \cdot 100}{30} = 500$

5) Bir ədədin o birinin neçə faizi olduğunu tapmaq üçün soruşulan ədədi verilən ədədə bölüb, 100-ə vurmaq lazımdır.

Nümunə: 80 ədədi 320 ədədinin neçə faizidir?

$\frac{80 \cdot 100}{320} = 25\%$

6) Bir ədəd o birindən neçə faiz azdır (və ya çoxdur) tapmaq üçün iki ədədin fərqini verilən ədədə bölüb, 100-ə vurmaq lazımdır.

Nümunə: 120 ədədi 150- dən neçə faiz azdır?

$\frac{150-120}{150} \cdot 100 = \frac{30}{150} \cdot 100 = 20\%$

Nümunə: 60 ədədi 40-dan neçə faiz çoxdur?

$\frac{60-40}{40} \cdot 100 = \frac{20}{40} \cdot 100 = 50\%$

Qeyd : Birinci ədəd ikincidən n% azdırsa, ikinci ədəd birincidən n% çox deyil.

Nümunə : 150 ədədi 200-dən neçə faiz azdır? 200 ədədi 150-dən neçə faiz çoxdur?

Həlli:

$\frac{200-150}{200} \cdot 100 = \frac{50}{200} \cdot 100 = 25\%$

150 ədədi 200-dən 25% azdır.

$\frac{200-150}{150} \cdot 100 = \frac{50}{150} \cdot 100 = 33\frac{1}{3}\%$

200 ədədi 150-dən $33\frac{1}{3}\%$ çoxdur.

7) Neçə faiz artdı (və ya azaldı) tapmaq üçün çoxdan azı çıxıb, artan ədədə (və ya azalan ədədə) bölərək 100-ə vurmaq lazımdır.

Nümunə: Köynək əvvəl 24 manat idi. Sonra 18 manat oldu. Qiymət neçə faiz azaldı?

$\frac{24-18}{24} \cdot 100 = \frac{6}{24} \cdot 100 = 25\%$

Faizə aid məsələlər.

Məsələ 1. İclasda 300 nəfər iştirak etdi. Qəbul edilmiş qərara 225 nəfər səs verdi. Qərara bütün iştirakçıların neçə faizi səs verdi?

Həlli :

Səs verən 225 nəfərin 300 nəfərin neçə faizi olduğunu tapmaq lazımdır:

$\frac{225\cdot100}{300}$ =75%

cavab: 75%

Məsələ 2. Mağazada birinci gün bütün malın 20 %-i, ikinci gün isə qalan malın 60%-i satıldı. Bu iki gündə bütün malın neçə faizi satıldı?

Həlli :

Yuxarıdakı qaydaya (2-ci) əsasən faizləri ədədlə ifadə edək:

Mağazadakı bütün mallar ---- 100%=1

1-ci gün satılan mal---- 20%=0,2 olarsa, onda qalan mal 1-0,2=0,8 olacaq.

2-ci gün qalan malın 60%-ni tapmaq üçün 0,8 ədədinin 60%-ni tapmalıyıq:

$$\frac{0{,}8\cdot60}{100} = 0{,}48 \text{ (2-ci gün)}$$

Beləliklə, 1-ci gün 0,2, 2-ci gün 0,48

İki gündə satılan malın neçə faiz təşkil etdiyini tapaq.

Yuxarıdakı qaydaya (1-ci) əsasən ədədləri faizlə ifadə edək:

0,2=20% , 0,48=48%

Beləliklə , iki gündə

20%+48% = 68%

cavab 68%

Məsələ 3. Hovuzda 280 litr su var. Yağışdan sonra hovuzdakı su 35% artarsa, hovuzda nə qədər su olar?

Həlli :

280 =100%

100%+35%=135%

280 – 100%

x -- 135% → $x = \frac{280 \cdot 135}{100} = 378$

cavab: 378 litr

Məsələ 4. Meyvə qurudulduqda kütləsinin 45%-ni itirir. 80 kq təzə meyvədən nə qədər quru meyvə alınar?

Həlli :

80 kq-ın 45% -ni hesablayaq.

80 ---100%

x --- 45% $\rightarrow$ $x = \frac{80 \cdot 45}{100} = 36$

80 – 36 = 44 kq

cavab: 44 kq

Məsələ 5. Televizor 480 man, tozsoran 230 man-dır. Mağaza televizora 10%, tozsorana 5% endirim etdi. 1 tozsoran və 1 televizor alan müştəri nə qədər pul ödəyəcək?

Həlli :

7-ci qaydadan istifadə etməklə məsələni həll edək.

Televizorun qiyməti 10% azalarsa və televizorun endirimli qiymətini x ilə işarə etsək:

$\frac{480 - x}{480} \cdot 100 = 10$ $\rightarrow$ $x = 432$

Tozsoranın qiyməti 5% azalarsa və tozsoranın endirimli qiymıtini y ilə işarə etsək:

$\frac{230 - y}{230} \cdot 100 = 5$ $\rightarrow$ y = 218,5

432 + 218,5 = 650,5

cavab: *650,5man*

Məsələ 6. Ədədin 30%-nin 10%-i ədədin neçə faizidir?

Həlli :

30%= 0,3 (2-ci qayda)

0,3 ədədinin 10% -ni hesablayaq:

$\frac{0.3 \cdot 10}{100} = 0{,}03$

İndi isə 0,03 – ün ədədin neçə faizi olduğunu tapaq.

Ədəd-in 100%=1 olduğunu bilirik, onda

1 ----- 100%

0,*03* --- x → $x = \frac{0,03 \cdot 100}{1}$ = *3%*

c*avab*: 3%

Məsələ 7. Muradın pulu Orxanın pulundan 20% azdır. Orxanın pulu Muradın pulundan neçə faiz çoxdur?

Həlli :

Orxanın pulu -----100%=1

Muradın pulu -----100% $-$ 20%=80% =0,8

Yuxaridakı qadaya (6-cı) əsasən ,

$\frac{1-0,8}{0,8} \cdot 100 = \frac{0.2}{0,8} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$

c*avab*: *25%*

Məsələ 8. Biri digərinin 40%-i olan iki ədədin cəmi 560-dır. Bu ədədlərin fərqi neçədir?

Həlli :

1-ci ədəd ---- x

2-ci ədəd ---- x işarə edək. Şərtə görə, $x + y = 560.$

x --- 100%

y --- 40% → $y = \frac{40x}{100} = \frac{2x}{5}$

$$x + \frac{2x}{5} = 560$$

$$\frac{7x}{5} = 560$$

$$x = 400,$$

$$y = 560 - x = 560 - 400 = 160 \;\rightarrow\; x - y =$$
$$= 400 - 160 = 240$$

cavab: 240.

Məsələ 9. Ədəd 5 dəfə artmışdır. Ədəd neçə faiz artmışdır?

Həlli :

Ədədi $\boldsymbol{x}$ işarə edək. Ədəd 5 dəfə artarsa $5x$ olar. Onda 7-ci qaydaya əsasən

$$\frac{5x-x}{x} \cdot 100 = \frac{4x}{x} \cdot 100 = 400\%$$

cavab: 400%

Ev tapşırığı 6: Faizi hesablayın:

1) Usta və onun şagirdi 2200 detal hazırladı. Usta bütün detalların 75%-ni hazırladı. Usta neçə detal hazırladı?

cavab: 1650

2) Məktəbdə 1600 şagird təhsil alır. Onların 12%-i əla oxuyur. Məktəbdə neçə əlaçı var?

cavab: 192

3) 75 man dəyərində olan paltar 20% endirimlə neçə manata satılar?

cavab: 60

4) Fərqi 60 olan iki ədədin kiçiyinin 40%-i, böyüyünün

25%-nə bərabərdir.

Bu ədədləri tapın.

cavab: 160, 100

5) 60%- i ilə 32%-nin fərqi 84 olan ədədi tapın.

cavab: 300

6) Kubun tilini 10% artırsaq, həcmi neçə faiz artar?

cavab: 33,1

7) Satıcı əlindəki malları faktura dəyərindən 20% ucuz almış və faktura dəyərindən 40% baha satmışdır. Satıcı bu satışdan neçə faiz gəlir əldə edər?

cavab: 60%

8) Avtomobil bütün yolun 65%-ni getdi və 105 km yol qaldı. Bütün yolu tapın.

cavab: 300 km

V FƏSİL. ƏDƏDİ FUNKSİYA ANLAYIŞI

5.1. Funksiyanın verilmə üsulları

Funksiya anlayışı riyaziyyatın əsas anlayışlarından biridir. Funksiya sözü latınca – «əməl etmə», «yerinə yetirmə» və «tamamlanma» deməkdir.

Funksiya anlayışını Alman filosfu və riyaziyatçısı Q.V.Leybnits elmə gətirmişdir. (1616-1716). Funksiya 2 dəyişən kəmiyyətlər arasındakı uyğunluğu müəyyən edir. Burada 1-ci dəyişənə ($\boldsymbol{x}$) sərbəst dəyişən, 2-ci dəyişənə (y) asılı dəyişən deyilir.

Tərif 1. X ədədi çoxluğundan götürülmüş hər bir $\boldsymbol{x}$**-ə** Y-çoxluğundan yeganə $\boldsymbol{y}$ ədədini qarşı qoyan qaydaya $\boldsymbol{x}$ çoxluğunda verilmiş **ədədi funksiya** deyilir. Adətən, ədədi funksiya $y = f(x)$; $y = g(x)$; $y = h(x)$ və s. kimi işarə olunur.

Burada $\boldsymbol{x} -$ ə sərbəst dəyişən və ya fuksiyanın arqumenti, $y -$ ə isə asılı dəyişən və ya $\boldsymbol{x}$ arqumentinin funksiyası deyilir.

X –çoxluğu funksiyasının təyin oblastı adlanır və $D(f)$ ilə isarə olunur.

$$D(f) = x$$

f–funksiyasının təyin oblastından götürülmüş, hər bir x-ə $f(x)$ ədədini qarşı qoymaqla alınan $\{\ f(x),\ \ x \in D(f)\ \}$

çoxluğu onun qiymətlər çoxluğu və ya qiymətlər oblastı adlanır və $E(f)$ ilə işarə olunur.

$$E(f) = \{f(x), \qquad x \in D(f)\}$$

Arqumentin hər bir qiymətinə funksiyanın uyğun qiymətini tapmaq qaydası verilibsə, funksiya verilmiş hesab edilir.

Funksiyanın tərifini başqa sözlə belə də söyləmək olar.

Tərif 2. $\boldsymbol{x} -$ dəyişəninin hər bir qiymətinə müəyyən qayda ilə y $-$dəyişəninin yeqanə qiyməti üyğun gələrsə, y-in belə asılılığına funksional asıllıq və ya funksiya deyilir. Adətən funksiya 3 üsulla verilir.

I. Cədvəl üsulu. Sərbəst dəyişmənin qiymətlərinə uyğun asılı dəyişənin giymətləri cədvəl vasitəsi ilə verilmişsə, x-in istənilən qiyməti üçün y-in uyğun qiymətini göstərə bilərik. Bu üsulda funksiya cədvəl vasitəsilə verilir.

Cədvəl üsulu ilə verilən funksiyanın təyin oblastı $D(f)$ $=\{ x_1, \ x_2, \dots, x_n \}$

Qiymətlər çoxluğu isə $E(f) =\{ y_1, \ y_2, \dots, y_n \}$ olur.

II. Qrafik üsul. Asılı dəyişənlə sərbəst dəyişən arasındakı asılılıq koordinat müstəvisində müəyyən əyri ilə və ya düz xətlə verilə bilər. Bu zaman x arqumentinin hər bir qiymətinə uyğun $\boldsymbol{y}$ – funksiyasının qiyməti verilən əyrinin köməyi ilə asanlıqla tapıla bilər.Funksiyanın bu üsulla verilməsi **qrafik üsul** adlanır.

