STATİSTİK TƏHLİLƏ GİRİŞ

Nailə Kələntərli

Azərbaycan Respublikasi Təhsil Nazirliyi
Azərbaycan Respublikasının Gənclər və İdman Nazirliyi
Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyası

Nailə Kələntərli

STATİSTİK TƏHLİLƏ GİRİŞ

(ADBTİA – nın tələbələri üçün dərslik)

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin 16.05.2022-ci il tarixli F-268 №-li əmri ilə təsdiq edilmişdir.

BAKI-2022

Rəyçilər: *Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru*
Zaman Vahab oğlu Səfərov,
AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu, Riyazi analiz şöbəsinin aparıcı elmi işçisi,

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
Telman Qulam oğlu Əbiyev
Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasının "İdman menecmenti və kommunikasiya" kafedrasının dosenti, Əməkdar müəllim

Nailə M.Kələntərli. Statistik təhlilə giriş (ADBTİA – nın tələbələri üçün dərslik). Bakı: "Müəllim" nəşriyyatı – 2022, 146 səh.

Dərslik statistik təhlilə giriş ilə bağlı olan əsas anlayışları, onların elementlərini, elmi – tətdiqat işlərini yerinə yetirmək üçün lazımi üsul və göstərişləri özündə əks etdirir. Vəsait "İdman menecmenti və kommunikasiya" ixtisası üzrə bakalavr pilləsində təhsil alan tələbələr, idman mütəxəssisləri və menecerləri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

ISBN: 978-9952-435-36-9

Ön söz

“Statistik təhlilə giriş” dərsliyin **birinci** fəslində statistik baxımından ehtimalın təyini, kombinatorikanın əsas düsturlar, elementar nəticələr fəzası, diskret elementar hadisələr fəzasında ehtimal, təsadüfi və determinik hadisə və ehtimalın klassik tərifi haqqında məlumat verilmişdir.

Hadəsələr üzərində əməllər və ehtimalın hesablanması, hadisələrin birləşməsi, hasili və fərqi, əks hadisə, uzlaşmayan hadisələr, hiperhəndəsi paylanma, həndəsi ehtimal, şərti ehtimal, asılı olmayan hadisələr, tam ehtimal düsturu dərslikdə əks olunmuşdur.

İkinci fəsildə ümumi riyazi - statistik anlayışlar, statistika haqqında ümumi anlayış, statistikanın ümumi nəzəriyyəsivə predmeti, riyazi statistikanin predmeti və idman problemlərinin həllində rolu, statistik göstəricilər, analitik statistika və statistik tədqiqatların əsas mərhələsi mövzuları genış şəkildə əhatə edilmişdir.

Təsadüfi kəmiyyətlər, təsadüfi kəmiyyət anlayışı,diskret təsadüfi kəmiyyət, diskret təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları, standart diskret paylanmalar kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər, kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları **üçüncü fəsildə**, empirik paylanmalar, təcrübi göstəricilərin cədvəl şəklində təsviri, variasiya sıraları, orta ölçülər üsulu vasitəsilə tipli misalların həlli, təcrübi göstəricilərin həndəsi təsviri, kəsilməz dəyişən əlamətlərin paylanmasının qrafiki təsviri – histoqram, mütləq (nisbi) tezliklər cəminin poliqonu – kumulyativ əyri, həndəsi təsvirlərin praktiki əhəmiyyəti dərslikdə öz əksini tapmışdır.

Seçmənin ədədi xarakteristikaları, yerləşmə xarakteristikalarını, statistik göstəricilərin orta qiyməti, qruplaşdırılmış göstəricilər üçün orta qiymət, statistik median, qruplaşdırılmış göstəricilər üçün median, seçmə moda, qruplaşdırılmış göstəricilərin modası, və səpələnmə xarakteristikaları, paylanmanın genişliyi, statistik dispersiya, qruplaşdırılmış göstəricilər üçün dispersiya, orta kvadratik paylanma (meyl) və variasiya əmsalının əsas mahiyəti geniş şəkildə şərh edilmişdir.

Baş parametrlərin qiymətləndirilməsi, baş yiğım və seçmə, nöqtəvi qiymətləndirmə, statistik nəticələr nəzəriyyəsinin üsulları, statistik xəta, orta qiymətin standart xətası, baş yığım və seçmənin həcminin standart xətaya təsiri **dördüncü** fəsildə əhatəli şəkildə göstərilmışdir. Interval qiymətləndirilməsi, interval qiymətləndirilməsinin mahiyyəti, inam ehtimalları, etibarlı interval, etibarlıq əmsalı, kvantil anlayışı, normal paylanmış baş yığımın riyazi gözləməsi üçün etibarlı intervalın qurulması, dispersiya və variasiya əmsalı üçün etibarlı intervalın qurulması mövzuları dərslikdə verilmişdir. Vəsaitin **beşinci** fəslində hipotezlərin yoxlanilması, əhəmiyyət kriteriyalari, əsas anlayişlar, statistik kriteriya, statistik hipotez,sıfır hipotezi, alternativ hipotez, əhəmiyyət səviyyəsi, etibarlı ehtimal, hipotezlərin yoxlanılmasının əsas mahiyyəti, statistik əhəmiyyət dərəcələrinin təyini və hipotezərin yoxlanılması sxemi haqında geniş məlumat verilib.

Hipotezlərin yoxlanılmasının parametrik və qeyri- parametrik üsulları, statistik əhəmiyyət kriteriyaları və onların təsnifatı, Styudent və Fişer kriteriyaları dərslikdə əks olunmuşdur. Korrelyasiya analizi, ölçmə nəticələrinin qarşılıqlı əlaqələri, statistik asılıq və korrelyasiya asılılığı, korrelyasiya modeli və korrelyasiya analizi, qarşılıqlı əlaqənin sıxlıq dərəcəsinin təyini, xətti və ranqlı korrelyasiya əmsalı, Brave-Pirson düsturu, korrelyasiya sahəsi, qarşılıqlı əlaqənin istiqaməti, spirmenin ranqlı korrelyasiya əmsalı, qeyri-xətti korrelyasiya əmsalı, qeyri-xətti korrelyasiyanın təyini, şərti orta qiymət, korelyasiya nisbətinin hesablanması, çoxölçülü korelyasiya anlayışı, korrelyasiya əmsalının etibarlığının yoxlanılması, korrelyasiya əmsalı üçün etibarlı intervalın qurulması, qarşılıqlı əlaqə əmsalının qiymətləndirilməsi, seçmə korelyasiya əmsalının statistik əhəmiyyət dərəcəsinin təyini mövzuları dərs vəsaitin **altıncı** fəslində ətraflı şəkildə şərh edilmişdir.

Dərsliyin **yeddinci fəslində** reqresiya modeli, əsas anlayişlar, reqresiya analizi, reqressor və kriterial, nəticə və faktor əlaməti, reqresiya modellərinin qurulması (xətti, qüvvət, üstlü,hiperbolik və s.), reqresiya tənliyinin parametrlərinin qiymətləndirilməsi, xətti reqresiya modeli, həqiqi və empirik reqresiya tənlikləri, ən kiçik kvadratlar üsulu ilə xətti reqresiya tənliyinin parametlərinin təyini, qeyri-xətti empirik düsturların əmsallarının təyin olunması, çoxölçülü reqresiya modeli, reqresiya əmsalının etibarlığının yoxlanılması, proqnozlaşdırmanın standart xətası, seçmə reqresiya əmsalının xətası, styudent kriteriyası vasitəsilə reqresiya əmsalının statistik əhəmiyyət dərəcəsinin təyini məlumatları öz əksini tapmışdır.

Dispersiya Analizinin əsas anlayışları, birfaкtorlu dispersiya analizi, qruplararası və qrupdaxili variasiyalar, göctəricilərin кorrelyasiyasinda dispersiya analizi haqqında əsas məlumatlar vəsaitin sonuncu **fəslində** verilmişdir.

"Statistik təhlilə giriş" dərsliyin mövzuları Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasının"İdman menecmenti və kommunikasiya" ixtisası üzrə bakalavr pilləsinin fənn proqramında nəzərdə tutulan mövzuları tam əhatə etmişdir. Dərslik idman mütəxəssisləri və menecerləri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

FƏSİL I
STATİSTİK BAXIMINDAN EHTİMALIN TƏYİNİ

1.1. Kombinatorikanın əsas düsturları

Bir sıra məsələlərin həlli üçün sonlu sayda elementlərdən müxtəlif qruplar düzəltmək lazım gəlir. Sonlu sayda elementlər üzərində aparılan belə əməliyyatlardan bəhs edən bölmə birləşmələr nəzəriyyəsi (və ya **kombinatorika)** adlanır. Birləşmələrin üç növü vardır: permutasyon, aranjeman və kombinezon [5].

Teorem1. Tutaq ki, A çoxluğu k sayda elementdən ibarətdir, B çoxluğu isə m sayda elementdən ibarətdir.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\},\ B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

Onda birinci elementi A -dan, II elementi B -dən götürməklə $(k \cdot m)$ sayda (ai, bj) cütü əmələ gətirmək olar.

Məsələn, 2 ədəd zəri atarkən 6 · 6 = 36 sayda müxtəlif nəticələr əldə edilə bilər.

Qutu və kürəciklər modeli

Fərz edək ki, qutuda n sayda kürəcik var. k sayda kürəcik çıxarılan zaman mövcud ola biləcək, müxtəlif variantların sayını müəyyən edək.

Ardıcıllığı nəzərə almaqla, qaytarmamaq şərti ilə seçmə.

Teorem 2. n elementdən k elementin seçilməsi zamanı seçimlərin ümumi sayı aşağıdakı düsturdan təyin olunar.

$$A_n^k = \big(n(-1)(n-2) \dots \dots \dots (n-k+1)\big) =$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

(***A*-ranjeman**)

Məsələn, 10 rəqəmdən (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) ixtiyarı 2 rəqəmin seçilməsi zamanı, əmələ gələcək 2 rəqəmli ədədlərin ümumi sayı:

$$A_n^k = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90.$$

Nəticə: Çoxluqda n element var. Onda bu elementlərin yerdəyişmələrinin ümumi sayı:

$$A_n^n = P_n \ = n!$$

(P-permutasiyon)

Məsələn, əgər 7 idmançının çıxış ardıcıllığı püşkətma yolu ilə təyin olunarsa, onda püşk atmanın bütün mümkün variantlarının sayı:

$$P_n \ = 7! = 5040$$

Teorem 3. Ardıcıllığı nəzərə almadan və qaytarmamaq şərtiylə seçmə aparılarsa, onda seçimlərin ümumi sayı: $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Məsələn, tutaq ki, yarışda 16 nəfər iştirak edir və bütün iştirakçılar cüt-cüt görüşməlidirlər. Onda görüşmələrin ümumi sayı,

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!\cdot 14!} = \frac{A_{16}^2}{2!} = \frac{16\cdot 15}{2} = 120.$$

Teorem 4. Ardıcıllığı nəzərə almaqla və qaytarmaq şərti ilə ümumi seçimlərin sayı:

$$n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k}$$

Məsələn, 2 poçtalyon 10 məktubu 10 ünvana neçə üsulla çatdıra bilər?

$$n^k = 2^{10} = 1024$$

Teorem 5. Ardıcıllığı nəzərə almadan və qaytarmamaq şərti ilə ümumi seçimlərin sayı:

$$C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

1.2. Elementar nəticələr fəzası

Tərif 1. Verilmiş təcrübi sınağın bütün mümkün nəticələrini özündə saxlayan çoxluğa elementar nəticələr (hadisələr) fəzası (Ω) deyilir. Fərz olunur ki, sınaqda onlardan yalnız biri baş tutur.

Bu çoxluğun elementləri elementar hadisə (ω) adlanır. Sınaq və ya təcrübəninin hər bir ayrılmayan hadisəsinə elementar hadisə deyilir.

Tərif 2. Elementar nəticələr fəzasının hər bir alt- çoxluğuna hadisə deyilir:

$$A \subseteq \Omega$$

Əgər mürəkkəb A hadisəsini təşkil edən elementar hadisələrdən biri baş verərsə, onda deyilər ki, sınaq nəticəsində A hadisəsi baş verdi.

Misal 1. Zər 1 dəfə atılır:

Onda

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Tək rəqəmlərin düşmə hadisəsi: $\mathrm{A} = \{1,3,5\}$.

Misal 2. 2 zər eyni vaxtda atılır**.**

$$\Omega = \{(i,j),\ \ 1 \le i,j \le 6\}.$$

36 elementar hadisə zərlərdə eyni rəqəmlərin düşmə hadisəsi:

$$\mathrm{A} = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)\}$$

B – düşmə xallar cəminin 6-ya bərabər olmasını ifadə mürəkkəb hadisə olun:

$$\mathrm{B} = \{(1,5); (5,1); (3,3); (2,4); (4,2)\}$$

B – 6 elementar hadisədən ibarətdir.

Tərif 3. Sınaq nəticəsində baş verməyən hadisə mümkün olmayan hadisə adlanır. Yəni heç bir elementar nəticəsi olmayan hadisə

$$\emptyset \subseteq \Omega.$$

1.3. Diskret elementar hadisələr fəzasında ehtimal

Ehtimal – hər hansı hadisənin baş vermə imkanının ədədi ölçüsüdür. Əgər elementar hadisələr fəzası sonlu və ya hesabıdırsa, onda ona diskret elementar hadisələr fəzası deyilir.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Hər bir elementar hadisəyə $0 \le P_i \le 1$ ədədi mənimsədən, beləki,

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} P_i = 1$$

olsun.

P_i elementar nəticəsinin ehtimalı olsun. Onda A hadisəsi təşkil edən elementar hadisələrin ehtimallarının cəmi bu hadisənin ehtimalı adlanacaq

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P_i.$$

1.4. Təsadüfi və determenik hadisə

Ehtimal nəzəriyyəsi təsadüfi sınaqlarda yaranan qanunauyğunluqları öyrənir. Sınaq dedikdə müəyyən şərtlər daxilində hər hansı bir hadisənin müşahidə edilməsi başa düşülür. Nəticəsini qabaqcadan söyləmək mümkün olmayan sınaq təsadüfi adlanır.

Təsadüfi hadisə elə bir faktdır ki, təcrübə və ya sınaq nəticəsində baş verə də bilər, verməyə də bilər. Məsələn: cərimə zərbəsinin vurulması sınaq, topun qapıdan keçməsi isə hadisədir.

Nəticələri əvvəlcədən birqiymətli müəyyən oluna bilən hadisələrə determenik hadisə deyilir. Məsələn, gecənin gündüzü əvəz etməsi, 100°C suyun qaynaması. Təcrübə nəticəsində mütləq baş verə biləcək hadisə mümkün hadisədir (E). Vahid sınaq zamanı A_i hadisələrindən heç olmazsa biri mütləq baş verərsə, onda belə hadisələrə yeganə mümkün hadisə deyilir.

1.5. Ehtimalın klassik tərifi

Əgər sınaq zamanı hər hansı bir hadisənin başqalarına nisbtın daha tez-tez baş verəcəyini hökm etməyə heç bir əsas yoxdursa, onda bellə hadisələrə eyni imkanlı hadisələr deyilir. Fərz edək ki, sonlu n sayda elementdən ibarət elementar hadisələr fəzası mövcuddur:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Bu elementar hadisələr eyni-imkanlı olsun. Onda bunlardan hər birinin ehtimalı

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}.$$

Əgər A hadisəsi k sayda elemntar hadisədən ibarət olarsa,

$$A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}.$$

Onda

$$P(A) = P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_k} = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Əgər elementar hadisələr fəzası sonlu sayda eyni imkanlı elementar hadisələrdən A ibarət olarsa, onda hadisəninin ehtimalı:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}.$$

Tutaq ki, müəyyən şərtlər kompleksini həyata keçirdikdə $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən heç olmazsa, biri mütləq baş verir. Onda

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E; \quad P(E) = 1$$

deyilər ki, bu hadisələr tam qrup əmələ gətirir. İndi fərz edək ki, hər hansı A hadisəsini almaq üçün sınaq keçirmək lazımdır. Bu sınağın nəticəsi ola biləcək eyni imkanlı cüt-cüt uzlaşmayan hadisələr bir tam qrup əmələ gətirir. A-hadisəsi k dəfə baş verərsə, onda k-ya A hadisəsi üçün əlverişli hallar sayı deyilir.

A -hadisəsi üçün əlverişli hallar sayının sınağın nəticəsi ola biləcək bütün mümkün hallar sayına nisbətinə onun ehtimalı deyilir.

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Misal 1. Hamar lövhə üzərinə 2 oyun zəri atılmışdır. Yuxarı üzlərində düşən xallar cəminin 6-ya bərabər olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Mümkün hadisələrin sayı $n = 6 \cdot 6 = 36$. Əlverişli hallar sayı $k = 5$ (5,1); (1,5); (4,2); (2,4); (3,3) $P(A) = \frac{5}{36}$.

Misal 2. 1000 biletdən 500-i uduşludur. Alınmış 2 biletin uduşlu olması hadisəsinin ehtimalını hesablayın.

Həlli: Mümkün hadisələrin say:

$$n = C_{1000}^2 = \frac{1000!}{2!\ 998!}.$$

Əlverişli halla say:

$$k = C_{500}^2 = \frac{500!}{2!\ \ 498!}$$

$$P(A) = \frac{C_{500}^2}{C_{1000}^2}$$

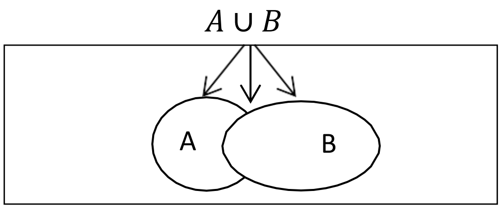
$$k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

1.6. Hadisələrin birləşməsi, hasili və fərqi

1) Bütün nəticələri A və ya B hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan hadisəyə bu hadisələrin birləşməsi deyilir:

$$C = A + B = A \cup B$$

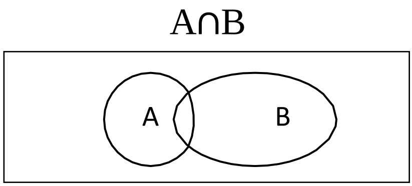
$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Məsələn, $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_6\}$, $A \cup B = \{E_2, E_3, E_4, E_6\}$.

2) A və B hadisələrinin eyni zamanda baş verməsindən ibarət olan hadisəyə buu 2 hadisənin kəsişməsi deyilir.

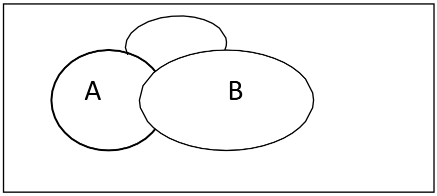
$$C = AB = A \cap B$$



Məsələn, $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_6\}$, $A \cap B = \{E_6\}$.

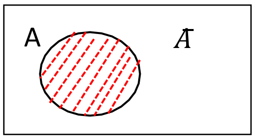
3) A və B hadisələrinin fərqi: $C = A \backslash B$ C- hadisəsi A-ya daxil olan elementar hadisələri, B-yə daxil olmayan elementar hadisələri özündə saxlayır. Yəni A baş verib, B isə baş tutmayıb.

A \ B



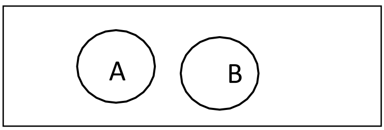
1.7. Əks hadisə. Uzlaşmayan hadisələr

A hadisəsinə daxil olmayan bütün nəticələr çoxluğuna A -nın əksi hadisəsi deyilir: $\bar{A} = \Omega \backslash A$



Eyni zamanda baş verməsi mümkün olmayan hadisələrə uzlaşmayan hadisələr deyilir:

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$$

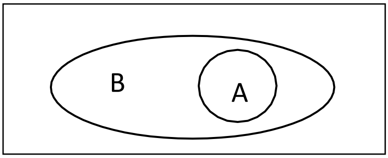


$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \qquad 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Hər bir hadisənin ehtimal diapazonu [0,1] parçasıdır.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri üçün $A_i \cap A_j = \emptyset \ (1 \leq i, j \leq n)$ olarsa, bu hadisələr cüt-cüt uzlaşmayan hadisələr adlanır.

$$A \subseteq B \longrightarrow$$



A hadisəsi B hadisəni doğurur. Yəni, A baş verəndə B baş verir. A -nın hər bir elementar nəticəsi, həm də B-nin elementar nəticəsidir (hadisəsidir).

Məsələn, A - tək rəqəmli xalların düşməsi B - xallar sadə ədədlərdir.

$$A \subseteq B \longrightarrow P(A) \leq P(B).$$

1.8. Hiperhəndəsi paylanma

Fərz edək ki, qutuda cəmi *N* sayda kürəcik var. Onlardan *K* -saydası ağ rəngli, $(N-K)$ saydası isə qara rənglidir. Qutudan bəxtəbəxt n sayda kürəcik çıxarılır. Onlardan $(n-k)$ saydasının qara olma ehtimalını təyin edək:

$$P = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

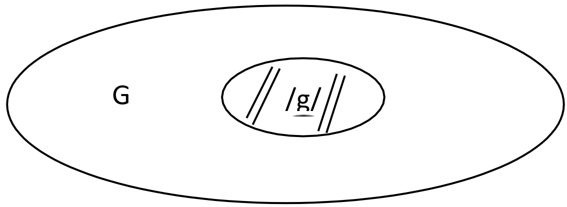
$$(0 \leq k \leq n, \qquad k \leq K, \qquad n-k \leq N-K)$$

Misal.

Yeşikdəki, 100 maşın hissəsindən 10 dənəsi zaydır. Təsadüfən götürülmüş 4 hissədən 3-nün saz (yararlı) olma ehtimalını hesablayaq:

$$P = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^4}.$$

1.9. Həndəsi ehtimal



Tutaq ki, müstəvi üzərində G oblastı və onun daxilində g alt oblastı verilmişdir. G-oblastından təsadüfən götürülmüş ixtiyari bir nöqtənin, həm də g oblasıtına aid olması ehtimalı nəyə bərabərdir?

Bu halda axtarılan ehtimalı g oblastının sahəsinin G - nin sahəsinə nisbəti kimi təyin edirlər

$$P = \frac{S_g}{S_G}$$

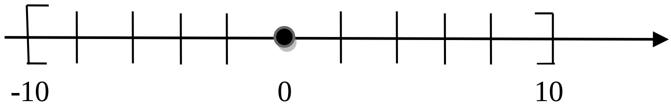
G və g da axtarılan ehtimalı g -nin həcminin G -nin həcminə nisbəti şəklində təyin etmək olar:

$$P = \frac{V_g}{V_G}$$

Xətti halda, $P = \frac{l_g}{l_G}$. Ən ümumi halda, $P = \frac{mes_g}{mes_G}$.