III. Analitik üsul. Sərbəst dəyişənlə asılı dəyişən arasındakı uyğunluq müəyyən düsturla verilə bilər $y = f(x)$

$\boldsymbol{x}$- arqumentinin verilmiş qiyməti üçün y-in uyğun qiyməti bu düsturun köməyi ilə tapmaq olar. Bu halda deyirlər ki, funksiya düsturla və ya **analitik üsulla** verilmişdir.

Nümunə: $y = x^2 - 5x + 6$

Bəzən funksiyanın analitik ifadəsi bir neçə düsturla verilə bilər.

Məsələn, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & -2 \leq \text{x} < 0 \\ 3x - x^2 & 0 \leq x < 3 \end{cases}$

olduqda deyirlər ki, funksiya hissə-hissə verilmişdir. Praktikada çox vaxt funksiya analitik üsulla verilir və bəzən onun təyin oblastı göstərilmir.

Əgər funksiya düsturla verilib, lakin onun təyin oblastı göstərilməyibsə, onda funksiyanın təyin oblastı arqumentin düsturu mənalı edən qiymətləri çoxluğundan ibarət olur.

Nümunə: $f(x) = \frac{8}{x-3}$ funksiyasının təyin oblastını tapaq.

Həlli:

$x - 3 \neq 0$ yəni $x \neq 4$ olduqda $\frac{8}{x-3}$ funksiyasının mənası vardır.

Ona görə də $f(x) = \frac{8}{x-3}$ funksiyasının təyin oblasıtı 3-

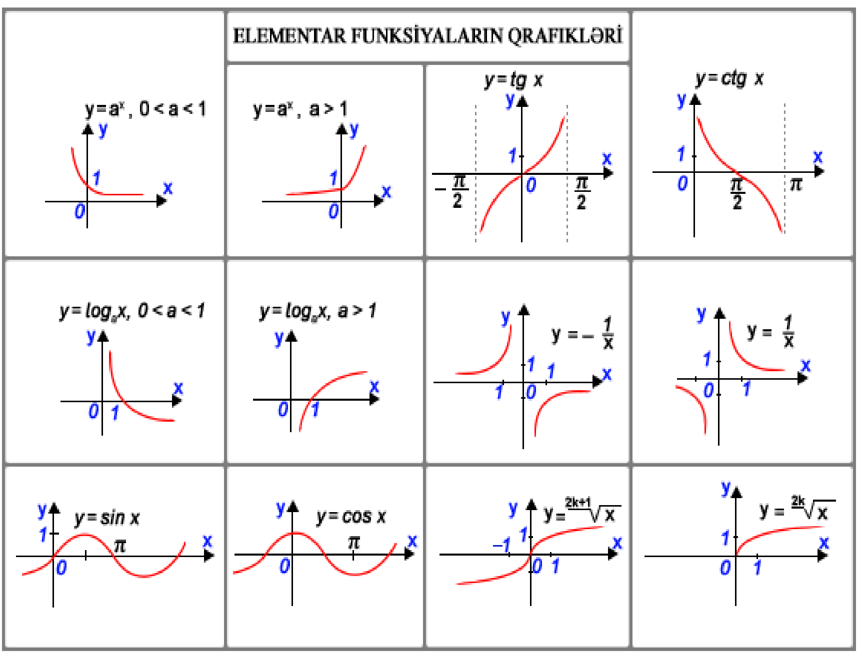
dən başqa bütün həqiqi ədədlər çoxluğdur.

$$D(f) = (-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$$

5.2. Funksiyanın qrafiki

Tərif. Koordinat müstəvisinində absisləri arqumentin qiymətlərinə bərabər olan nöqtələr çoxluğuna **funksiyasının qrafiki** deyilir.

Koordinat müstəvisində verilmiş hər hansı əyri o zaman müəyyən bir funksiyasının qrafiki ola bilər ki, kordinat oxuna paralel olan istənilən düz xətti onun ən çoxu bir nöqtədə kəssin. Funksiyanın qrafiki ixtiyari xətt ola bilər. $y = f(x)$-ə isə alınmış əyrinin (xəttin) tənliyi deyilir. (şəkil 1)



5.3. Aşkar və qeyri-aşkar funksiyalar

Funksiyalar aşkar və qeyri-aşkar şəkildə verilə bilər. Yəni, $y = f(x)$ şəklində verilərsə, funksiya aşkar şəkildə verilmiş sayılır.

Nümunə 1:

$$y = 7x + 2; \quad y = 3x^3 + 4x + 1; \quad y = \frac{5}{x+1} \text{ və s.}$$

Amma, hər hansı riyazi düstur y -ə nəzərən həll olunmamış formada verilərsə belə funksiya qeyri-aşkar funksiya olur. Yəni,

$$F(x, y) = 0$$

Nümunə 2: $5x - y + 7 = 0$ funksiyası qeyri-aşkar formada verilib.

$$-y = -5x - 7$$

$$y = 5x + 7 \text{ (aşkar şəklə gətirildi)}$$

5.4. Funksiyasının artması və azalması

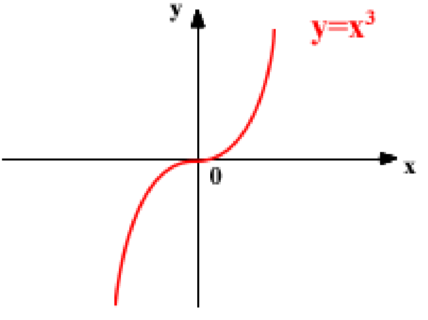
Tərif 1. X çoxluğunda arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın böyük qiyməti uyğun gələrsə, $f -$ funksiyasına bu çoxluqda **artan funksiya** deyilir. Başqa sözlə, istənilən $x_1, x_2 \in X$ üçün $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1) < f(x_2)$ olarsa, f – funksiyasına X – çoxluğunda artan funksiya deyilir.

Tərif 2. X-çoxluğunda arqumentin böyük qiymətinə funksiyasının kiçik qiyməti uyğun gələrsə, f- funksiyasına bu çoxluqda **azalan funksiya** deyilir.

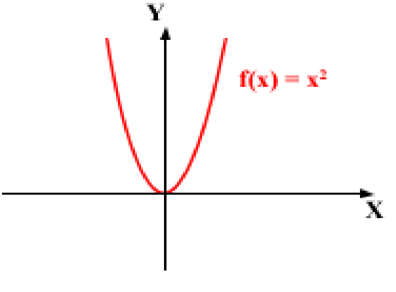
Başqa sözlə istənilən $x_{1,}x_2 \in X$ üçün $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1) > f(x_2$ olarsa, f- funksiyasına X- çoxluğunda azalan funksiya deyilir.

Tərif 3. Artan və azalan funksiyalara **monoton funksiyalar** deyilir.

Nümunə 1**:** $f(x) = x^3$ funksiyası bütün ədəd oxu üzərində monoton artan funksiyadır. (şəkil 2)



Nümunə 2: $f(x) = x^2$ funksiyası $(-\infty; 0)$ – da monoton azalan, (0;$+\infty$)-da isə monoton artandır. (şəkil 3)



5.5. Tək və cüt funksiyalar

Təyin oblastı koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan funksiyalara baxaq.

Tərif: Təyin oblastı $D(f)$ koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan

$x \in (-a; a]$; $f(x)$ funksiyası üçün

$$f(-x) = f(x) \text{ şərti ödənilərsə} \qquad (1)$$

$y = f(x)$ funksiyasına [-a; a] aralığında **cüt funksiya** deyilir.

Başqa sözlə, təyin oblastından götürülən istənilən x üçün $f(-x) = f(x)$ şərti ödənilərsə $f(x)$ funksiyası cütdür.

Nümunə: $f(x) = 2x^2 + 3$ funksiyasının tək və cütlüyünü araşdıraq:

$f(-x) = 2(-x^2) + 3 = 2(x^2) + 3 = f(x) \rightarrow$ funksiya cütdür

Tərif: Təyin oblastından götürülən istənilən x üçün

$$f(-x) = -f(x) \text{ şərti ödənilərsə} \qquad (2)$$

$y = f(x)$ funksiyasına **tək funksiya** deyilir.

Nümunə: $f(x) = 3x^3 + 5$ funksiyasının tək və cütlüyünü araşdıraq:

$f(-x) = 3(-x^3) + 5 = -3x^3 + 5 = -f(x) \rightarrow$ funksiya təkdir

Tərif: Təyin oblastından götürülən istənilən x üçün (1) və (2) şərtlərinin heç biri ödənilməzsə onda $f(x)$ funksiyası periodik funksiya adlanır.

Yəni, $f(x)$ -sı nə tək nə də cüt funksiya deyil.

Nümunə: $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 8$ funksiyasının tək və cütlüyünü araşdıraq:

$f(-x) = 3(-x^3) + 2(-x^2) - 8 = -3x^3 + 2x^2 - 8 = -(3x^3 - 2x^2 + 8)$

nə tək deyil nə də cüt deyil. (periodik funksiyadır)

Tək və cüt funksiyalarin xassələri

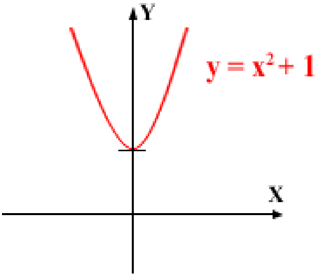
1) İki cüt funksiyanın cəmi cüt funksiyadır.

2) İki tək funksiyanın cəmi tək funksiyadır.

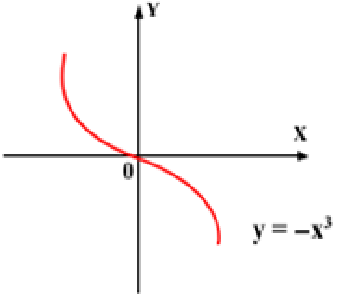
3) İki cüt funksiyanın hasili və nisbəti cüt funksiyadır.

4) f -funksiyası cüt funksiyasıdırsa, onda $\frac{1}{f}$ -də cüt funksiyadır. Əksinə f-funksiyası təkdirsə, onda $\frac{1}{f}$-də təkdir.

Cüt funksiyanın qrafiki ordinat oxuna görə simmetrikdir (şəkil 4).



Tək funksiyanın qrafiki isə koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir (şəkil 5).



Funksiyanın tək və cütlüyünün araşdırılmasına aid misallar:

Misal 1. $f(x) = 10x^7 + x^5 - x^3 + 7$ tək və cütlüyünü təyin edin:

$f(-x) = 10(-x)^7 + (-x)^5 - (-x)^3 + 7 =$
$-10x^7 - x^5 + x^3 + 7 = -f(x)$ *cavab*: funksiya təkdir

Misal 2: $f(x) = 7x^6 + 3x^4 - 9x^2 + 8$ tək və cütlüyünü təyin edin:

$f(-x) = 7(-x)^6 + 3(-x)^4 - 9(-x)^2 + 8 =$

$=7x^6 + 3x^4 - 9x^2 + 8$

cavab: funksiya cütdür

Misal 3: $f(x) = 3x^6 - 2x^3 + 9x^2 - x$ tək və cütlüyünü təyin edin.