Belə, hesablanan ehtimala həndəsi ehtimal deyilir.

Misal. Ədəd oxu üzərində $[-10,+10]$ parçasında götürülmüş ixtiyari nöqtənin $[-10,0]$ parçasından olması ehtimalı nəyə bərabərdir?



$$G = [-10; 10] \qquad g = [-10; 0]$$

$$mes\ G = 10 - (-10) = 20$$

$$meg\ g = 0 - (-10) = 10$$

$$P = \frac{mesg}{mesG} = \frac{10}{20} = 0{,}5.$$

1.10. Şərti ehtimal

B hadisəsinin baş verməsi şərtiylə A-nın baş vermə ehtimalı aşağıdakı düstur vastisəilə hesablanır:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorem 1. $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$.

Teorem 2. $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot$
$\cdot\, P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1})$

Misal: Qutuda 20 lampadan 6-sı yararsızdır. Təsadüfi qaydada növbə ilə 2 lampa seçilir. Hər 2 lampanın saz olma ehtimalını təyin edək. Birinci seçilən lampanın saz olması hadisəsi – A, ikinci seçilən lampanın saz olması hadisəsi – B.

Onda $P(A) = \frac{14}{20}$, $P(B|A) = \frac{13}{19}$.

Hər 2 lampanın saz olmsı hadisəsi – AB

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{14 \cdot 13}{380} = \frac{91}{190}\ .$$

Asılı olmayan hadisələr.

Tərif: Əgər 2 hadisənin hasili (kəsişmən) üçün

$$P(A \cap B) = P(B)P(B)$$

olarsa, bu hadisələr asılı olmayan hadisələr adlanır.

Tərif: Əgər istənilən $1 \leq k \leq n$ və istənilən $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ indeksləri üçün$P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) = P(A_i) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$ olarsa, onda A_1, A_2,..., A_n hadisələr ardıcılığı asılı olmayan hadisələr adlanır.

Xassə 1. A və B hadisələrinin asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərt

$$P(A|B) = P(A).$$

Xassə 2. Tutaq ki, A və B hadisələri uzlaşmayandır. $P(A \cap B) = 0$ Onda bu hadisələrin asılı olmaması üçün, $P(A) = 0$ və ya $P(B) = 0$ olmalıdır.

Xassə 3. Əgər A və B hadisələri asılı deyilsə, onda $A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$ hadisələri də asılı deyil.

Misal. Qabda 5 ağ, 4 qara və 8 qırmızı kürəcik var. Birinci bəxtəbəxt çıxarılan kürəciyin qara və ya ağ olma ehtimalını təyin edək.

A - ağ şaun çıxma hadisəsi: $P(A) = \frac{5}{17}$

B - qara şaun çıxma hadisəsi: $P(B) = \frac{4}{17}$

A və B uzlaşmayan hadisələrdir: Çünki, bir kürəcik çıxarılır:

$$AB = \emptyset \qquad P(AB) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$

$$= \frac{5}{17} + \frac{4}{17} = \frac{9}{17}.$$

1.11. Tam ehtimal düsturu

Tərif: Cüt-cüt uzlaşmayan sonlu sayda və ya hesabı $H_1, H_2, \dots$ hadisələrinə baxaq:

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n \cup \dots = \Omega$$

$$P(\Omega) = 1$$

Onda bu tam qrup hadisələr adlanır. Tam qrup əmələ gətirən hadisələrə hipotez də deyilir.

Teorem: Əgər H_1, H_2 hadisələri tam qrup əmələ gətirərsə onda istənilən A hadisəsinin ehtimalı

1) $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$
2) $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$

Misal 1. Hədəfə birinci atəş açmaq hüququ qazanmaq məqsədi ilə 2 idmançı püşk atır.

Birinci atıcının hədəfə dəymə ehtimalı: 1, ikinci atıcının hədəfə dəymə ehtimalı: 0,0001. Təcrübə ilə bağlı 2 fərziyə qəbul etmək olar:

$H_1 = \{I\ atıcı\ atəş\ açır\}$

$H_2 = \{II\ atıcı\ atəş\ açır\}$

Hər 2 hipotezin aprior (yəni təcrübəyə qədər ki) ehtimalı eynidir: $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$ Güllənin hədəfə dəymə hadisəsini A ilə işarə edək:

Onda $P(A|H_1) = 1, P(A|H_2) = 0{,}00001.$

Beləliklə, güllənin hədəfə dəymə ehtimalı:

$$P(A) = P(H_i) \cdot P(A|H_1) + P(H_1) = P(H_2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}00001.$$

İndi fərz edək ki, A baş verib, onda təcrübədən sonra H_1, H_2 hipotezlərinin hər birinin ehtimalı:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} \approx 0{,}99999,$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} \approx 0{,}00001.$$

FƏSİL 2
ÜMUMİ RİYAZİ - STATİSTİK ANLAYIŞLAR

2.1. Statistika haqqında ümumi anlayış

Statistika termini latın sözü olan “Sratus”-dan əmələ gəlmişdir ki, hərfi tərcüməsi hadisələrin vəziyyəti deməkdir. Bu sözün kökündə “Stato” (dövlət), “statistika” (dövlət işlərinin bilicisi) və “statistika” (dövlət haqqında müəyyən biliklərin, məlumatların cəmi) sözləri yaranmışdır.

Bu termindən ilk dəfə alman alimi, fəlsəfə və hüquq professoru Qotfrid Axenval (1719-1772) istifadə etmişdir.

O, 1746-cı ildən əvvəlcə Marburq, sonra isə Qettinqen universitetində statistika adlandırdığı yeni fənni tədris etməyə başlamışdır.

Statistikada alman təsviri məktəbinin əsassını qoyan Q.Axenvalın statistika haqqında baxışları müasir baxışlarırdan əhəmiyyətli dərəcədə fəqlənir.O, yeni tədris olunan fənnin məzmununu dövlətlərin siyasi vəziyyətinin və diqqətəlayiq yerlərin təsvir edilməsi hesab edirdi.

İngilis siyasi arifmetika məktəbinin yaradıcısı olan Con (1623-1687) elmi baxışları daha yaxın olmuşdur.

Statistikanın sonrakı inkişafı Belçika statistiki A.Ketlenin (1976-1874) adı ilə bağlıdır. Statistik göstəricilərin sabitliyi nəzəriyyəsinin işlənməsində onun xüsusi xidmətini qeyd etmək lazımdır [4].

Statistikanın inkişafında riyazi istiqamətin nümayəndələri olan F.Qalton (1822-1911), K.Pirson (1857-1936), V.Qosset (1876-1936), R.Fişer (1980-1962), M.Mitçel (1874-1948) və s. kimi alimlərin xüsusi xidmətləri olmuşdur. Beləki, K.Pirson hadisələr arasın-dakı qarşılıqlı əlaqələrin miqdarca qiymətlənidirilməsi nəzəriyyəsinin işlənməsində böyük xidmətə malikdir. Kiçik seçmə nəzəriyyəsi V.Qossetə (“Stydent” ləqəbi ilə yazmışdır) məxsusdur. R.Fişer miqdar təhlili metodlarını inkişaf etdirmişdir. Dispersiya analizi üsulu onun adı ilə bağlıdır.

M.Mitçel isə “iqtisadi barometr” ideyasını irəli sürmüşdür. Bu istiqamətin nümayəndələri tam haqlıolaraq statistikanın əsasını ehtimal nəzəriyyəsi hesab edirlər.

2.2. Statistikanın ümumi nəzəriyyəsi və predmeti

Hazırda statistika termini 3 mənada işlədilir. İlk növbədə statistika dedikdə adamların xüsusi praktiki fəaliyyət sahəsi başa düşülür. Bu fəaliyyət sosial-iqtisadi inkişaf səviyyəsini əks etdirən məlumatların toplanması, işlənməsi və təhlilinə istiqamətlənmişdir.

İkincisi, statistika təcrübəsində istifadə olunan nəzəri fikirlərin və metodların işlənilməsi ilə məşğul olan elm sahəsi statistika adlandırılır. Nəhayət, bəzən müxtəlif hesabatlarda əks etdirilən, dövrü mətbuatda dərc edilən statistik məlumatlar da statistika adlandırılır.

Statistika elmi ilə statistika təcrübəsi arasında sıx əlaqə mövcuddur. İstənilən statistik iş elmi cəhətdən təşkil olumalıdır. Bunsuz düzgün nəticələr əldə etmək olmaz. Ona görə də statistika təcrübəsi də elmə əsaslanmalıdır.

Eyni zamanda statistika elmi özü də təcrübəyə əsaslanır, praktiki iş təcrübəsi ümumiləşdirilir və aparılmış ümumiləşdirmələr əsasında yeni ideyalar irəli sürülür. Öz növbəsində statistik elminin yeni nəzəri nəticələrinin təcrübədə tətbiqi onun inkişafında təkan verir.

Statistikanın predmetini kütləvi sosial-iqtisadi həyat hadisələri təşkil edir. O, müəyyən məkan və zaman şəraitində bu hadisələrin kəmiyyət tərəfini onların keyfiyyət məzmunundan ayrılmaz surətdə öyrənir.

Cəmiyyətin sosial-iqtisadi həyatı müxtəlif növ kütləvi hadisələrdə görünür.

Statistikaeyni zamanda təbii resursları və təbii şəraiti də öyrənir.

Hal-hazırda statistika bir elm kimi müxtəlif sahələrdən ibarətdir:

- statistikanın ümumi nəzəriyyəsi;
- variasiyalı statistika;
- sahə statistikaları (biometriya, ekonometriya, idman metrologiyası və s.)

Hər bir sahə isə aşağıdakı bölmələrdən ibarətdir:

- Təsviri statistika;
- İnduktiv statistika;
- Qarşılıqlı əlaqənin təhlili (korelyasiya);
- Təcrübənin planlaşdırılması;
- Analitik statistika

Statistikanın ümumi nəzəriyyəsi qanunauyğunluq-ların elmi-dərketmə formalarının əsas qaydalar sistemi, obyekt, hadisə və proseslər arasındakı qarşılıqlı əlaqənin aşkar edilməsi üsullarını özündə ehtiva edir.

Böyük miqdada obyekt və hadisələrin tədqiq edilməsi nəticəsində əldə edilən göstəricilərə **statistik göstəricilər** deyilir.

Riyazi statistika - riyaziyyatın, elmi-praktik məqsədlər üçün statistik göstəricilərin toplanması,təhlili üsullarına həsr edilmiş bölməsidir.

Məlumdur ki, statistikanın **əsas tədqiqat obyekti-** vahid göstəriciyə görə bir-birindən fərqənən kütləvi bircins hadisələrdir. Kütləvi proseslərin təhlili üsulları bir sra emi fənlərin predmetini təşkil edir. Yalnız bu təhlilə formal (abstrakt) riyazi model cəlb olunarsa, onda bu üsullar statistik üsullara çevrilir.

Bir çox bölmələrdə riyazi statistika **ehtimal nəzəriyyəsinə** əsaslanır.

Bu da öz növbəsində qarşılıqlı əlaqədə olan faktorların dəqiqlik dərəcəsini və etibarlığını qiymətləndirməyə imkan verir.

Keyfiyyət ümumiliyə malik, bir cins obyektlər üzərində aparılan kütləvi müşahidə və ölçmələ bu sahədə müəyyən qanunauyğunsuzluqların mövcud olduğunu göstərir.

Optimal proseslərin təşkili üçün bu qanunauyğunluqların aşkar edilməsi riyazı statistika üsullarının əsas vəzifəsidir.