$f(-x) = 3(-x)^6 - 2(-x)^3 + 9(-x)^2 - (-x) =$
$= 3x^6 + 2x^3 + 9x^2 + x$

Buradan görünür ki, verilmiş funksiyalardan cüt funksiyalar işarəsini dəyişmir amma, tək funksiyalar işarəsini dəyişir. Yəni funksiya nə tək, nə də cüt funksiyadır.

cavab: nə tək, nə cüt funksiyadır

Ev tapşırığı 8: Funksiyanın tək və cütlüyünün araşdırın:

1) $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 1$; *cavab:* nə tək, nə cüt funksiyadır

2) $f(x) = |x| + 7$; *cavab:* cüt

3) $f(x) = -9x^7 + 3x^5 - 2x^3 + 7x$; *cavab:* tək

4) $f(x) = 7x^4 + 13x^2 + 8$; *cavab:* cüt

5) $f(x) = 7x^4 + 13x^3 + 8$; *cavab:* nə tək, nə cüt funksiyadır

6) $f(x) = 3x^6 - 2x^3 + 9x^2 - x$;

cavab: nə tək, nə cüt funksiyadır

7) $y = x^6 - 2x^3 + 9x^2 - 11$;

cavab: nə tək, nə cüt funksiyadır

8) $y = \frac{|x|+5}{5x^3+1}$; *cavab:* tək

9) $y = \frac{-7x^4+12x^2}{5x^2+1}$; *cavab:* cüt

10) $y = (3x^3 - 2x + 4) + (9x - 7)$;

cavab: nə tək, nə cüt funksiyadır

5.6. Funksiyanın təyin oblastının tapılması

Funksiyanın təyin oblastı, arqumentin ala biləcəyi qiymətlər çoxluğuna deyilir.

Yəni, Funksiyanın təyin oblastı, x - in elə qiymətləridir ki, bu qiymətlərdə funksiyanın qiyməti təyin olunsun.

Misal 1: $f(x) = \frac{5}{x}$ funksiyasının təyin oblastını təyin edin:

$$D(E) = \{ x \in R, \ x \neq 0 \}$$

Misal 2: $f(x) = \frac{x+5}{4x-12}$ funksiyanın təyin oblastını tapın:

$$4x - 12 = 0 \leftrightarrow x = 3$$

D(E) ∈(R) − { 3} (3-dən başqa bütün qiymətləri alır)

Misal 3: $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2}$ funksiyanın təyin oblastını tapın:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$x = 2$; $x = 1$

D(x) = $(-\infty; 1) \cup (1;\ 2) \cup (2; +\infty;\ )$

Misal 4: $y = \sqrt{2x - 6}$ təyin oblastını təyin edin:

$2x - 6 \geq 0$ olarsa $y = \sqrt{2x - 6}$ funksiyasının mənası var.

$$2x \geq 6$$

$$x \geq 3$$

D(y) = $[3; +\infty]$

Ev tapşırığı 9: Aşağıda verilmiş funksiyaların təyin oblastını təyin edin:

1) $f(x) = \frac{x+11}{4x-2}$; *cavab:* $D(f)$= $(-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty;\ )$

2) $f(x) = \frac{x+7}{x^2-7x+12}$; *cavab:* $D(f)$=$(-\infty; 3) \cup (3;\ 4) \cup (4; +\infty;\ )$

3) y = $\sqrt{x-6}$ + $\sqrt{8\ - x}$; *cavab:* $D(f)$= $[6\,;8]$

4) y = $\sqrt[4]{3x\ - 12}$; *cavab:* $D(f)$ = $[4\,;\ +\infty\ \ ]$

5) $f(x)$ = 12x^2+ 3x – 15; *cavab:* $D(f)$= $(\,-\infty;+\infty;\ )$

6) $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2-8x+16}$; *cavab:* $D(f)$=$(\,-\infty;4\,)\ \cup\ (4;+\infty;\ )$

7) y = $\sqrt{3x\ - 6}$; *cavab:* $D(f)$ = $[2\,;\ +\infty\ \ ]$

VI FƏSİL. LİMİT ANLAYIŞI

6.1. Ədədi ardıcıllığın və funksiyanın limiti

Tərif 1. Natural ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş funksiya ədədi ardıcıllıq adlanır.

Məsələn: 1:3:5:7:9: ardıcıllıq (2-artır) və yaxud 1,4,7,10,13, ..., (*3 artır*)

Ardıcıllığı təşkil edən ədədlərə onun **hədləri** deyilir. Ədədi ardıcıllığın hədləri indeksi olan hərflərlə işarə olunur. Nümunə: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$ və s.

Ardıcıllıq özü $\{a_n\}$ və yaxud (a_n) kimi işarə olunur. Ədədi ardıcıllığın istənilən nömrəli həddini tapmaq mümkündürsə, onda ədədi ardıcıllıq verilmiş hesab olunur.

Hədlərinin sayına görə ardıcıllıqlar 2 növə bölünür. Sonlu və sonsuz həddi olan ardıcıllıqlar.

Tərif 2. Sonlu sayda həddi olan ardıcıllığa **sonlu ardıcıllıq** deyilir.

Tərif 3. Sonsuz sayda həddi olan ardıcıllığa **sonsuz ardıcıllıq** deyilir.

Ardıcıllıqlar, hədləri arasındakı münasibətlərinə görə artan, azalan, sabit, rəqs edən **Monoton artan ardıcıllıq** – Bu ardıcıllıqda, ikinci həddən başlayaraq ardıcıllığın hər bir həddi, özündən əvvəlki həddən böyük olur.

Monoton azalan ardıcıllıq – ikinci həddən başlayaraq hər bir həddi, özündən əvvəlki həddən kiçik olur.

Limit nədir?

Limit sözünün hərfi mənası – latıncadan limes (limitis) sözündən götürülmüş mənası sərhəd, hədd və yaxud yaxınlaşma demәkdir.

Riyaziyyatda - *limit sözünün* mənası $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ belə başa düşülür:

Tutaq ki, n artdıqca (sonsuz) $\{a_n\}$ ardıcıllığının elementlərinin qiymətləri a ədədinə yaxınlaşır, yığılır. Daha doğrusu bu o deməkdir ki, n - in çox böyük qiymətlərində ardıcıllığın elementlərin qiyməti a - nın yaxın ətrafında yerləsir. Burada a sonlu ədəd və ya sonsuzluq simvollarından hər hansı biri ola bilər.

a - ın sonsuz halında ardıcıllıq sonsuz böyük adlanır:

Hər bir ardıcıllığın elementlərindən düzəldilmiş çoxluq sonsuzdur. Hətta ardıcıllığın bütün elementləri bərabər olsa belə, yəni ardıcıllıq bir elementdən ibarət olsa belə, onun elementlərindən düzəldilmiş çoxluq da sonsuzdur.

6.2. Ardıcıllığın limiti

Tərif: Fərz edək ki, E istənilən müsbət ədədi üçün elə müsbət N ədədi göstərmək olar ki, bütün $n > N$ qiymətlərində $|a_n - A| < E$ şərti ödənilir.

Onda a ədədinə (a_n) ardıcıllığının $n \to \infty$ da limiti deyilir. Yəni,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Teorem 1: Limiti olan ardıcıllıq yığılan, limiti olmayan ardıcıllıq isə dağılan ardıcıllıq adlanır.

6.3. Ardıcıllığın limitləri haqqında teoremlər

Teorem 1: Əgər $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ardıcıllıqları yığılandırsa, onda $\{a_n\} \pm \{b_n\}$ ardıcıllığı da yığılandır.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

Teorem 2: Əgər $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ardıcıllıqları yığılandırsa, onda $\{a_n\} \cdot \{b_n\}$ ardıcıllığı da yığılandır.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Teorem 3: Əgər $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ardıcıllıqları yığılandırsa, onda $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ardıcıllığı da yığılandır. Burada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}; \quad (b_n) \neq 0$$

Teorem 4: Sabit ardıcıllığın limiti bu ardıcıllığın həddinə bərabərdir.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{c} = \mathrm{c}$$

Nəticə: Sabit vuruğu limit işarəsinin qarşısına çıxarmaq mümkündür.

$$\lim_{n\to\infty}(k\cdot a_n) = \mathrm{k}\cdot\lim_{n\to\infty} a_n$$

Limitlər haqqında qaydalar

1. $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$
3. $\mathrm{a}\cdot\infty = \infty$
4. $\mathrm{a}\cdot(-\infty) = -\infty$
5. $\frac{a}{\pm\infty} = 0$
6. $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^{∞}

qeyri-müəyyənlik alınarsa hər hansı riyazi qaydaların köməyi ilə müəyyən hala gətirilməlidir.

Misal: $\lim_{n\to\infty}\frac{8n-3}{13-7n}$

Həlli:

Qismətin limiti haqqındakı teoremi birbaşa tətbiq etsək, $\frac{\infty}{\infty}$ şəkilində qeyri-müəyyənlik alarıq. Bu qeyri-müəyyənliyi aradan qaldırmaq üçün $\frac{8n-3}{13-7n}$

kəsirinin sürət və məxrəcini *n*-ə bölüb sonra kəsrin limiti haqqında teoremi tətbiq edirik.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-3}{13-7n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(8n-3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(13-7n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8n}{n}-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13}{n}-\frac{7n}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}8-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{13}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}7}=$$

$$=\frac{8-0}{0-7}=-\frac{8}{7}$$

Ardıcıllığın limitinin hesablanmasına aid misallar:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3n^2+n}{7}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{7n^2}=\frac{3\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{7\frac{n^2}{n^2}}=\frac{3+\frac{1}{n}}{7}=\frac{3}{7}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-5}{11-7n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{6n}{n}-\frac{5}{n}}{\frac{11}{n}-\frac{7n}{n}}=-\frac{6}{7}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt{n^2-1}-n)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}{\sqrt{n^2-1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}{\sqrt{n^2-1}+n}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n^2-1-n^2)}{\sqrt{n^2-1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2-1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}+\frac{n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}=$

$\frac{-1}{\sqrt{1-0}+1}=-\frac{1}{2}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{2n^2-1}}{\sqrt[3]{n^2-2}-\sqrt[4]{n^4+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n+2}{n^2}}-\sqrt{\frac{2n^2-1}{n^2}}}{\sqrt[3]{\frac{n^2-2}{n^3}}-\sqrt[4]{\frac{n^4+1}{n^4}}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}}=\frac{0-\sqrt{2}}{0-1}=\sqrt{2}.$$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3^n}{1-3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{1}{3^n}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n-1}}{3^{n-1}+4^{n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n\cdot\frac{1}{4}}{3^n\cdot\frac{1}{3}+4^n\cdot 16}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{4^n}+\frac{1}{4}}{\frac{3^n}{4^n}\cdot\frac{1}{3}+16}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{3}{4})^n+\frac{1}{4}}{(\frac{3}{4})^n\cdot\frac{1}{3}+16}=$

$=\frac{0+\frac{1}{4}}{0\cdot\frac{1}{3}+16}=\frac{\frac{1}{4}}{16}=\frac{1}{64}$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-5^{n+1}}{2+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n(\frac{2^n}{5^n}-5)}{5^n(\frac{2}{5^n}+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{5})^n-5}{\frac{2}{5^n}+1}=-5.$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!+n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)+n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1+1}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0.$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+1)!\,(n+2)}{(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(1+n+2)}{(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+2)\cdot(n+3)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0.$

Ev tapşırığı 10: Ardıcıllıqların limitini hesablayın:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{4n^3+n}{5}\right)$; *cavab:* ∞

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16n-5}{11-8n}$; *cavab: -2*

c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$; *cavab: 0*

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+6^n}{1-3^n}$; *cavab:* ∞

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+3^{n-1}}{3^{n-1}+5^{n+2}}$; *cavab: 0*

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!+n!}$; *cavab: 0*

ə) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{(n+3)\cdot(n+5)}$; *cavab: 0*

6.4. Funksiyanın limiti və onun xassələri

Tərif: Fərz edək ki, sonlu a və A ədədi verilib. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, x- *in* X – çoxluğundan götürülmüş *və* $|x-a| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x)-A| < \varepsilon$ şərti ödənilərsə, onda A ədədinə $x \to a$ şərtində f(x) funksiyasının limiti deyilir.

$$\lim_{x\to a} f(x_n) = A$$

Misal: $f(x) = \frac{2x^2 - 5x+3}{x-3}$ - funksiyası $x = 3$ də təyin olunmayıb.