Müasir riyazi-statistika aşağıdakı sahələrə bölünür.

-Təsviri statistika;

-Analitik (statistik nəticələr nəzəriyyəsi);

-İnduktiv statistika;

-Variasiyalı statistika

Variasiyalı statistika obyektlər kulliyatının xassələrini öyrənir.

Burada, öyrənilən əlamətin qiyməti obyektdən obyektə dəyişir.

Təsviri statistika-statistik göstəricilərin təsviri üsullarını, onların cədvəl şəklində təqdim olunmasını, paylanmasını və s. əhatə edir. Göstəricilərin qiymətlərinə görə qruplaşdırılması,tədqiqat nəticələrinin paylanmasında mərkəzi tendensiyaların aşkar edilməsi və s. təsviri statistikanın əsas vəzifələrindəndir.

Analitik statistikanın predmeti: Təcrübə nəticəsində alınmış göstəricilərin emalı;
Tətbiqi əhəmiyyət daşıyan nəticələrin ifadə olunması;

İnduktiv statistika-irəli sürülən hipotezlərin (fərzilərin) yoxlanılması zamanı tətbiq olunur.

Hipotez (fərziyyə)- hərhansı bir prosesin, faktik izahı üçün irəli sürülən elmi mühakimədir. Bu mühakimə təcrübədə yoxlanılmalı və nəzəri cəhətdən əsaslandırılmalıdır.

Yalnız bundan sonra, onu etibarlı elmi nəzəriyyə kimi qəbul etmək olar.

Hal-hazırda bir-çox elmi tədqiqat sahələrində riyazi- statistik üsullarından istifadə edilir. Bu üsulalr pedaqogikada, tibbdə, biologiyada, sosiologiyada, psixologiyada, iqtisadiyyatda, bədən tərbiyəsi və idmanda geniş tətbiq olunur.

2.3. Statistik göstəricilər

Analitik statistika Statistika - Kütləvi bircins hadisələrin (proseslərin) külliyatını tədqiq edir. Bu proseslərin əsas xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, onlar birtərəfli kəmiyyət göstəriciləri ilə fərqlənirlər. Məsələn tutaq ki, eyni yaşlı, eynicinsli, eyni dərəcəli və eyni stajlı idmançılar qrupunda maksimal oksigen məsrəfinin (MOM) səviyyəsi ölçülməlidir.

Birinci halda, biz kütləvi söhbət fərdi göstəricidən gedir. Beləki, MOM-nin hərbir qiyməti konkret idmançıya aiddir. Və bu göstəriciyə görə idmançılar bir-birindən fərqlənir.

Böyük miqdarda obyekt və hadisələrin tədqiq edilməsi nəticəsində əldə edilən göstəricilərə **statistik göstəricilər** deyilir.

Statistik göstəricilərin qiymətləndirilməsi statistik tədqiqatların predmetini təşkil edir. Bu məqsədlə xüsusi riyazi statistika üsullarından istifadə edilir.

Analitik statistika (statistik nəticələr nəzəriyyəsi) müasir riyazi statistikanın sahələrindən biridir. Təcrübə nəticəsində alınmış nəticələrin emalı, tətbiqi əhəmiyyət daşıyan nəticələrin ifadə olunması onun əsas predmetini təşkil edir.

2.4. Statistik tədqiqatların əsas mərhələləri

Statistik tədqiqatlar zamanı böyük ədədlər külliyyatı bir-neçə parametrlə əvəz edilir. Bu parametrlər özündə bütün ilkin informasiyanı daşıyır.

Statistik tədqiqatlar 3 əsas mərhələyə bölünür.

1.Statistik müşahidə;

2.Statistik məlumatların qruplaşdrılması;

3.Statistik materialın təhlili;

Böyük obyektlər külliyatından seçilmiş müəyyən obyektlər qrupunun hər hansı əlamətləri (idman nəticəsi, hərəki qabiliyyətlər və s.) üzərində aparılan ölçmələrin nəticələri- bədən tərbiyəsi və idman sahəsində əsas təcrübi göstəricilər hesab olunur.

Giriş obyektlər çoxluğu-**baş yığım,** baş yığımdan götürülmüş müəyyən obyektlərqrupu isə **seçmə** adlanır.

Baş yığımı təşkil edən ayrı-ayrı idmançılar əsas tədqiqat obyektidir. Məsələn, İdman Akademiyasında təhsil alan bütün tələbələri **baş yığım** kimi qəul etsək, onda müəyyən kurs tələbələrini seçmə hesab edə bilərik.

İdman sahəsində aparılan tədqiqatlarda **seçmə** üsulundan istifadə edilir. Yəni, baş yığımdan müəyyən **seçmə** qrup götürülür və bütün tədqiqatlar bu seçmə üzərində aparılır.

Tədqiqatın nəticələri əsasında bütün baş yığımın xüusiyyətləri barədə mühakimə yürüdülür.

Baş yığımı təşkil edən bütün elementlər heç olmasa bir dənə ümumi **əlamətə** malik olmalıdırlar. Bu əlamət (cinsi,yaşı, idman təsnifatı) müxtəlif obyektləri bir-biri ilə müqayisə etməyə, onların təsnifatını verməyə imkan yradır.

Məhz bu ümumi əlamət **statistik yığımın** əsasını təşkil edir. Beləliklə tədqiqat obyektlərinin ümumi əlamətlərinin ölçmə nəticələri **statistik yığımı** əks etdirir.

Seçmə tədqiqatlar nəticəsində əldə edilən **statistik yığıma→ seçmə yığım** deyilir. Verilmiş tədqiqatda əlamətin bütün mümkün qiymətlər çoxluğu **baş statistik yığım** adlanır.

Seçmənin elementlərinin sayı(n) onun **həcmi** adlanır.

Baş yığımın həcmini N hərfi ilə işarə edilir.

Kəmiyyət və keyfiyyət əlamətləri statistik göstərici – öyrənilən xüsusiyyətin kəmiyyətcə qiymətləndirilməsidir.

Statistika- statistik göstəricilərinköməyi ilə öyərənilən hadisələrin həcmini, onların xüsusiyyətlərini, inkişaf qanunauyğunluqlarını və qarşılıqlı əlaqəsini əlaqəsini xarakterizə edir. Bu nöqteyi nəzərdən statistik göstəricilər iki əsas növə ayrılır:

Uçot-qiymətləndirmə göstəriciləri və analitik göstəriciləri

Uçot-qiymətləndiirmə göstəriciləri öyrənilən hadisənin həcmini və ya səviyyəsini əks etdirir. Öyrənilən hadisənin spesifik xüsusiyyətlərindən asılı olaraq **uçot-** qiymətləndirmə göstəriciləri ya onların müəyyən məkanda yayılma həcmini, ya da müəyyən anda əldə olunmuş inkişaf səviyyəsini əks etdirir.

Analitik- göstəricilər statistik informasiyanın təhlili üçün tətbiq edilir və öyrənilən hadisənin inkişaf xüsusiyyətlərini xarakterizə edir. Statistikada analitik göstəricilər kimi nisbi və orta kəmiyyətlər, variasiya əmsalı, dinamika, əlaqə sıxlığı (korelyasiya əmsalı) və başqa göstəricilər tətbiq edilir.

Statistikada əlamət dedikdə öyrənilən hadisəyə xas olan və onu digər hadisələrdən fərqləndirən xassə (xüsusiyyət) başa düşülür. Bəzən statistik göstərici və öyrənilən hadisənin əlaməti anlayışları eyniləşdirilir. Statistik göstəricidə öyrənilən hadisənin kəmiyyət və keyfiyyət tərəfləri birlikdə ifadə edilmiş olur.

Öyrənilən əlamət isə hadisənin yalnız **keyfiyyət** xüsusiyyətlərini əks etdirir.Statistik tədqiqat zamanı öyrənilən keyfiyyət əlaməti (sürət) kəmiyyət qiyməti alır və statistik göstərici olur.

Müəyən əlamət üzrə baş yığımın elementləri üst-üstə düşə bilər. Digər əlamətlər üzrə onlar **bir-birindən** fərlqənə bilər. Məsələn, eyni yaşlı, eyni dərəcəli, eyni bir idman növü ilə məşğul olan idmançılar tədqiqat obyekti ola bilərlər.Amma bu idmançılar əzələlənin gücünə, rekasiyaların itiliyinə, fizioloji göstəricilərə görə bir- birindən fərqlənə bilər. Məhz dəyişən-statistik əlamətlər statistikanın əsas tədqiqat obyektləridir. Bu əlamətlər 2 qrupa bölünür. **Kəmiyyət əlamətləri və keyfiyyət əlamətləri.**

1. Kəmiyyət əlamətləri -ədədi qiymətlərlə ifadə olunur və ölçmə nəticələrini əks etdirir. Variasiya edən əlamətinin öyrənilən hadisənin ayrı-ayrı vahidlərində aldığı qiymət **variant** adlanır.Yəni dəyişən əlamətin məsafəyə sərf edilən vaxt,hərəkət sürəti və s.

2. Keyfiyyət əlamətləri-birbaşa ölçmək mümkün deyil. Məsələn, idman ixtisası, təsnifat dərəcəsi, milliyət, ərazi mənsubiyyəti

Beləliklə, statistikanın öyrəndiyi əlamətlər ya məna anlayışları, ya da ədədi qiymətlərlə ifadə oluna bilər.

Məna anlayışlarıilə ifadə olunan əlamətlər **atributiv** adlandırmaq qəbul edilmişdir. Məsələn, aşağıdakılar atubutiv əlamətləridir:

İnsanın cinsi-kişi, qadın.

Təhsil pillələri- bakalavr, magistratura, doktorantura

Atribut-fəlsəfə termini olub, obyektin ayrılmaz mühüm xassəsinin bildirir.

Əgər atributiv əlamət bir-birinin əksi olan 2 qiymətdən yalnız birini qəbul edə bilərsə, onda ona **alternativ** əlamət deyilir.

FƏSİL 3
TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR

3.1.Təsadüfi kəmiyyət anlayışı. Diskret təsadüfi kəmiyyət

Təsadüfi kəmiyyət anlayışı – Təsadüfi kəmiyyət elə kəmiyyətdir ki, onun qiyməti elementar hadisədən asılıdır. Təsadüfi kəmiyyət elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş funksiyadır. Başqa sözlə desək, təsadüfi kəmiyyət Ω elementar hadisələr fəzasını R həqiqi ədədlər çoxluğuna inikas etdirən funksiyadır: $X\colon \Omega \longrightarrow$ R. Ω – sınağın mümükün nəticələrinin əmələ gətirdiyi elementar hadisələr fəzasıdır. Burada söhbət "təsadüfi kəmiyyətin reallaşdırılmasından" gedir. Yəni, onun real vəziyyətdə baş tutmuş elementar hadisəyə uyğun gələn qiymətindən. Elementar hadisədən asılı olan funksiya prosesin ehtimal modelinin əsasını təşkil edən nəzəri anlayışdır. Eyni fəzada təyin olunmuş X və Y təsadüfi kəmiyyətlərini nəzərdən keçirək. İxtiyari a və b ədədləri üçün $A = \{X = a\}$ və $B = \{Y = b\}$ hadisələri asılı olmazsa, onda bu kəmiyyətlər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər adlanır. Əgər X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $X + a,\ \ Y + b$ kəmiyyətləri də asılı olmayacaq.

Diskret təsadüfi kəmiyyət – Əgər hər hansı çoxluqda natural ədədlər çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq varsa, onda bu çoxluğa ***hesabi*** çoxluq deyilir. Məsələn: tam ədədlər çoxlüğü, cüt ədədlər çoxluğu və s.

X - təsadüfi kəmiyyətinin $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ qiymətlər çoxluğu hesabi və ya sonlu olarsa, ona ***diskret təsadüfi kəmiyyət*** deyilir. Başqa sözlə desək, sonlu sayda izole edilmiş nöqtələrdən ibarət $\{x_i\}$ şəklində ardıcıllıq əmələ gətirən, müxtəlif qiymətlər ala bilən təsadüfi kəmiyyətə ***diskret təsadüfi kəmiyyət*** deyilir. Diskret təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymətlər bir birindən tam ədəd qədər fərqlənir: bir dəfə zəri atarkən düşən rəqəm, atıcının yığdığı xalların miqdarı, rəqib qapısına vurulan qolların sayı, bir raund ərzində endirilən dəqiq zərbələrin sayı və s. Diskret təsadüfi kəmiyyətin hər bir qiymətinə müəyyən ehtimal uyğun gəlir: $P[X = x_i] = p(x_i) = p_i\}$.

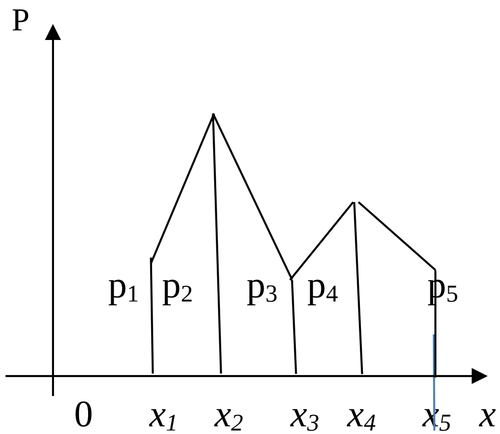
$p(x)$ funksiyası X təsadüfi kəmiyyətinin ***ehtimallarının paylanma qanunu*** adlanır. Bu funksiya $\{x_i\}$ ardıcılığının nöqtələrində təyin olunub. Hər sınaq zamanı təsadüfi kəmiyyət bu funksiyanın qiymətlər oblastında hər hansı bir qiyməti alır. Yəni X –in x_i qiymətlərindən heç olmazsa birini alması mümkün hadisədir. Ona görə də

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Paylanma sırası:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Paylanma çoxbucaqlısı:



Paylanma funksiyası – X təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş x həqiqi ədədindən kiçik olması şərtinin (hadisəsinin) ehtimalını nəzərdən keçirək:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)$$

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası aşağıdakı əsas xassələrə malikdir:

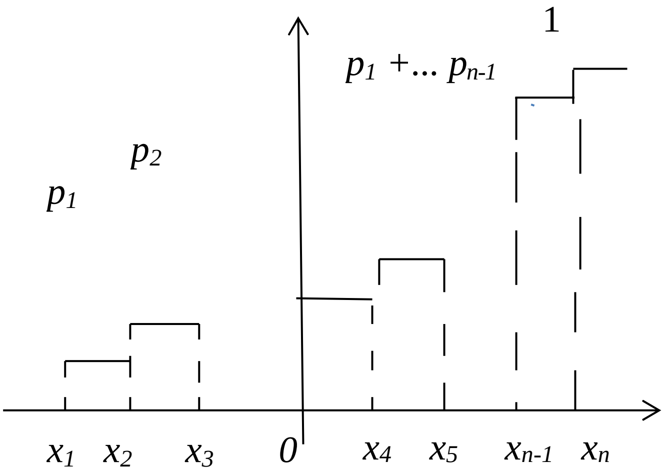
1. Monotonluq şərti $x_1 \leq x_2 \rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0\,, \lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$
3. Soldan kəsilməzlik şərti $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$

Misal:

X diskret təsadüfi kəmiyyəti $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ mümkün qiymətlərini uyğun olaraq $p_1, p_2, \dots, p_n$ ehtimalları ilə alır. Onda bu kəmiyyətin paylanma funksiyası:

$$\begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3 \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \leq x_n \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,, & x > x_n \end{cases}$$

Deməli, F $x_1, x, \dots, x_n$ nöqtələrində kəsilən və $(n+1)$ sayda parçada sabit qalan pilləvari funksiyadır



3.2. Diskret təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları

Təsadüfi kəmiyyətlərin ala bildiyi qiymətlərin necə paylandığını xarakterizə etmək üçün onun riyazi gözləmə, dispersiya, moda, mediana və orta kvadratı maye adlanan ədədi xarakteristikalarından istifadə olunur.

Riyazi gözləmə - X - təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarının paylanma mərkəzinə onun ***riyazi gözləməsi*** deyilir.

Tutaq ki, X diskret təsadüfi kəmiyyəti aparılan n sayda sınaq nəticəsində x_1 qiymətini n_1 dəfə alır:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_1 = n$$

Onda

$$M[X] = \mu \sum_{k=1}^{r} x_k p_k$$

$$P_k = P[X = x_k] = \frac{n_k}{n}$$

Xüsusi halda əgər təsadüfi kəmiyyət x_i qiymətlərini $\frac{1}{n}$ ehtimalı ilə olarsa, onda, riyazi gözləmə

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

Əsas xassələri:

1. $Mc = c$
2. $M[cX] = cM[X]$
3. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$M[X+Y] + M[X] + M[Y]$.

İsbatı:

Tutaq ki, Y təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu X-in aldığı qiymətlərdən asılı deyil, onda deyirlər ki, Y kəmiyyəti X-dən asılı deyil. İndi fərz edək ki, X $\{x_i\}$ qiymətlərini p_i ehtimalları, Y isə $\{y_i\}$ qiymətlərini t_j ehtimalları ilə alır ($i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,n}$).

Ehtimalların vurulma teoreminə əsasən,

$$P\big[(X = x_i) \cap (Y = y_j)\big] = P_i t_j.$$

Beləliklə, X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi $(X+Y)$ $(x_i + y_j)$ qiymətlərini $(p_i t_j)$ ehtimalları ilə alan təsadüfi kəmiyyətdir

$$M[X+Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)\, P(X = x_i; Y = y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} y_i t_j = M[X] + M[Y]$$

4. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$M[XY] = M[X]M[X]$$

Dispersiya-Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun riyazi gözləməsinə nəzərən səpələnməsini ifadə edir

$$D[X] = M[(X - M[X])^2]$$
$$D[X] = \sum_{j=1}^{\infty}(x_i - M)^2 p_i.$$

Əsas xassələr:

1. $D[X] \geq 0$
2. $D[c] = 0$
3. $D[aX] = a^2 D[X]$
4. $D[-X] = D[X]$
5. $D[X + b] = D[X]$

İndi isbat edək ki, asılı olmayan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y]$$

Göstərmək olar ki, $D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] = M[X]^2 - (M[X])^2$$
$$D[X + Y] = M[(X + Y)^2] - [M(X + Y)]^2 =$$
$$= D[X] + D[Y]$$

3. **Moda** – Təsadüfi kəmiyyətin ən böyük ehtimalla aldığı qiymətdir. Yəni, əgər X diskret təsadüfi kəmiyyəti $x_1 < x_2 < \cdots$ mümkün qiymətlərini $p_1, p_2, \ldots$ ehtimalları ilə alarsa, onda $p(x_{M_0}) \geq p(x_i)$ $(i \geq 1)$ şərtini ödəyən x_{M_0} - ədədinə onun modası deyilir.

4. **Median** $P(X < M_e) = P(X > M_e) = 1/2$ şərtini ödəyən M_e ədədinə X diskret təsadüfi kəmiyyətinin medianı deyilir. Hər bir təsadüfi kəmiyyətin heç olmazsa bir medianı var.

Orta kvadratik paylanma

$$\sigma = \sqrt{D[X]}$$

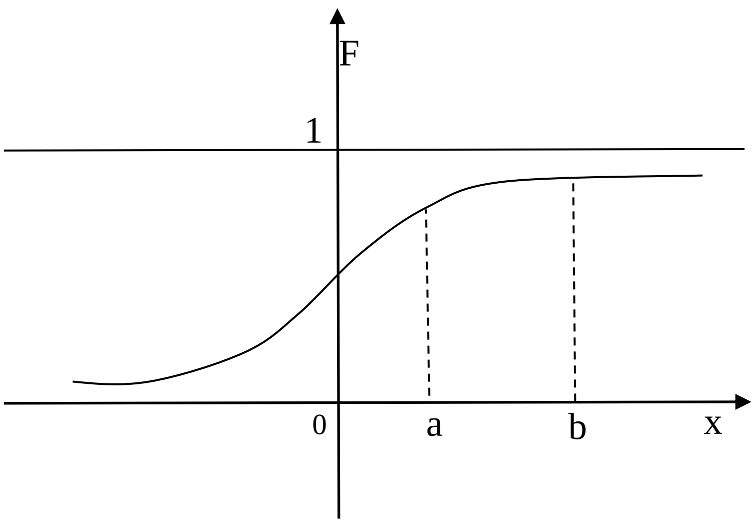
3.3. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyət anlayışı-Əgər X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x) = P[X < x]$ bütün ədəd oxu üzərində kəsilməz olarsa, onda ona ***kəsilməz təsadüfi kəmiyyət*** deyilir. İsbat edilmişdir ki, KTK-in hər hansı qiymətinin ehtimalı $P[X = x_0] = 0$. KTK - hər hansı məhdud (a, b) intervalında və ya ədəd oxu üzərində istənilən qiymət ala bilər.

KTK-in hər hansı qiymətinin müəyyən intervala düşmə ehtimalı aşağıdakı düsturdan təyin olunur:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

Burada F KTK-in paylanma funksiyasıdır. Aşağıdakı şəkildə onun qrafiki təsviri verilib:



Paylanma sıxlığı və paylanma funksiyası. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $0 \leq F \leq 1$
2) $x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

3) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

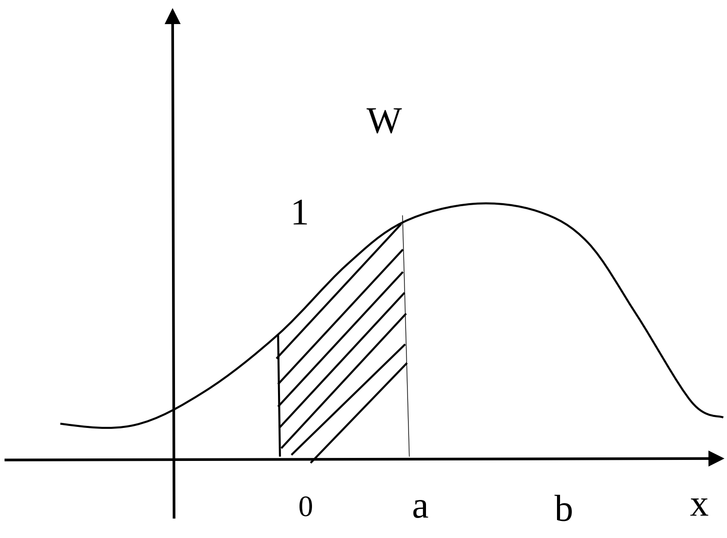
4) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

KTK-in ehtimallarının paylanma qanunauyğunluğu paylanma sıxlığı adlanan funksiya ilə ifadə olunur:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx} = W(x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} W(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1$$



$F(x)$ monoton və kəsilməz olduğunda:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} W(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)dx = 1$$