Deməli, $x_0 = 3$ də bu funksiyanın limiti var və

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 5x+3}{x-3} = \frac{2(x-3)(x+\frac{1}{2})}{x-3} = \frac{2(x+\frac{1}{2})}{1} =$$

$=2x + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

6.5. Funksiyanın limitləri haqqında teoremlər

Teorem: Sonlu limiti olan iki funksiyanın cəminin, fərqinin, hasilinin və nisbətinin limitləri aşağıdakı şərtləri ödəyir.

1. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0)$ *olarsa*

Nəticə: Sabit vuruğu limit işarəsinin qarşısına çıxarmaq olar. ($\lim\limits_{x\to a} (f(x)$ *varsa*)

$\lim\limits_{x\to a} (k \cdot f(x)) = \mathrm{k} \cdot \lim\limits_{x\to a} (f(x)$

Funksiyanın limitinin hesablanması

Misal 1 . $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) =$

$= 2 + 2 = 4$

Misal 2.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^3-8}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^3-8}\right) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} =$$

$$= \frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)} = \frac{2+2}{4+2\cdot 2+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Misal 3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}} = \frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}\right)} =$

$$= \frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}\right)}{3x-2-x} = \frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}\right)}{2x-2} =$$

$$= \frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}\right)}{2(x-1)} = \frac{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}\right)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Misal 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x} = \frac{(\cos x-\sin x)\cdot(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x} =$

$$= \cos x + \sin x = \ = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Misal 5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\operatorname{tg} 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin 2x}{x}}{1+\frac{\operatorname{tg} 4x}{x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n} \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} mx}{nx} = \frac{m}{n} \end{cases}$

$\leftrightarrow \frac{1-2}{1+4} = -\frac{1}{5}$

Misal 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x \cdot \cos 2x}{\sin 2x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos 2x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} = 1{,}5$$

Misal 7.

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(2x-2)}{x^2-7x+6} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2\sin(2(x-1))}{2(x-1)(x-6)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(2(x-1))}{2(x-1)} \cdot$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{x-6} = -\frac{2}{5}$

Ev tapşırığı 11: Funksiyanın limitini hesablayın

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$ *cavab:* $\frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$ *cavab:* $\frac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x}}$ *cavab: 0*

d) $\lim\limits_{x\to 2} (2x^3 + x - 6)$ *cavab: 12*

e) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{x^3-8}\right)$ *cavab:* $\frac{1}{3}$

k) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ olarsa $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = ?$ *cavab: 3*

f) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{\sqrt{x+4}-1}}\right)$ *cavab:* $\sqrt{2}$ *+1*

m) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}}}$ *cavab: 1*

6.6. Funksiyanın kəsilməzliyi

Tərif 1: Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuşdur və bu funksiyanın $x\to x_0$ şərtində limiti $f(x_0)$ – a bərabərdir.

Yəni, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

belə olan halda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir.

Tərif 2: $f(x)$ – funksiyasının x_0 - nöqtəsində limiti funksiyasının bu nöqtədəki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ qiymətinə bərabərdirsə, onda $f(x)$ – funksiyasına x_0 - nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir.

Tərif 3: $f(x)$ funksiyası (a, b) intervalının (a < b) hər bir nöqtəsində kəsilməzdirsə funksiya bu intervalda kəslməz adlanır.

Sağ və sol limitdən istifadə etməklə oxşar qayda ilə funksiyanın nöqtədə sağdan və soldan kəsilməzlik anlayışları daxil edilir.

Tərif 4: Funksiya a və b nöqtəsində təyin olunduqda

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ = f (a) olarsa funksiya a - da sağdan,

$\lim\limits_{x\to b-0} f\big(xf(x)\big) = f(b)$ olarsa b -də isə soldan kəsilməzdir.

Teorem 1: İstənilən rasional funksiya sərbəst dəyişənin təyin oblastına daxil olan bütün qiymətlərində kəsilməzdir.

Teorem 2: İstənilən irrasional funksiya təyin oblastının hər bir nöqtəsində kəsilməzdir (uc nöqtələ təyin oblastına daxildirsə həmin nöqtələr istisna olmaqla)

Məsələn: Bütün ədəd oxunda təyin olunmuş $y = x^2$ funksiyası təyin oblastının hər bir nöqtəsində kəsilməzdir.

Doğrudan da $\forall\ x_0 \in (-\infty;\ +\infty)$ nöqtəsində

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x^2 = {x_0}^2 = f(x_0)$ bərabərliyi ödənilir.

Tərif: Əgər x_0 - nöqtəsindəki limit funksiyanın bu nöqtədəki qiymətinə bərabər deyilsə, onda funksiya x_0 nöqtəsində kəsiləndir (x_0 nöqtəsinə isə kəsilmə nöqtəsi deyirlər).

Misal 1. $y = \sqrt{x}$ funksiyası $x > 0$ nöqtəsində kəsilməzdir.

Misal 2: $y = \frac{3}{x}$ funksiyası $x \neq 0$ nöqtəsində kəsilməzdir. $x = 0$ da isə kəsilməyə məruz qalır.

Kəsilməzliyin xassələri

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

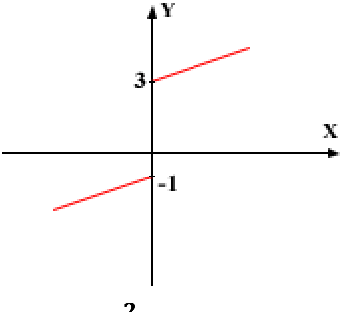
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x).}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, *burada* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ *olarsa şərtlər doğrudur.*

Misal 3: $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x > 0 \\ x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$

Həlli:

$x = 0$ nöqtəsi kəsilmə nöqtəsidir və $f(0) = -1$



Misal 4. $f(x) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3x - 2}}$ funksiyasının kəsilmə nöqtəsini təyin edin:

Həlli:

$f(x) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3x - 2}}$ funksiyası rasional funksiya olduğundan

$3x - 2 = 0 \leftrightarrow 3x = 2x \leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Deməli, $f(x) = \frac{2}{3x-2}$ funksiyasının kəsilmə nöqtəsi $\frac{2}{3}$ -dir.

Qeyd 1: Funksiyanın kəsilməzliyi, adətən hansı səbəbdən pozulur $y = f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində kəsilməzliyi ya bu funksiyanın $x = x_0$ nöqtəsində $f(x_0 - 0)$ və $f(x_0 + 0)$ birtərəfli limitlərinin olması, ya da ki, limitləri olsa da $f(x_0)$ qiymətinə bərabər olmaması səbəbindən pozula bilər.

Başqa sözlə: Funksiyanın kəsilməzliyi o vaxt pozula bilər ki, $y = f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsindəki sağ və sol limitlərinin qiymətləri eyni olmasın.

Misal 5: $f(x) = x^2 - 4$ funksiyası $x = 1$ də kəsilməzdir. Yəni,

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 4) = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$

$$\lim_{x\to -1}(x^2 - 4) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$

Burada, funksiyanın sağ və sol limitlərin qiymətləri bərabər olduğu üçün

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 4) = -3$$

olur .

Qeyd 2: Əgər, verilən funksiya analitik şəkildə verilərsə yəni,

$f(x) = x^2 - 4 - 2$ və $f(x) = \frac{x-1}{x+6}$ şəklində verilərsə, funksiyanın limitini bir başa hesablamaq mümkündür. Amma, parçalı funksiya şəkilində verilərsə (şərtlərlə verilərsə) yəni,

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 4 < x \\ x^2-7, & 4 \geq x \end{cases} \quad \text{isə} \quad \lim_{x\to 4} f(x) = ?$$

Belə olan halda, funksiyanın sağ və sol limiti tapılır.

$$\lim_{x\to +4}(2x+1) = 2\cdot 4 + 1 = 9$$

$$\lim_{x\to -4}(x^2-7) = (-4)^2 - 7 = 16 - 7 = 9$$

Deməli,

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 9$$

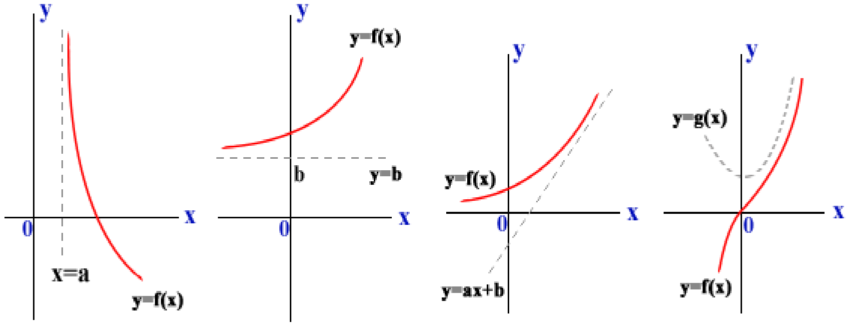
Əgər funksiya mütləq qiymətdə (modulda) məsələn, $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ şəkildə verilərsə, onda funksiyanı moduldan çıxarmaq lazımdır. Bunun üçün də verilən funksiyanın col və sağ limiti tapmaq lazımdır.

6.7. Asimptot. Asimptotun təyin olunması

Asimptot - (uyğun gəlməyən, aid olmayan) — hər hansı bir M əyrisinə mümkün olan qədər yaxınlaşan hər hansı bir N əyrisidir.

Başqa cür desək, əgər M nöqtəsi sonsuzluğa yaxınlaşanda bu nöqtə ilə müəyyən bir düz xətt (N) arasındakı məsafə sıfıra yaxınlaşırsa bu düz xətt (N) həmin əyrinin (funksiyanın) asimptotudur.

Asimptotun növləri: şaquli , üfüqi , maili (əyri) ola bilər



x=a şaquli asimptot y=b üfüqi asimptot y=ax + b əyri asimptot y=g(x) əyri asimptot

Şaquli asimptotun hesablanması:

y = $\frac{P(x)}{Q(x)}$ verilən rasional funksiyada məxrəci sıfıra bərabər edən ədəd, həmin funksiyanın şaquli asimptotdur.

Kəsr şəklində verilməyən funksiyanın şaquli asimptotu yoxdur.

Misal 1: $y = \frac{2x+14}{3x-15}$ funksiyasının şaquli asimptotunu tapın:

$$3x - 15 = 0$$
$$3x = 15$$
$$x = 5$$

Üfüqi asimptotun tapılması:

Üfüqi asimptotu tapmaq üçün $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) =$? qiyməti hesablanır:

Yəni, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$-in qiyməti funksiyanın üfüqi asimptotdur.

Əgər, limitin qiyməti $(+\infty)$ və ya $(-\infty)$ alınarsa üfüqi asimptot yoxdur.

Misal 2: $f(x) = 2x - 7$ olarsa,

$\lim\limits_{x\to\infty} (2x - 7) = +\infty$ (üfüqi asimptot yoxdur)

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x - 7) = -\infty$ (üfüqi asimptot yoxdur

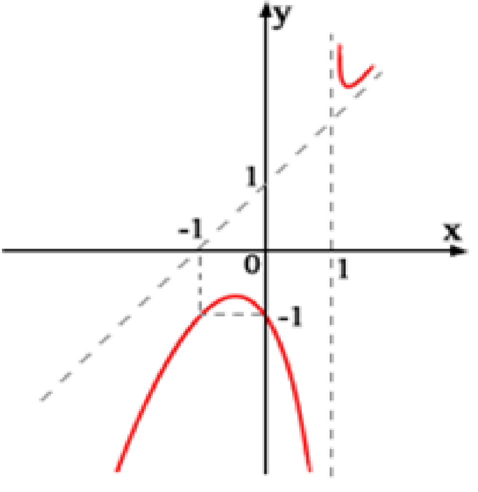
Misal 3: $f(x) = \frac{3x-2}{4x-5}$ asimptotu təyin edin:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3x-2}{4x-5}\right) = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}$ (üfüqi asimptotdur)

Maili asimptotun tapılması:

Misal: $f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$ maili asimptotu tapın**:**



Həlli:

Funksiyanın surətini onun məxrəcinə bölmək lazımdır.

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+1 & x-1 \\
\cline{2-2}
\underline{-\;+x^2-x} & x+1 \\
x+1 &
\end{array}
$$

$\frac{x^2\,+\,1}{x-1} = (x\ +1) + \frac{2}{x-1}$ bərabərliyi əldə edilir.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2\,+\,1}{x-1}\right) - (x\ +1\ ) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

olduğundan, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\,+\,1}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x+1)$ dir .

$y = x\ +1$ qrafikin əyri asimptotudur.

VII FƏSİL. TÖRƏMƏ ANLAYIŞI

7.1. Törəmə. Törəmənin həndəsi və mexaniki mənası

Törəmə anlayışı əyriyə toxunanın çəkilməsi və hərəkətin dəyişmə sürətinin təyini məsələlərinin həlli sayəsində yaranmışdır. Əsasən, XVII əsrdə formalaşmışdır. Onu daha çox inkişaf etdirən alman riyaziyyatçısı və filosofu Q.Leybnis (1646-1716) və ingilis riyaziyyatçısı İ.Nyuton (1643-1727) olmuşdur.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $(a,\ b)$ intervalında təyin olunmuşdur və x_0 bu intervalın verilmiş nöqtəsidir: $x_0 \in (a, b)$. Arqumentin x_0 nöqtəsində aldığı Δx artımına funksiyanın uyğun artımı $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ olar.

Tərif: Arqumentin artımı sıfra yaxınlaşdıqda ($\Delta x \to 0$) funksiya artımının arqumentin artımına nisbətinin limitinə $y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi deyilir və $y'(x_0)$ ilə işarə edilir:

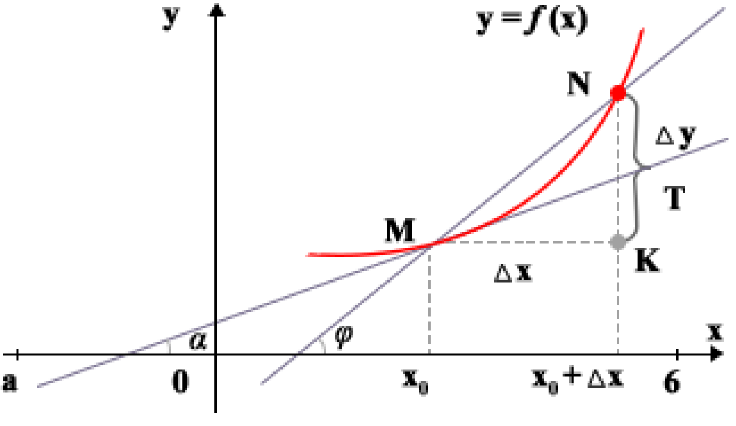
$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1).$$

Funksiyanın törəməsi y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ kimi də işarə edilir. Törəmənin $x = a$ nöqtəsində aldığı qiyməti isə $f'(a)$ və yaxud $y'|_{x=a}$ ilə işarə edilir.

Verilmiş x_0 nöqtəsində $x_0 \in (a, b)$ törəməsi olan funksiyaya həmin nöqtədə diferensiallanan funksiya deyilir. $(a,\ b)$ intervalının hər bir nöqtəsində törəməsi olan funksiya həmin intervalda diferensiallanan funksiya adlanır.

Başqa sözlə: Nöqtədə törəməsi olan funksiyaya həmin nöqtədə **diferensiallanan funksiya** deyilir.

İxtiyari *L* əyrisi və onun üzərində bir *M*0 nöqtəsi götürək. *L* əyrisinin ixtiyari *M* və M0 nöqtəsindən M0*M* kəsəni çəkək (şəkil 1) *M* nöqtəsi *L* əyrisi boyunca öz yerini dəyişdikdə M0M kəsəni də, ümumiyyətlə M0 nöqtəsi ətrafında öz vəziyyətini dəyişər. *M* nöqtəsi *L* əyrisi boyunca M0 nöqtəsinə yaxınlaşdıqda M0M kəsəni müəyyən M0T limit vəziyyətinə yaxınlaşarsa, kəsənin həmin limit vəziyyətinə M0 nöqtəsində *L* əyrisinə **toxunan deyilir.**



Törəmənin həndəsi mənası belədir: $y=f$ (x) funksiyasının x_0 nöqtəsində birinci tərtib törəməsi $(f'(x_0))$ funksiyanın qrafiki olan əyriyə $M_o(x_{0,}\ f(x_0))$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir:

$$\boldsymbol{f'(x_0)} = \mathbf{k} = \mathbf{tan}\boldsymbol{\alpha}$$

İndi L əyrisinə M_0 $(x_{0,}\, f(x_0)$ nöqtəsində çəkilmiş M_oT toxunanının tənliyini yazmaq olar. Məlumdur ki, M_0 $(x_{0,}\, f(x_0)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı

K = $f'(x_0)$ olan *MT* düz xəttinin tənliyi

$Y-$ f(x_0) = $f'(x_0)(x-x_0)$ şəklində yazılır.

$y_0 =$ f(x_o) olduğundan, toxunanın tənliyi

$$\boldsymbol{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$$

L əyrisinin M_0 nöqtəsində çəkilmiş toxunanına həmin nöqtədə perpendikulyar olan düz xəttə əyrinin **normalı deyilir**. Bu normalın bucaq əmsalını iki düz xəttin perpendikulyar olması şərtindən tapmaq olar:

Onda *L* əyrisinin nöqtəsindəki normalının tənliyi

$$\mathrm{k_{nor}} = -\frac{1}{\mathrm{k_{tox}}} = -\frac{1}{\mathrm{f'(x_0)}}$$

onda L əyrisinin M_0 $(x_{0,}\, f(x_0)$ nöqtəsindəki normalının tənliyi

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\,(x-x_0) \text{ şəklində olar.}$$

Hər hansı cismin dəyişənsürətli düzxətli hərəkətinə baxaq. Bu cismin ölçülərini və şəklini nəzərə almayaraq onu maddi nöqtə hesab etmək olar. Məlumdur ki, hərəkət edən nöqtənin getdiyi yol zamandan asılıdır: S =*S(t)*. Bu *S(t)* funksiyasına nöqtənin hərəkət qanunu deyilir. Nöqtənin S(t) zaman ərzində getdiyi yol *S(t)*,

$t + \Delta t$ zamanda getdiyi yol isə

S(t)· $(t + \Delta t)$ = *S(t)* + ΔS olar. Baxılan nöqtə, Δt zamanı ərzində ΔS məsafəsini getmiş olar. Bu halda

$$V_{ort} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

nöqtənin $\boldsymbol{t}$ anından $\mathbf{t} + \Delta t$ anına qədər müddətdəki hərəkətinin orta sürətinə bərabər olar.

Aydın ki, $\boldsymbol{V_{ort}}$ - orta sürəti nöqtənin $\boldsymbol{t}$ anındakı sürətini xarakterizə edə bilməz. Lakin $\Delta\boldsymbol{t}$ zaman fasiləsini çox kiçik götürsək, onda orta sürət $\boldsymbol{t}$ anındakı sürətə çox yaxın olar. Buna görə də $\Delta\boldsymbol{t} \to \mathbf{0}$ şərtində limiti cismin $\boldsymbol{t}$ anındakı sürəti adlanır və $V(t) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ ilə işarə edilir.

Törəmənin tərifinə görə bərabərliyinin sağ tərəfi $s(t)$ funksiyanın $\boldsymbol{t}$ dəyişəninə nəzərən törəməsidir: Yəni, törəmənin mexaniki mənası

$$\boldsymbol{V(t) = S'(t)}$$

şəklində ifadə olunur.

7. 2. Cəmin, hasilin və kəsrin törəməsi haqqında teoremlər

Fərz edək ki, ***f(x)*** və $\boldsymbol{\varphi(x)}$ funksiyaları hər hansı (a,b) intervalında diferensiallanan funksialardır. ***x*** həmin intervalın ixtiyari nöqtəsidir, $\Delta\boldsymbol{x}$ isə onun artımıdır. Funksiyanın törəməsi üçün aşağıdakı teoremlər doğrudur

Teorem 1. İki funksiya cəminin törəməsi onların törəmələri cəminə bərabərdir.

$$[f(x) + \varphi(x)]' = f'(x) + \varphi'(x)$$

Teorem 2. İki funksiya hasilinin törəməsi üçün

$$\boldsymbol{[f(x) \cdot \varphi(x)]' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x)}$$

düsturu doğrudur.

Teorem 3. Kəsrin törəməsi üçün $\varphi(x) \neq 0$ olduqda

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot \varphi(x) - f(x) \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \qquad \textbf{(3)}$$

düsturu doğrudur.

Törəməni tapmaq üşün qaydalar

1. $C' = 0$ *(c = const)*

2. $(u + v - \omega)' = u' + v' - \omega'$

3. $(cv)' = c\, v'$

4. $(uv)' = u\, v' + v\, u'$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u\, v' - v\, u'}{v^2}$

6. $y'_x = y'_z \cdot z'_x$

7. $(x)' = 1$, $(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$, *(*$x^0 = 1$ *bərabərdir)*

8. $(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

9. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(x)' = 1$*-ə bərabərdir*

10. $(\sin x)' = \cos x$

11. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = sec^2 x$

13. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -cosec^2 x$

14. $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$

15. $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$

16. $(a^x)' = a^x \cdot ln\, a$

17. $(e^x)' = e^x$

18. $(arc\, sin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

19. $(arc\, cos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

20. $(arc\ \ tg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

21. $(arc\ \ ctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Törəmənin hesablanmasına aid bəzi misalların

izahla həlli:

1) $\left(x^2 + \sqrt{x} + 9\right)' = (x^2)' + (\sqrt{x})' + (9)' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0$

2) $\left(\frac{x^2}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2)' = \frac{2}{3}\ x$

3) $\ln(x^2 + 5x + 9)\ \ )' = \frac{2x+5}{x^2+5x+9}$

4) $(\sin 3x)' = \cos\ 3x\ \ (3x)' = 3 \cdot \cos 3x$

5) $(\sin 5x^2)' = \cos\ 5x^2\ \ (5x^2)' = 10x \cdot \cos 5x^2$

6) $(\text{tg}\,3x)' = \frac{1}{cos^2\,3x} \cdot (3x)' = \frac{3}{cos^2\,3x}$

7) $(\text{ctg}\,2x)' = -\frac{1}{sin^2\,2x} \cdot (2x)' = -\frac{2}{sin^2\,2x}$

8) $(\,e^{x^2}\,)' = 2x \cdot e^{x^2}$

Ev tapşırığı 12: Törəməni hesablayın:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x}$; *cavab:* $\frac{2}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{3}{x^2-1}$; *cavab:* $-\frac{6x^3}{(x^2+1)^2}$

c) $f(x) = x^5 + \sqrt{x} + 3$; *cavab:* $5x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f(x) = (3x^3 + 3x)^5$ *cavab:* $5 \cdot (3x^3 + 3x)^4(9x^2+3)$

e) $f(x) = 5^{4x^2-5}$; *cavab:* $\ln 5 \cdot 8x \cdot 5^{4x^2-5}$;

ə) $f(x) = \sqrt[5]{(x^3+2)^3}$; *cavab:* $\frac{9}{5} \cdot \frac{x^2}{\sqrt[5]{(x^3+2)^2}}$

k) $f(x) = \log_5(3x-2)$; *cavab:* $\frac{3}{(3x-2)\ln 5}$

m) $\boldsymbol{y} = ctg\,3x$; *cavab:* $-\frac{3}{sinx^2 3x}$

n) $\boldsymbol{y} = e^{x^2+3x-4}$ **;** *cavab:* $(2x+3)\,e^{(x^2+3x-4)}$

7.3. Funksiyanın ekstremumu. Törəmənin köməyi ilə onların tapılması

Tərif 1: $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ olan nöqtələri və törəmənin olmadığı x nöqtələri $f(x)$ funksiyasının böhran nöqtələri adlanır.