Müəyyən inteqralın xassəsinə əsasən şəkildəki ştrixlənmiş sahə KTK-in (a,b) intervalına düşmə ehtimalına mütənasibdir: $dF =$

$W(x)dx$

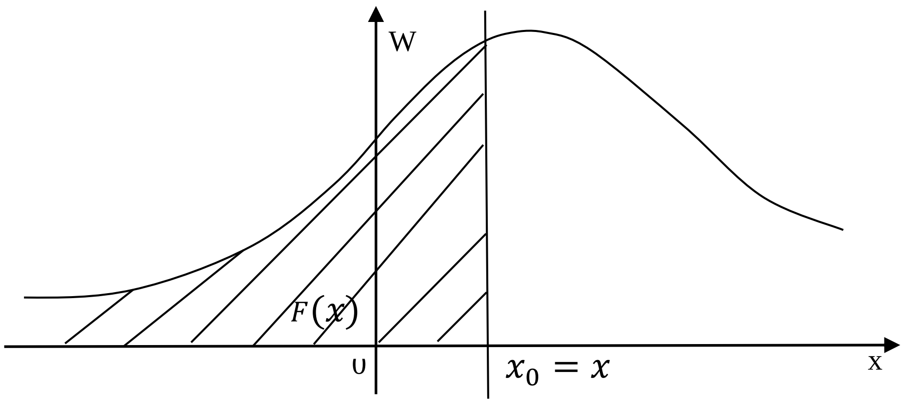
$$\int_a^b W(x)dx = \int_{-\infty}^{b} Wdx - \int_{-\infty}^{a} Wdt =$$

$$= F(b) - F(a) = P(a < X < b)$$

$$F(x_0) = P(X < x_0) = P[-\infty < X < x_0] =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_0} W(t)dt.$$

$W(t)$ $(-\infty, x_0)$ intervalında X KTK-in ehtimalının paylanma sıxlığıdır. Həndəsi olaraq x-in müəyyən qiymətində paylanma funksiyasının qiyməti $x = x_0$ şaquli xəttindən solda yerləşən sahənin qiymətinə bərabərdir.



3.4. Standart diskret paylanmalar

Bernuli paylanması

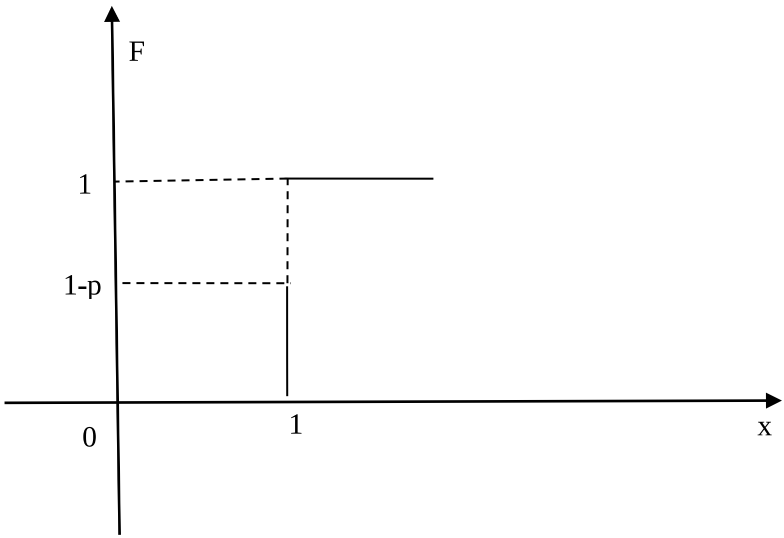
X diskret kəmiyyəti p və $q = 1 - p$ ehtimalları ilə yalnız 2 qiymət (1 və 0) alarsa, onda deyirlər ki, bu kəmiyyət Bernuli paylanmasına malikdir.

Paylanma cədvəli:

X	0	1
p	$1-p$	p

Paylanma funksiyası:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-p, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



Ədədi xarakteristikaları:

Riyazi gözləmə

$$M[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

Dispersiya

$$M[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$M[X^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p.$$

Binomial paylanma – Tutaq ki, A hadisəsini almaq üçün n dəfə asılı olmayan sınaqlar seriyası həyata keçirilir. Hər bir sınaqda hadisənin baş vermə ehtimalı p**.** Bu sınaqlar seriyasında A hadisəsinin k dəfə baş vermə ehtimalı aşağıdakı düsturdan təyin olunur:

$$P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

***Paylanma funksiyası*:**

$$B(k,n,p) = P[X \leq x] = \sum_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k} \quad k = \overline{0,n}$$

Paylanma cədvəli:

X	0	1	...	k	n
p	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	p^k

X - A hadisəsinin baş vermələr sayını ifadə edir.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{k<x} p_{k,n}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$M[X] = np, \quad D[X] = npq$$

Misal: $n = 4$ asılı olmayan sınaqların hər birində A hadisəsinin baş verməsinin ehtimalı $p = \frac{1}{3}$ olduqda onun paylanma funksiyasını qurun

$k = 0,1,2,3,4$

$$n = 4 \quad k = 0, \quad P_{0,4} = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$n = 4 \quad k = 1, \quad P_{1,4} = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

$$n = 4 \quad k = 2, \quad P_{2,4} = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

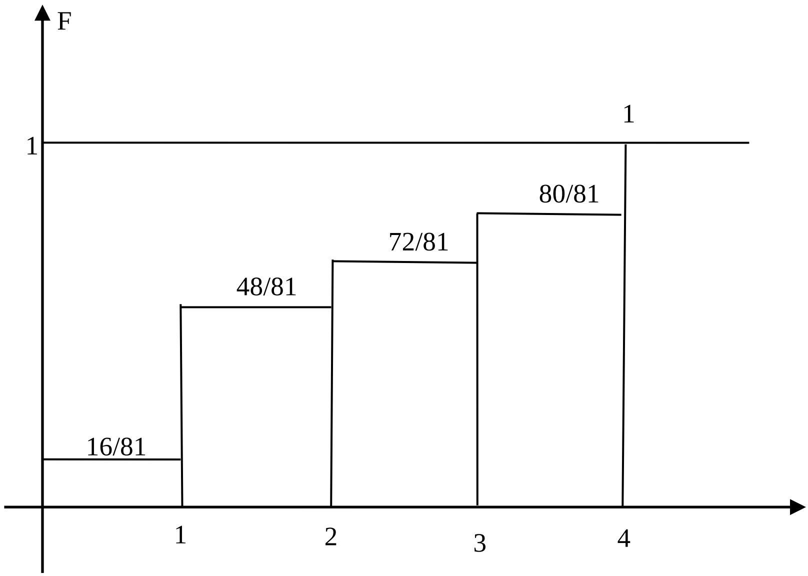
$$n = 4 \quad k = 3, \quad P_{3,4} = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$$n = 4 \quad k = 4, \quad P_{3,4} = C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

Paylanma cədvəli

x_k	0	1	2	3	4
p_k	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{16}{81}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{48}{81}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{72}{81}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{80}{81}, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



Puasson paylanması - Müəyyən zaman müddətində radiaktiv maddənin parçalanması nəticəsində alınan α issəciklərin sayı; nəqliyyat qovşağının müəyyən nöqtəsindən keçən avtomobillərin sayı; elektron lampasındakı katodun buraxdığı elektronların sayı; mayenin verilən həcmindəki zərrəciklərin miqdarı və s. Puasson paylanmasına tabe olan təsadüfi kəmiyyətdir.

Sınaqların sayı çox, hadisənin hər sınaqda baş vermə ehtimalı çox kiçik isə onda təsadüfi kəmiyyət Puasson paylanma qanununa tabe olur. Paylanma sıxlığı və ya ehtimal funksiyası

$$\pi(k,\lambda) = P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e$$

$$\lambda > 0,\ \ k = 0{,}1{,}2$$

$k - n$ asılı olmayan sınaqda hadisənin baş vermə sayıdır.

$\lambda = np - A$ hadisəsinin n sınaqda baş vermə sayının orta göstəricisidir $\pi(k,\lambda) > 0 \quad (\lambda = 1; 4; 10)$.

Paylanma funksiyası:

$$\Pi(x,\lambda) = \sum_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\Gamma(k+1,\lambda)}{k!}.$$

Riyazi gözləmə:

$$M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} = \lambda$$

Dispersiya:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

$$M[X^2] = M[X(X-1) + X] = M[X(X-1)] + M[X]$$

$$M[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Beləliklə, $M[X] = \lambda$; $D[X] = \lambda$.

3.5. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları

Riyazi gözləmə:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx$$

$$M[X] = \int_a^b xW(x)dx$$

Əgər X və Y təsadüfi kəmiyyətləri birgə mütləq kəsilməz paylanma sıxlığı $W(x,y)-$ ə malik olarsa, onda X və Y hər biri ayrı-ayrılıqda mütləq kəsilməz paylanmaya malik olacaq:

$$W_X\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x,y)dy$$

$$W_Y\ (y) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x,y)dx \to \int_{-\infty}^{\infty} W_Y(y)dy = 1$$

Dispersiya:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-M)^2 W(x)dx$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

Moda: W – paylanma sıxlığı funksiyasının hər bir x_{M_0} maksimum nöqtəsinə kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin modası deyilir $W_{max} = W\left(x_{M_0}\right)$.

Yeganə modası olan təsadüfi kəmiyyət bir modalı təsadüfi kəmiyyət adlanır.

Median: - KTK-in medianı aşağıdakı şərti ödəyir:

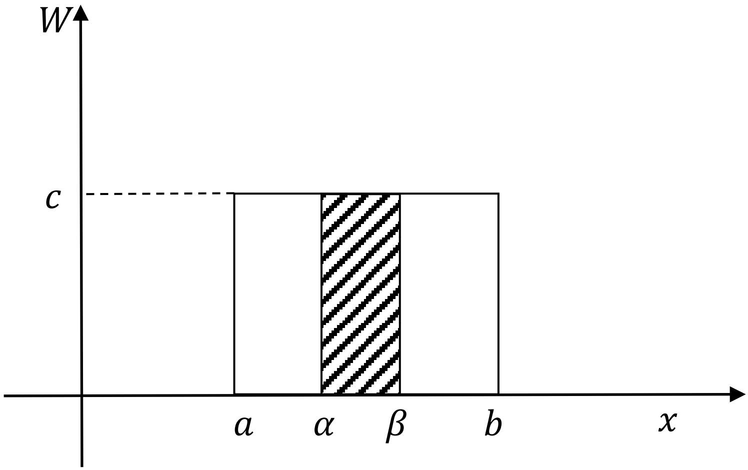
$$\int_{-\infty}^{M_e} W(x) = \int_{M_e}^{\infty} W(x) = \frac{1}{2}$$

Başqa sözlə desək, $F(x) = 1/2$ tənliyinin yeganə kökü median olacaq.