Tərif 2: Funksiyanın maksimum və minimum nöqtələrinə onun ekstremum nöqtələri deyilir.

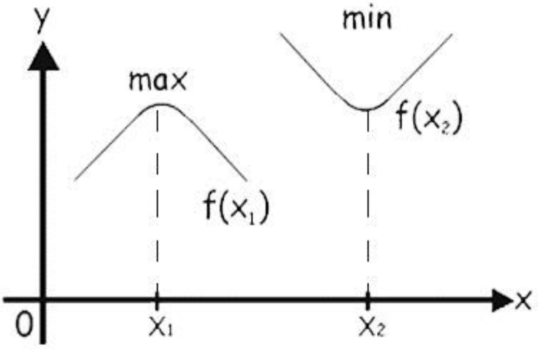
Tərif 3: $f'(x_0) = 0$ bərabərliyini ödəyən x_0 nöqtəsinə $f(x)$ funksiyasının stasionar nöqtəsi deyilir.

Funksiyanın maksimum və minimum nöqtələrini onun böhran nöqtələri arasında axtarmaq lazımdır

Tərif 4: x_1 nöqtəsinin müəyyən ətrafından olan bütün $\boldsymbol{x}$-lər üçün $x \neq x_1$ f $(x_1) > f(x)$ bərabərsizliyi ödənərsə, $f(x_1)$ qiymətinə funksiyanın maksimum qiyməti, $\boldsymbol{x_1}$ - nöqtəsinə isə $f(x)$ -in maksimum nöqtəsi deyilir.

Tərif 5: x_2 - nöqtəsinin müəyyən ətrafında olan bütün $\boldsymbol{x}$-lər ücün $x \neq x_2$ $f(x_2) < f(x)$ ödənilərsə, $f(x_2)$ qiymətinə funksiyanın minimum qiyməti, $\boldsymbol{x_2}$ - nöqtəsinə isə $f(x)$ funksiyasının minimum nöqtəsi deyilir.

Deməli, ekstremum funksiyanın yaxın yerləşən qiymətləri arasında ən böyük və ya ən kiçik qiymətləridir .



Beləliklə, $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında maksimum və minimum qiymətlərini tapmaq üçün:

1) $f(x)$ funksiyasının [a,b] parçası daxilində olan bütün qiymətlərini hesablamaq:

2) $f(x)$ funksiyasının [a,b] parçasının uc nöqtələrindəki $f(a)$ və $f(b)$ qiymətlərini hesablamaq:

3) alınan bu ədədlərin ən böyüyünü və ya ən kiçiyini seçmək lazımdır.

Tapılmış ədədlər uyğun olaraq, funksiyanın verilmiş parçada ən böyük və ən kiçik qiymətlər olur. Funksiyasının $[a, b]$ parçasında maksimum və minimum qiymətləri uyğun olaraq ***max f(x)*** və ***min f(x)*** kimi işarə olunur.

Nəticə: Arqumentin baxılan bütün qiymətlərində $f(x)$ funksiyasının törəməsi varsa, onda bu funksiya öz ekstremumunu yalnız törəmənin sıfıra bərabər olduğu nöqtələrdə ala bilər.

Ekstremumun varlığı üçün kafi şərtlər verilmiş funksiya özünün böhran nöqtəsində nə zaman lokal ekstremum qiymət alacağını təyin etmək üçün nöqtə ətrafında onun törəməsini tədqiq edirlər. Bu qayda ilə funksiyanın birtərtibli, ikitərtibli və s. törəmələrindən istifadə etməklə lokal ekstremum varlığı üçün müxtəlif kafi şərtlər verilir.

Misal 1. $f(x) = 6x^4 - x^6 + 4$ funksiyanın ekstremumlarını tapaq:

Həlli:

$f'(x) = 24x^3 - 6x^5$

$6x^3(4 - x^2) = 0$

$x = 0;\ x = \pm 2$

$f(0)\ 0 - 0 + 4 = 4\ (min)$

$f(-2) = 6 \cdot (-2)^4 - (-2)^6 + 4 = 36\ (max)$

$f(2) = 6 \cdot 2^4 - 2^6 + 4 = 36\ (max)$

7. 4. Ekstremumun yüksək tərtibli törəmə vasitəsilə araşdırılması

Bəzən funksiyanın lokal ekstremumunu yüksək tərtibli törəmə vasitəsilə təyin etmək daha əlverişli olur.

Teorem: Əgər $y = f(x)$ funksiyasının $x=x_0$ nöqtəsində n-tərtibə qədər kəsilməz və $f''(x) = f'''(x) = \dots =$

$f^{(n-1)}(x_0) = 0,\quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$ şərtlərini ödəyən törəmələri varsa, onda n cüt ədəd olduqda $x = x_0$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının lokal ekstremumu vardır. n tək ədəd olduqda isə $x=x_0$ nöqtəsində $y= f(x)$ funksiyasının lokal ekstremumu yoxdur. Bu halda:

1) n cüt ədəd və $f''(x) < 0$ olduqda f(x) funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində lokal maksimumu var.

2) n cüt ədəd və $f''(x) > 0$ olduqda f(x) funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində lokal minimumu var.

Başqa sözlə: Əgər $f''(x_0) > 0$ isə x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının $\boldsymbol{min}$ var

Əgər $f''(x_0) < 0$ isə x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının $\boldsymbol{max}$ var

Misal 2: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 16x$ ekstremumları tapaq:

$$f'(x) = x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 4\ ;\quad x = -4\ ;\ x = 4$$

$f''(x) = 2x$ olduğuna görə

$$f''(-4) = 2 \cdot (-4) = -8 < 0 \text{ (max)}$$

$$f''(4) = 2 \cdot 4 = 8 > 0 \text{ (min)}$$

Misal 3: $f(x) = 6x - 2x^3$ funksiyanın $[-2; 3\,]$ *max* və *min* qiymətlərini hesablayaq:

Həlli:

$f'(x) = 6 - 6x^2$; $f'(x)$ *=0*

$6(1 - x^2) = 0$

$x = \pm 1$

$f(1) = 4\ (max)$

$f(-1) = -4\ (minx)$

İndi parçanın uc nöqtələrindəki $[-2, 3]$ qiymətlərini hesablayaq:

$$f(-2) = 4 > 0\ (max)$$

$$f(3) = -36 < 0\ (min)$$

Beləliklə, $f(max) = 4$; $f(minx) = -36$

Ev tapşırığı 13: Aşağıda verilmiş funksiyaların maksimum və minumum qiymətlərini tapın:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 + 4x$; *cavab: max=8/3, min=1,83*

2. $y = \frac{1}{6}x^3 + 1{,}5x^2 + 2{,}5x$; *cavab: max=* $4\frac{1}{6}$ *, min=* $-1\frac{1}{6}$

3. $y = 2x^3 + 15x^2 + 24$**;** *cavab: max=149, min=24*

4. $y = x^3 + 2x^2$, $[-1;\ 1]$; *cavab: max=3, min=0,*

5. $y = x^4 - 8x^2 + 1$, $[-1;\ 2]$; *cavab: max=1, min=−15,*

6. $y = -x - \frac{1}{x}$, $[0{,}5\ ;\ 3\,]$; *cavab: max*$=-2$, *min*$=-3{,}33$

7. $y = x^2 - 4x + 5$, $[-\mathbf{3};\ 1,]$**;** *cavab: max=26, min=2*

VIII FƏSİL. İBTİDAİ FUNKSİYA ANLAYIŞI. QEYRİ-MÜƏYYƏN İNTEQRAL

8.1. İbtidai funksiya və onun xassələri

Diferensiallanma əməlində $F(x)$ verilir. Bu zaman $f(x) = F'(x)$ şərtini ödəyən $f(x)$ funksiyasını tapmaq tələb olunur.

İnteqrallama əməlində f(x) funksiyası verilir, törəməsi bu funksiya olan, yəni

$$F'(x) = f(x)$$

şərtini ödəyən F(x) funksiyasını tapmaq tələb olunur. Deməli, inteqrallama əməli diferensiallama əməlinin tərs əməlidir.

Tərif 1. Verilmiş aralıqdan götürülən bütün x-lər üçün

$$F'(x) = f(x) \text{ olarsa,}$$

onda, F(x) funksiyasına $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası deyilir.

(aralıq dedikdə, parça, interval, yarım interval və s. başa düşülür).

Başqa sözlə: Əgər $[a, b]$parçasının bütün nöqtələrində $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənərsə, onda F(x) funksiyasına $f(x)$ funksiyasının **ibtidai funksiyası** deyilir.

Teorem 1. Müəyyən aralıqda təyin olunmuş funksiyanın ixtiyari iki müxtəlif ibtidai funksyası bu aralıqda bir-birindən sabit qədər fərqlənir.

İbtidai funksiyanın ümumi ifadəsi də belə olur

$$F(x) + c\,; \quad (c = cons)$$

Yəni, funksiyanın heç olmazsa bir ibtidai funksiyası varsa, onda onun sonsuz sayda ibtidai funksiyası var.

Misal 1. $f(x) = x^2 + 3$ funksiyasına baxaq.

Burada, $f'(x)$ = *2x* olduğuna görə

$F(x)$ = 2 $\frac{x^2}{2}$ = x^2 + C olar

8.2. Qeyri-müəyyən inteqral və onun xassələri

Tərif 3. Hər hansı (a, b) intervalında verilmiş $f(x)$ funksiyasının bütün ibtidai funksiyaları çoxluğuna $f(x)$ funksiyasının həmin intervalda qeyri-müəyyən inteqralı deyilir və $\int \boldsymbol{f(x)dx}$ simvolu ilə işarə edilir ("inteqral ef iks de iks" kimi oxunur).

Burada, $f(x)$ inteqralaltı funksiya**,** $f(x)\,dx$ isə inteqralaltı ifadədir.

Tərifə görə, $F(x)$ funksiyası (a, b) intervalında $f(x)$ funksiyasının hər hansı ibtidai funksiyasıdırsa, $\int f(x)dx = F(x) + c$ şəklində yazılır.

Funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralının tapılması əməliyyatı inteqrallama adlanır.

İnterqral alma əməliyyatında, inteqralı alınacaq olan ifadının hansı funksiyanın törəməsi olduğu məlumdursa bu funksiyaya ixtiyari bir C sabiti əlavə etməklə inteqral hesablanmış olur. Buna görə, törəmə mövzusunda gördüyümüz düsturların doğru olduğunu yazmaq olar.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad (n \neq -1)$

2. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c, \qquad (a > 0; a \neq 1)$

3. $\int a^n\, dx = \frac{a^n}{\ln a} + c, \qquad (a > 0; a \neq 1)$

4. $\int e^x\, dx = e^x + c$

5. $\int \cos x\; dx = \sin x + c$

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -arcosx + c$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\, arctg + \mathrm{c}$

9. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c, \quad (a \neq 0)$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c, \quad (a \neq 0)$

Deməli, qeyri-müəyyən inteqral $y = F(x) + c$ funksiyaları ailəsindən ibarətdir.

8.3. Qeyri-müəyyən inteqralın xassələri

Xassə 1: Qeyri-müəyyən inteqralın törəməsi inteqralaltı funksiyaya diferensialı isə inteqralaltı ifadəyə bərabərdir.

$(\int f(x)dx)' = f(x)$

$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

Xassə 2: Funksiyanın diferensialının qeyri-müəyyən inteqralı funksiyanın özündən sabit toplanan qədər fərqlidir.