Müntəzəm və üstlü paylanma

Müntəzəm paylanma qanununa tabe olan təsadüfi kəmiyyətin paylanma sıxlığı:

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c, & a < x < b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} cdx = c(b-a) = 1$$

$$c = \frac{1}{b-a}$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} W(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Paylanma funksiyasını quraq:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx$$

$$x < a \quad W(x) = 0 \rightarrow F(x) = 0$$

$$x > b \quad F(x) = \int_{-\infty}^{a} odt + \int_{a}^{b} \frac{dt}{b-a} + \int_{b}^{x} odt = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

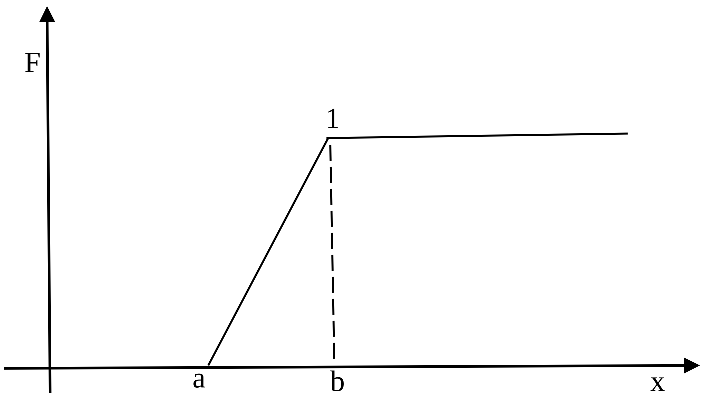
$$a < x < b \ \rightarrow W(x) = c = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} W(x)dx + \int_{a}^{x} W(x)dx =$$

$$= \int_{b}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Beləliklə

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Riyazi gözləmə:

$$M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$M[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Dispersiya:

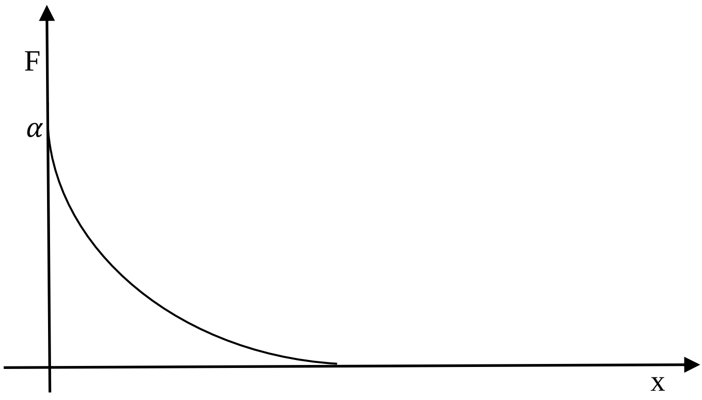
$$D[x] = M[x^2] - (M[x])^2 =$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Üsullu paylanma:

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

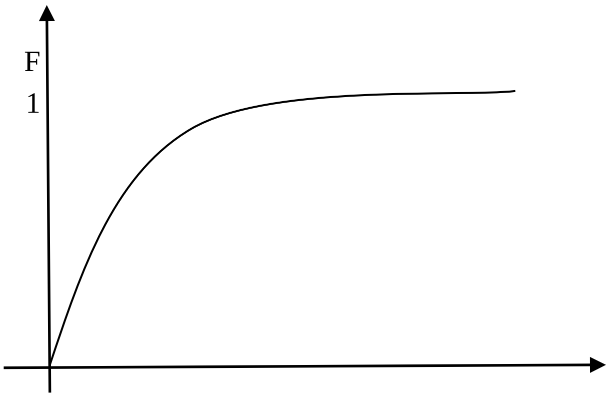
$\alpha > 0$, λ-sabit parametr



Paylanma funksiyası

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} W(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \alpha e^{-\alpha x}dx = 1 - e$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}.$$

Riyazi gözləmə:

$$M[x] = \int_0^{\infty} xW(x)dx = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Dispersiya:

$$D[x] = \int_0^{\infty} x^2\alpha e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$M[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} K(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$D[x] = M[x^2] - (M[x])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Beləliklə,

$$M[x] = \lambda; \quad D[x] = \lambda.$$

3.6. Təcrübi göstəricilərin cədvəl şəklində təsviri

Variasiya sıraları

Əsas *variasiya sıraları* 3 növdə olur.

a) sadə düzlənmiş;

b) diskret;

c) intervallı

Yuxarıdakı misallar diskret sıraların təzahürüdür. Diskret sıralarda variantlar bir rəqəmlə ifadə olunur.

43 yüngül atletlərdə start reaksiyasının qiyməti (san)

№	x_i	n_i
1	1,25	3
2	1,30	5
3	1,32	6
4	1,36	9
5	1,38	8
6	1,40	5
7	1,42	4
8	1,45	3
Yekun	**-**	**43**

Cədvəl 5

8 yüngül atletlərdə start reaksiyasının qiyməti (san)

№	x_i	n_i
1	1,25	1
2	1,30	1
3	1,32	1
4	1,36	1
5	1,38	1
6	1,40	1
7	1,42	1
8	1,45	1
Yekun	**-**	**8**

Cədvəl 6

Hər varianta yalnız bir dəfə rast gəlsəydik, sıra sadə düzlənmiş adlanardı.

Sadə düzlənmiş sıra adətən yalnız variantlar (cədv.7.) şəklində təqdim olunur və sıranın parametrlərinin sadə təyin formasına malikdir. Belə, cədvəl 7-də yuxarıda verilən sıra nəzərdən keçirilir.

$\bar{x}$, σ^2, σ və V parametrlərini təyin edək:

$\bar{x}$ =10,88/8=1,36; σ^2 =0,0310/8=0,0038

$$\sigma = \sqrt{0{,}0038} = 0{,}06 san \quad V = 0{,}06/1{,}36 * 100\% = 4{,}4\%$$

$$\bar{x} \pm \sigma = 1{,}36 \pm 0{,}06$$

Yüngül atletlərdə start reaksiyasının emalı (san)

№	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1,25	-0,11	0,0121
2	1,30	-0,06	0,0036
3	1,32	-0,04	0,0016
4	1,36	0,00	0,0000
5	1,38	0,02	0,0004
6	1,40	0,04	0,0016
7	1,42	0,06	0,0036
8	1,45	0,09	0,0081
Yekun	**10,88**	**-**	**0,0310**

Cədvəl 7

Diskret sıradan başqa, *interval sırası* da mövcuddur, burada hər variant interval şəklində ifadə olunur. İntervalın ölçüsü könüllü seçilə bilər: interval nə qədər böyük olsa, ilkin məlumatı təqdim edən sıranın göstəriciləri daha az dəqiqdir. Bir qayda olaraq, interval sırası diskret və ya sadə düzlənmiş sıranın dəyişdirilməsi yolu ilə alınır. Məsələn, k=0,05 interval vasitəsilə cədvəl 1.5-də verilən diskret sıranı interval sırasına çeviririk (cədvəl 8).

№	x_i	n_i
1	1,25…1,30	8
2	1,30…1,35	6
3	1,32…1,40	22
4	1,40…1,45	7
Yekun	**-**	**43**

Cədvəl 8

Bu cür dəyişiklik üçün birinci varianta intervalın qiymətini 1,25±0,05 əlavə etmək lazımdır ki, intervalın yuxarı həddi 1,30 alınsın. Sonra alınmış rəqəmə ardıcıl surətdə sonuncu interval sonuncu variantı daxil edənə qədər intervalın qiyməti əlavə olunur. Sərhədyanı qiymətlər qəbul olunmuş şərtdən asılı olaraq keçmiş və ya növbəti intervala aid edilə bilər. İntervalları əmələ gətirdikdə, onların hər birinə müvafiq tezlik n_1 daxil etmək lazımdır ki, ümumilikdə bütün tezliklər cəmin həcmini təşkil etsin; məsələn, misal 1.1-də n=43. Məsələn, k=0,10 olanda cədvəl 1.6. üçün 9. cədvəlində təqdim edilmiş sıranı əldə edəcəyik.

k=0,10 olanda interval sırası

№	x_i	n_i
1	1,25…1,35	14
2	1,35…1,45	29
Yekun	**-**	**43**

Cədvəl 9

Daha az interval daha ətraflı sıranı verir, məsələn, k=0,03 olanda cədvəl 10-da verilən sıranı alırıq.

Beləliklə, interval sıra bir neçə cür olur.

Sıraların qrafiki təsviri 2 cür olur: 1) poliqon; 2) histoqram.

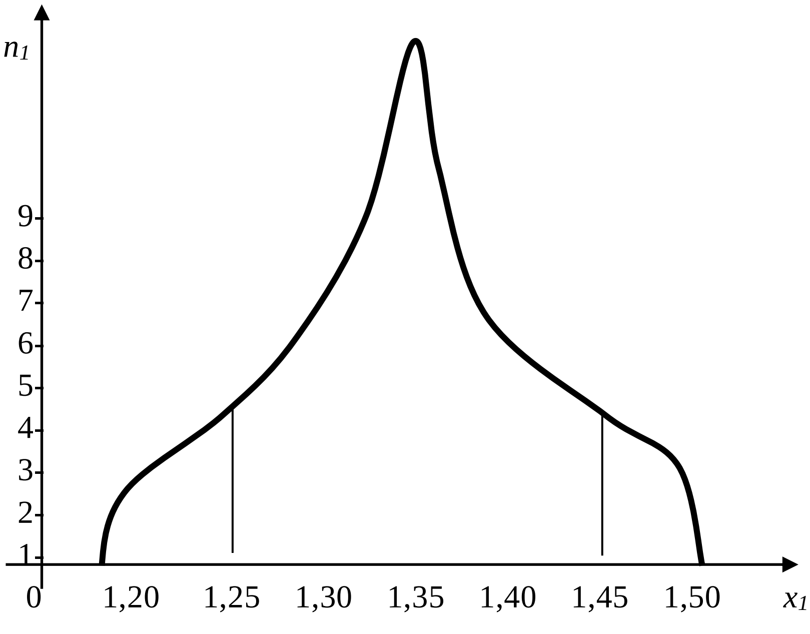
Diskret sıranı poliqon əks edir. Cədvəl 5-də verilən göstəricilər üzrə tərtib olunan poliqonu nəzərdən keçirək (şək.1.)

Şəkil 2-də histoqramı (sütunlu diaqrammanı) cədvəl 8-də verilən göstəricilər əsasında tərtib olunmuş interval sırası təqdim edir.

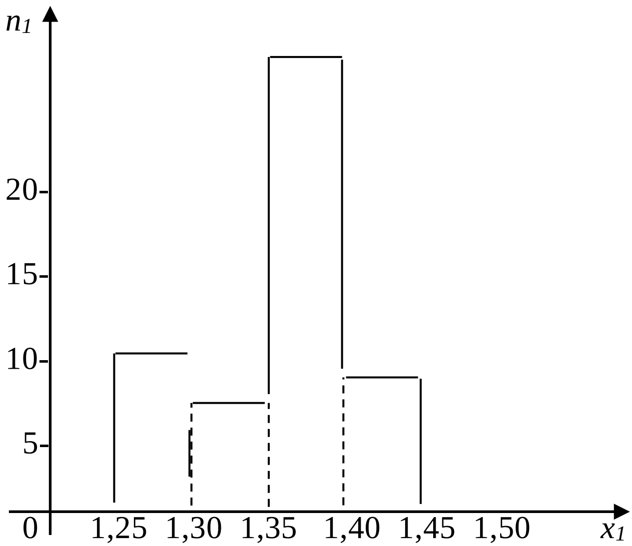
k=0,03 olanda interval sırası

№	x_i	n_i
1	1,25…1,28	3
2	1,28…1,31	5
3	1,31…1,34	6
4	1,34…1,37	9
5	1,37…1,40	13
6	1,40…1,43	4
7	1,43…1,46	3
Yekun	**-**	**43**