$\int df(x)dx = f(x) + c$ (buradakı $f(x)$ funksiyası kəsilməzdir)

Xassə 3: Sıfırdan fərqli sabit vuruğu qeyri-müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxmaq olar.

$\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$ (burada c – sabit vuruqdur)

Xassə 4: İki və ya bir neçə funksiyanın cəminin qeyri-müəyyən inteqralı onların inteqrallarının cəminə bərabərdir

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx$$

Qeyri-müəyyən inteqralın hesablanmasına aid misal həlli

1) $\int \sqrt{x-1}\, dx = \int (x-1)^{\frac{1}{2}}\, d(x-1) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c =$

$= \frac{2}{3}\sqrt[3]{(x-1)^2} + c$

2) $\int \sqrt{3x+2}\, dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^{\frac{1}{2}}\, d(3x+2) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(3x+2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+2)^3} + c$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+5}} = \int \frac{dx}{(2x+5)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{\frac{-1}{3}}\, d(2x+5) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(2x+5)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x+5)^2} + c$

4) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 3\sqrt{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{-2}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}}\right)dx = 3x^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} =$

$= 3x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + c$

5) $\int \frac{dx}{x^2+12x+27} = \int \frac{dx}{(x+6)^2-9}$

$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2-a^2}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2a}}\, ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ *olduğundan*

6) $\int \frac{dx}{(x+6)^2-9} = \int \frac{d(x+6)}{(x+6)^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3} \ln \left|\frac{x+6-3}{x+6+3}\right| = \frac{1}{6} \ln \left|\frac{x+3}{x+9}\right| + c$

7) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^2} = \int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2(\mathrm{x}^2+1)} = \int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2} - \int \frac{dx}{\mathrm{x}^2+1} = -\frac{1}{x} - arctgx + c$

8) $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c$

9) $\int \frac{xdx}{\mathrm{x}^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\mathrm{x}^2+1)}{\mathrm{x}^2+1} = \frac{1}{2} \ln|\mathrm{x}^2 + 1| + c$

10) $\int \cos x \cdot \sin^2 x\, dx = \int \sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + c$

11) $\int -x\, e^{x^2} dx = -\frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = -\frac{1}{2}\, e^{x^2} + c$

12) $\int \frac{dx}{x^2+6x+5} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-4} = \frac{1}{2\cdot 2} \ln \left|\frac{x+3-2}{x+3+2}\right| = \frac{1}{4} \ln \left|\frac{x+1}{x+5}\right| + c$

8.4. Qeyri-müəyyən inteqralda hissə-hissə inteqrallanma üsulu

$$\int UdV = \mathrm{UV} - \int VdU$$

Misal 11. $\int x \cos x dx = \mathrm{UV} - \int VdU$ burada,

$$x = U\, ; \quad cos\, xdx = dV$$

$$du = dx\, , \quad V = sinx \text{ onda}$$

$\int Udu = x \cdot \sin x - \int \sin x\, dx = x \cdot \sin x + cosx + C$

8.5. Qeyri-müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi üsulu

$$\int \boldsymbol{f(x)dx} = \int \boldsymbol{f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt}$$

Misal: $\int (x^2+x)^3 \cdot (2x+1)dx$

$\boldsymbol{x^2+x} = \boldsymbol{U}$ əvəz etsək, onda $\boldsymbol{2x+1} = \boldsymbol{du}$ olar.

$(x^2+x)' = 2x+1$ olduğu üçün.

Onda

$\int U^3 \cdot du = \frac{U^4}{4} + C$ deməli,

$\int (x^2+x)^3 \cdot (2x+1)dx = \frac{(x^2+x)^4}{4} + C$ olar.

Ev tapşırığı 14: Aşağıda verilmiş qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın:

1. $\int 5x^3\, dx$; *cavab:* $\frac{5}{4}x^4 + c$

2. $\int (2x^3+3x-6)\, dx$; *cavab:* $\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$

3. $\int \frac{5}{x+3}\, dx$; *cavab:* $5\ln|x+3| + c$

4. $\int \frac{4x^2-5x+3}{x}\, dx$; *cavab:* $2x^2 - 5x + 3\ln|x| + c$

5. $\int 2^{x+4}\, dx$; *cavab:* $\frac{2^{x+4}}{\ln 2} + c$

6. $\int 5^x \, dx$; *cavab:* $\frac{5^x}{ln5} + c$

7. $\int e^{2x-3} \, dx$; *cavab:* $\frac{1}{2} e^{2x-3} + c$;

8. $\int (3x^3 - \sin 5x) \, dx$; *cavab:* $\frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{5} \cos 5x + c$;

9. $\int (x+3)(x-2) \, dx$; *cavab:* $\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 6x + c$

10. $\int (-5x^5 + 3x) \, dx$; *cavab:* $-\frac{5}{6} x^6 + \frac{3}{2} x^2 + c$

IX FƏSİL. MÜƏYYƏN İNTEQRAL VƏ ONUN TƏTBİQİ

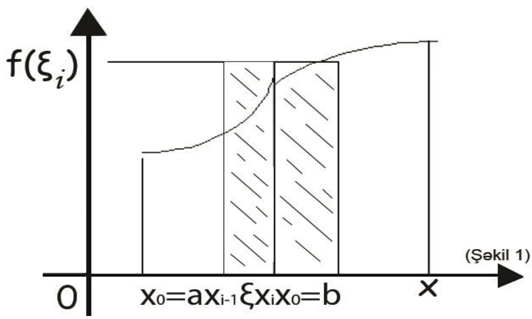
9.1. Müəyyən inteqralın tərifi

Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası [a,b] , a $< b$ parçasını hər hansı qayda ilə n hissəyə bölür:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

hər bir [x_{i-1}, x_i] parçasında ixtiyari ξ_i nöqtəsi götürək:

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \; ; \qquad 0 \leq i \leq n$$



Aşağıdakı kimi bir cəm düzəldək:

$$\sigma = \mathrm{f}(\xi_i)\Delta \boldsymbol{x_1} + \mathrm{f}(\xi_i)\Delta \boldsymbol{x_2} + \cdots \boldsymbol{f}(\xi_i)\Delta \boldsymbol{x_n} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathrm{f}(\xi_i)\Delta \boldsymbol{x_1}$$

Bu cəmə $y = f(x)$ funksiyasının [a,b] parçasında inteqral cəmi deyilir.

σ kəmiyyətinin həndəsi mənası (şəkil 1)-də verilib.

Tərif 1: σ inteqral cəminin $\lambda \to 0$ şərtində sonlu limiti varsa, bu limitə y = f(x) funksiyasının [a,b] parçasında müəyyən inteqralı deyilir.

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

f(x) funksiyasının $[a, b]$ parçasında müəyyən inteqralı

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad (1)$$

kimi yazılır.

Burada a və b uyğun olaraq inteqrallamanın aşağı və yuxarı sərhədləri, x-ə isə inteqrallanma dəyişənidir.

Teorem 1. $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda onun həmin parçada müəyyən inteqralı var.

Teorem 2. $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş mühdud funksiyadırsa və həmin parçada sonlu sayda kəsilmə çöqtəsi varsa, həmin funksiyanın $[a, b]$ parçasında müəyyən inteqralı var.

Teorem 3. $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında monotondursa, onda həmin parçada funksiyanın müəyyən inteqralı var.

9.2. Müəyyən inteqralın xassələri

Fərz edək ki, baxılan bütün funksiyalar uyğun parcada inteqrallanandır.

1. Müəyyən inteqralın qiyməti inteqrallama dəyişənindən asılı deyil,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

2. Müəyyən inteqralda inteqrallama sərhədləri eyni olarsa inteqral 0-a bərabərdir.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. İnteqrallama sərhədlərinin yerini dəyişdikdə inteqral işarəsini dəyişir.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. İxtiyari a, b, c ədədləri üçün $f(x)$ funksiyası $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ doğrudur.}$$

5. Sabit vurğu müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \quad (A = const)$$

6. Sonlu sayda funksiyaların cəbri cəminin müəyyən inteqralı, həmin funksiyaların baxılan parçada müəyyən inteqralının uyğun cəbri cəminə bərabərdir.

$$\int_a^b (f(x) + \varphi(x) - g(x))\, d(x) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b g(x)d$$

7. Tək funksiyanın sıfra nəzarən simmetrik parça üzrə inteqralı sıfıra bərabərdir. Yəni, $f(x)$ funksiyası tək funksiya

olarsa onda,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0 \text{ olar}$$

8. $f(x)$ funksiyası cüt funksiya olarsa isə onda,

$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$ olar.

9.3. Nyuton-Leybnis düsturu

Əgər, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$parçasında kəsilməz və F(x) funksiyası isə $f(x)$-in [a,b] parçasında ibtidai funksiyasıdırsa onda,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

düsturu doğrudur. **(2)** düsturuna **Nyuton-Leybnis düsturu deyilir**.

Misal 1: $\int_{0}^{1} (3x^2+4x+1)\, dx$ inteqralını hesablayaq:

Həlli:

$\int_{0}^{1} (3x^2+4x+1)\, dx = (x^3+2x^2 + x)\Big|_{0}^{1} =$

$= 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 - 0 = 4$

9.4. Müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi üsulu

Teorem: Fərz edək ki,

1) *f(x)* funksiyası $[a, b]$parçasında kəsilməzdir.

2) $\varphi(t)$ funksiyası $[\alpha, \beta]$ parçasında diferensiallanan-dır, belə ki,

$\varphi(t)$ funksiyası $[\alpha, \beta]$ parçasında kəsilməzdir və $\varphi(t)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu $[a, b]$ parçasıdır.

3) $\varphi(a) = a$, $\varphi(b)$ = b . onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\varphi'(t)dt$$ düsturu doğrudur.

Bu düstura müəyyən inteqralda **dəyişənin əvəz olunması** düsturu deyilir.

Misal 2: $\int_2^3 \frac{4x\,dx}{x^2-1}$ inteqralını hesablayaq:

Həlli:

$x^2 - 1$= t əvəzləməsi edək. Onda $2xdx = dt$ olur.

Yeni inteqralın sərhədlərini tapaq.

x=2 üçün *t=3,* *x=3* üçün isə *t=8* alınır. $x = \sqrt{t+1}$ funksiyası [3, 8] parçasında kəsilməzdir. Yeni alınan funksiya da kəsilməzdir. Onda (3) düsturunu tətbiq etsək

$$\int_2^3 \frac{4x\,dx}{x^2-1} = \mathbf{2}\int_2^3 \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \mathbf{2}\int_{\mathbf{3}}^{\mathbf{8}} \frac{dt}{\boldsymbol{t}} =$$

$= \mathbf{2}\ln t\ \Big|_3^8 = 2(\ln 8 - \ln 3) = 2\ln\frac{8}{3}$ olar

9.5. Müəyyən inteqralda hissə-hissə inteqrallama düsturu

Teorem: Fərz edək ki, *u(x)* və *v(x)* funksiyalarının $[a, b]$ parçasında kəsilməz törəmələri vardır. Onda

$$\int_a^b udv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (4)$$

düsturu doğrudur. Bu düstur müəyyən inteqralda **hissə-hissə inteqrallama** düsturudur**.**

Misal 3: $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ inteqralını hesablayaq:

Həlli.

u= *x*; *du* = *dx*; $\sin x\, dx = dv \;\; \leftrightarrow \;\; v = -\cos x$.

Bunları (4) düsturunda nəzərə alsaq,

$\int_0^{\pi} \sin xdx = -\int_0^{\pi} xd(\cos x) = -x\cos x\,\Big|_0^{\pi} +$
$+\int_0^{\pi} \cos\, xdx = \pi$

olar

Müəyyən inteqralların hesablanmasına aid misalların izahlı həlli

1. $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} (\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{1})\boldsymbol{dx}$ =*10* və a + b = 2 olduğunu bilərək $b-a$

fərqini hesablayaq.

$$\int_a^b (4x+1)\,dx = (2x^2+x)\Big|_a^b = 2b^2 + b - 2\,\boldsymbol{a^2} - a = 10$$

a = 2− b olduğundan $2b^2 + b - 2\,(\mathbf{2} - \boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} + \boldsymbol{b} = 10$

$$10b - 10 = 10$$

$$b = 2$$

$$a = 2 - b = 0$$

2. $\boldsymbol{a}$-nın hansı qiymətində $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} (\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{dx} = 20$ bərabərliyi doğrudur?

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} (\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{dx} = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}} - ax)\Big|_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} = 16 - 2a = 20 \quad \rightarrow a = -2$$

buradan alarıq ki, a $= -2$ qiymətində bərabərlik doğrudur.

3. $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} (\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4})\,\boldsymbol{dx}$ inteqralını hesablayaq:

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} (\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4})\,\boldsymbol{dx} = \left(\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} + \mathbf{4}\boldsymbol{x}\right)\Big|_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + 4 - 0 = 4\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

4. $\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} (\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3})\,\boldsymbol{dx}$ inteqralını hesablayaq:

$$\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} (\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3})\,\boldsymbol{dx} = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x})\Big|_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} = 8 - \mathbf{6} - \mathbf{1} + \mathbf{3} = 4$$

5. $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{x}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}\,\boldsymbol{dx}$ inteqralını hesablayaq:

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{x}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}\,\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{x}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}}\Big|_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\,\boldsymbol{x}^{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}\Big|_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

6. $\int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}} \boldsymbol{\sin 2x}\;\boldsymbol{dx}$ inteqralını hesablayaq:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \ dx = -\frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}$$

7. $\int_2^5 \frac{2\,dx}{3x^2}$ inteqralını hesablayaq:

$$\int_2^5 \frac{2\,dx}{3x^2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} \Big|_2^5 = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{5}$$

8. $\int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 1)dx$ inteqralını hesablayaq:

$$\int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 1)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 1 -$$

$$-0 = -\frac{1}{12}$$

9. $\int_0^2 \sqrt[5]{x}\ dx$ inteqralını hesablayaq:

$$\int_0^2 \sqrt[5]{x}\ dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} \Big|_0^2 = \frac{5}{6}\, x^{\frac{6}{5}} \Big|_0^2 = \frac{5}{6} \cdot 2^{\frac{6}{5}} =$$

$$= \frac{5}{6}\sqrt[5]{2^6} = \frac{5}{3}\sqrt[5]{2}$$

10. $\int_0^1 \sqrt[3]{x+1}\ dx$ inteqralını hesablayaq:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x+1}\ dx = \int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{3}}\ d(x+1) = \frac{(x+1)^{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}} \Big|_0^1 ==$$

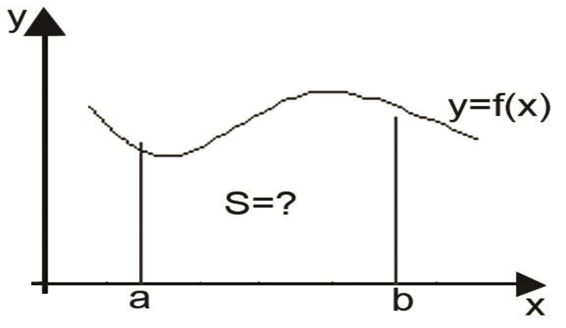
$$\frac{3}{4}\,(x+1)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}\,(2^{\frac{4}{3}} - 1) = \frac{3}{4}\,(2\sqrt[3]{2} - 1)$$

9.6. Müəyyən inteqralın tətbiqi. Müstəvi fiqurun sahəsinin hesablanması

Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir.

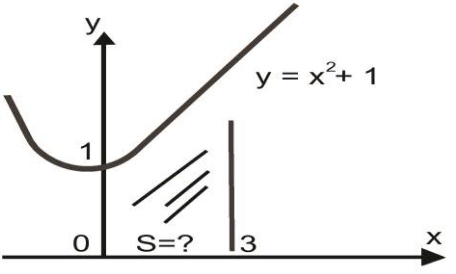
Onda $x = a;\ x = b$ duz xətləri və absis oxu ilə hüdudlanmış müstəvi fiqurun sahəsi

S = $\int_a^b f(x)\,dx$ düsturu ilə hesablanır



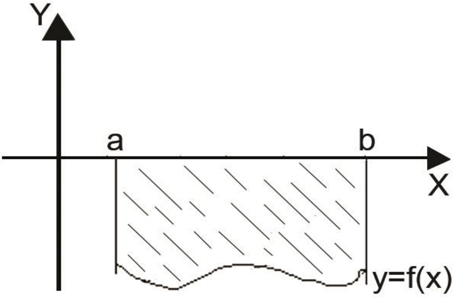
Əgər, $y = f(x)$ və y = g(x) əyriləri və $x = a;\ \ x = b$ duz xətləri ilə hüdudlanan müstəvi fiqurun sahəsi soruşularsa onda sahə S = $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ düsturu ilə hesablanır.

Misal 1. $f(x) = x^2 + 1$ əyrisi ilə $x = 0;\ \ x = 3$ düz xətlərinin hüdüdlanmış müstəvi fiqurun sahəsini tapaq:



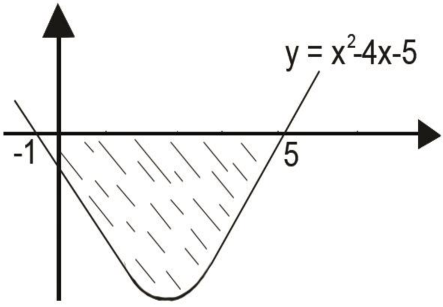
$$S = \int_o^3 (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^3 = (9 + 3) - (0) = 12$$

Əgər, qrafikdə hüdudlanan sahə aşağıdakı şəkildə verilərsə (mənfi hissədə)



onda sahə **S =** $-\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$ düsturu ilə hesablanır.

Misal 2. Verilən: $y = x^2 - 4x - 5$, $x = -1$, $x = 5$ hüdudlanan sahəni tapaq:



$$\mathbf{S} = -\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x)}\, \boldsymbol{dx} = -\int_{-1}^{5} (x^2 - 4x - 5)\, \boldsymbol{dx} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x \Big|_{-1}^{5} = -36$$

İnteqral işarəsinin qarşısında mənfi işarəsi olduğu üçün

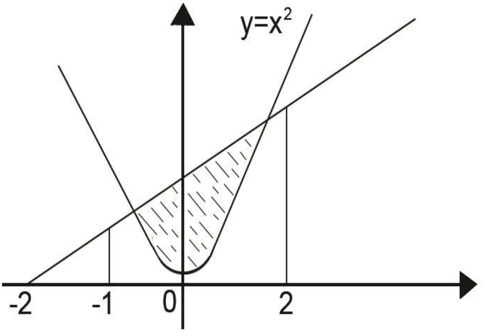
$$\mathbf{S} = -(-36) = 36$$

olar.

Sahənin hesablanmasına aid misalların həlli

Misal 3. $y = x + 2$ və $y = x^2$ qrafiklərinin kəsişməsindən alınan sahəni tapaq:

Həlli:



$$S = \int_{-1}^{2}(x+2)\,dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx = \int_{-1}^{2}(x+2-\ x^2)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = (2+4-\frac{8}{3}-) - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}) = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Misal 4: $f(x) = x^2 - x$ və $f(x) = -x^2 + 5$ -nın qrafiklərinin kəsişməsindən alınan sahəni tapaq:

Həlli:

İlk öncə, inteqralın sərhədlərini tapaq: yəni,

$-x^2 + 5x = x^2 - x$ tənliyini həll edək.

$-2x^2 + 6x = 0$

$x\ (x + 3) = 0;$

$x = 0, \quad x = 3$

İnteqralın sərhədləri məlum oldu. (0 və 3)

$$S = \int_{0}^{3}(-2x^2 + 6x)dx = -\ 2\frac{x^3}{3} + 3x^2\Big|_{0}^{3} =$$

$= -18 + 27 - 0 = 9$

Ev tapşırığı 15: Verilmiş şərtlərə uyğun hüdudlanan sahəni hesablayın:

1. $f(x) = -x^2 + 4x$ və $x = 0$; $x = 2$;
   cavab: $\frac{16}{3}$
2. $y = x^2 - 4x + 5$ və $x = -1$, $x = 3$
   cavab: $13\frac{1}{3}$
3. $y = 2x + 3$ və $y = x^2$;

   cavab: $\frac{32}{3}$
4. $f(x) = x^2 - 2x$ və $f(x) = -x^2 + 4x$;

   cavab: 9
5. $y = x^2 - 2x + 3$; $x = -1$; $x = 2$

   cavab : 9
6. $y = x^2 - x$ və $y = -x^2 + 3x$;
   cavab: $\frac{8}{3}$
7. $y = 9x^2 - 4$ və $y = x^2 + 8x + 12$;
   cavab: 12

8. $y = 5 - x^2$ və $y = x + 3$;

cavab: $4\frac{1}{2}$

9. $y = 1 - x^2$ və $y = x^2 - 1$;

cavab: $\frac{8}{3}$

10. $y = x^2 - 4x - 5$, $x = -1$, $x = 3$;

cavab: $26\frac{2}{3}$

ƏDƏBİYYAT

1. Orucov R.Ü. Qeyri-müəyyən inteqral. Dərs vəsaiti-2016.
2. Əliyev Ə.B., Hüseynov A. Riyaziyyat-2005.
3. Vəliyeva Ş.M., Kələntərli N.M., Mirzəyeva B.D., Mirsəlimova G.M. “Ali Riyaziyyat və riyazi statistika” Dərs vəsaiti. 2014.
4. Qasımov V.Ə. “Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi” dərslik: 2012.
5. Abiyev A.Q., Əbiyev T.Q., Ağayeva M.S., Əliyeva E.M. “Ali Riyaziyyat” Dərs vəsaiti, 2011.
6. Cəbrayılov M.S. “Birdəyişənli funksiyanın diferensial hesabı”: dərs vəsaiti-2010
7. Mehdiyev M.F. “Xətti cəbrin əsas elementləri” dərs vəsaiti. 2013.
8. Nurəddinoğlu C., Pirməmmədov İ. “Ali riyaziyyat kursu üzrə məsələ və misallar” dərs vəsaiti, 2010.
9. Məmmədov R.H. “Ali riyaziyyat kursu II”, 2005.
10. Андронов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика, 2004.
11. Кремер Н.С. Теории вероятностей и математическая статистика, Москва, 2006.
12. Əliyev A.Y. “Riyazi analizin təqribi hesablama üsulları” (metodik vəsait) 1993.
13. Süleymanov C.N., Süleymanov S.E., Məstəliyev V.Y. “Riyazi analiz kursuna giriş” dərs vəsaiti, 2010.
14. Həşimov H.M. “Çoxluqlar, münasibətlər və kompleks ədədlər” Metodik vəsait, 1998.
15. Həşimov H.M. “Çoxluqlar, münasibətlər və kompleks ədədlər” Metodik vəsait, 1998.

MÜNDƏRİCAT

N.M.Kələntərli, Ş.M.Vəliyeva, A.N.Əhmədova

RİYAZİYYAT

Dərslik

Bakı - “Müəllim” nəşriyyatı - 2024

Nəşriyyatın direktoru: Ş.M.Şəfizadə

Texniki redaktor: S.Q.Mamoyeva

“Müəllim” nəşriyyatında çap olunmuşdur.
Tel.: (+99470) 213 10 61
(+99410) 213 10 61
E-mail: muallim.mmc@gmail.com

Çapa imzalanmışdır: 23.01.2024. Sifariş: 114
Kağız formatı: $60\times84^{1/16}$. Şərti ç.v.: 8. Sayı: 100