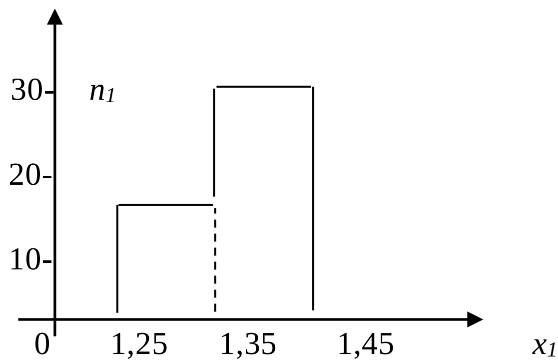
Cədvəl 10



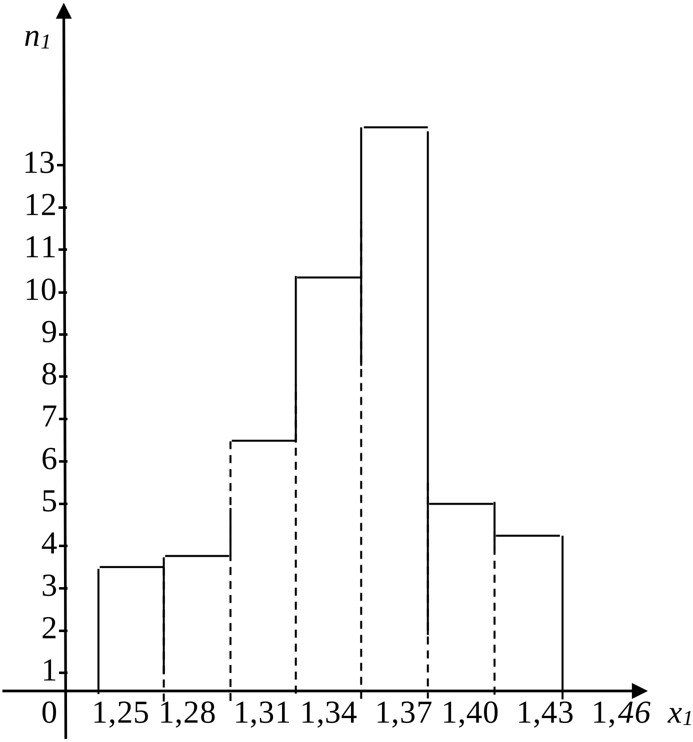
Şəkil 1. Poliqon (cədv.5 bax)



Şəkil 2. Histoqram (cədv.8. bax)



Şəkil 3. Histoqram (cədv.9. bax)



Şəkil 4. Histoqram (cədv.10. bax)

İnterval sırasının əsasında və cədvəl 1.9 verilən göstəricilər üzrə tərtib olunmuş histoqram 1.3 şəklində nəzərdən keçirilir.

Şəkil 1.4-də interval sırasının əsasında və cədvəl 1.10-da verilən göstəricilər üzrə tərtib olunmuş histoqram göstərilir.

İnterval sırası diskret sırasına çevrilə bilər, bunun üçün intervalın ortasına diskret sırasının variantı olacaq uyğun rəqəmi təyin etmək lazımdır.

3.7. Orta ölçülər üsulu vasitəsilə tipli misalların həlli

Orta ölçülər üsulu ilkin göstəricilərin emalı üsulu sayılır. Yuxarıda qeyd olunduğu kimi, onun əsas xüsusiyyəti ilkin materialın sıxılmasıdır. Əsasən isə, ilkin rəqəmlər $\overline{x}$, σ^2, σ və v göstəriciləri ilə məlumatın mühüm itkisi olmadan əvəz oluna bilər.

Belə ki, 1.1. misalında bu situasiya təsvir olunub: start reaksiyası 1,25 san 1,45 san qədər start reaksiyasını göstərən 43 idmançı $\overline{x} \pm \sigma$,v parametrləri, yəni (1,36±0,06) san ilə xarakterizə edilə bilər.

İlkin məlumatın bu şəkildə təqdim olunması təlim işi üçün xeyirli olan bir sıra praktiki məsələləri həll etmək imkanını verir: məs., iki qrup idmançıları bir-biri ilə müqayisə etmək. İdmanda bu cür məsələyə tez-tez rast gəlir, məs., idmançıların təcrübə aparılan və eksperimental qrupları aralarında olan prinsipial fərqlərin aşkar edilməsi üçün müqayisə olunur; yaş və cins üzrə fərqlənən idmançılar qrupunun göstəriciləri; müxtəlif proqramlar, metodikalar üzrə məşq edən idmançılar qrupu; müxtəlif şəraitdə, rejimlərdə, məşq yüklərinin ayrı-ayrı həcmi və intensivliyi ilə, müxtəlif vaxt, məkan və güc göstəricilərin istifadəsi vasitəsilə məşq edən idmançılar qrupu. Ən sonunda, yalnız sınaqdan keçirilən qruplar yox, habelə eyni göstərici üzrə nəticələri yoxlanılmış bir fərdin yekunları müqayisə olunmalıdır. Bu halda fərdi idman imkanlarının dinamikasını müşahidə etmək və beləliklə, onun məşq metodikasını mükəmməl etmək mümkündür.

Məsələ 3. Qaçış sürəti (m/san) üzrə kontrol (x_i) (cədv.11) və eksperimental (y_i) (cədv.12) idmançılar qruplarının nəticələrini müqayisə edin.

İdmançıların təcrübə aparılan qrupunun nəticələrinin emalı

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	2,8	5	14,0	-0,3	0,09	0,45
2	3,0	7	21,0	-0,1	0,01	0,07
3	3,1	9	27,9	0,0	0,00	0,00
4	3,2	8	25,6	0,1	0,01	0,08
5	3,3	6	19,8	0,2	0,04	0,24
6	3,4	5	17,8	0,3	0,09	0,45
Yekun	**-**	**40**	**125,3**	**-**	**-**	**1,29**

Cədvəl 11

$$\overline{x} = 125{,}3/40 = 3{,}13 \approx 3{,}1 m/san;$$

$$\sigma^2{}_x = 1{,}29/40 \approx 0{,}3(m/san^2)$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}3} \approx 0{,}18 \approx 0{,}2 m/san;$$

$$V_x = 0{,}2/3{,}1 * 100\% \approx 6{,}5\%$$

İdmançıların kontrol qrupunun xarakteristikası:

$$\overline{x} \pm \sigma_x = (3{,}1 \pm 0{,}2) m/san; v_x = 6{,}5\%$$

İdmançıların eksperimental qrupunun nəticələrinin emalı

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(y_i - \overline{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	3,1	7	21,7	-0,2	0,04	0,28
2	3,2	12	38,4	-0,1	0,01	0,12
3	3,3	11	36,3	0,0	0,00	0,00
4	3,4	10	34,0	0,1	0,01	0,10
Yekun	**-**	**40**	**130,4**	**-**	**-**	**0,50**

Cədvəl 12

$$y = 130,4/40 = 3,26 \approx 3,3 m/san;$$
$$\sigma^2{}_y = 0,50/40 \approx 0,01(m/san^2)$$
$$\sigma_y = \sqrt{0,01} = 0,1 m/san; \ V_y = 0,1/3,3*100\% \approx 3,0\%$$
İdmançıların eksperimental qrupunun xarakteristikası:
$$\overline{y} \pm \sigma_y = (3,3 \pm 0,1) m/san; v_y = 3,0\%$$

Eksperimental və kontrol qrup idmançıların nəticələrini əldə edərək, iki sıranın parametrlərini müqayisə etmək və nəticələrə gəlmək imkanı yaranır.

Eksperimental qrup daha yüksək nəticələr göstərib $(\overline{y} = 3,3 m/san > \overline{x} = 3,1 m/san)$, bu halda hazırkı qrupda ilkin göstəricilərin yayınma əmsalı daha azdır $(\sigma = 0,1 m/san, v = 3,0\%)$, nəinki kontrolda $(\sigma = 0,2 m/san, v = 6,5\%)$. Bu uğurlu eksperiment haqda dəlalət edir, onun nəticəsi belədir: idmançılar qaçışın daha yüksək surətini göstəricilərin daha yüksək sabitliyi şərtilə göstərdilər.

İdmançıların yaş qruplarını müqayisə edən və onların əsas göstəricilərinin dinamikasını təyin edək.

Məsələ 4. 14 (x_i) və 15 (y_i) yaşlı iki qrup sınaqdan keçirilənlərdə əllərin yellənməsi ilə yerdən tullanmağın hündürlüyü (sm) ölçülmüşdür. Tullanmağın hündürlüyünü yaşdan asılı olaraq dəyişilməsini təhlil edin.

14 yaşlı məktəblilərin tullanma hündürlüyünün nəticələrinin emalı

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	30,2	5	151,0	34,8	0,09	174,0
2	32,4	7	226,8	13,7	0,01	95,9
3	35,0	9	315,0	1,2	0,00	10,8
4	38,0	8	304,0	1,9	0,01	15,2
5	40,0	4	160,0	15,2	0,04	60,8
6	41,2	7	288,4	26,0	0,09	182,0
Yekun	**-**	**40**	**1445,2**	**-**	**-**	**538,7**

Cədvəl 14

$$\bar{x} = 1445{,}2/40 = 36{,}13 \approx 36{,}1sm;$$

$$\sigma^2{}_x = 538{,}7/40 \approx 0{,}03sm$$

$$\sigma_x = \sqrt{13{,}47} \approx 3{,}7sm;$$

$$V_x = 3{,}7/36{,}1*100\% \approx 10{,}2\%$$

$$\bar{x} \pm \sigma_x = (36{,}1 \pm 3{,}7)sm$$

15 yaşlı məktəblilərin tullanma hündürlüyünün nəticələrinin emalı

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(y_i-\bar{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	33,0	4	136,0	-2,2	4,84	19,36
2	35,2	9	316,8	-1,0	1,00	9,00
3	36,0	10	360,0	-0,2	0,04	0,40
4	36,4	8	291,2	0,2	0,04	0,32
5	38,0	7	266,0	1,8	3,24	22,68
6	39,5	2	79,0	3,3	9,00	18,00
Yekun	**-**	**40**	**1449,0**	**-**	**-**	**69,76**

Cədvəl 15

$$\overline{y} = 1449,0/40 = 36,22 \approx 36,2sm;$$

$$\sigma^2{}_y = 69,76/40 \approx 1,74sm$$

$$\sigma_u = \sqrt{1,74} = 1,34sm;$$

$$V_y = 1,3/36,2*100\% \approx 3,6\%$$

$$\overline{y} \pm \sigma_y = (36,2 \pm 3,6)sm.$$

14 və 15 cədvəllərində verilən məlumatların müqayisəsi göstərir ki, 14 yaşlı tullananların nəticələri bir ildən sonra azca yaxşılaşıb, daha sabit olub.

Məsələ 5. Sınaqdan keçirilənlərdə məşqdən əvvəl (x_i) (cədvəl 16) və sonra (y_i) (cədvəl 17) idmançıların ÜVT (vur/dəq.) ölçülmüşdür. Məşqin xarakterini qiymətləndirin.

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	106	6	636	-5,5	30,25	181,5
2	109	9	981	-2,5	6,25	56,25
3	110	11	1210	-1,5	2,25	24,75
4	113	12	1356	1,5	2,25	27,10
5	115	7	805	3,5	12,25	8,75
6	117	5	585	5,5	30,25	151,25
Yekun	**-**	**50**	**5573**	**-**	**-**	**449,5**

Cədvəl 16

$$\overline{x} = 5573/50 \approx 111,5 \text{ vur/dəq;}$$

$$\sigma^2{}_x = 449,5/50 \approx 8,99 \text{ vur/dəq}^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{8,99} \approx 3,0 \text{ vur/dəq;}$$

$$V_x = 3,0/111,5*100\% \approx 2,7\%$$

$$\overline{x} \pm \sigma_x = (111,5 \pm 3,0) \text{ vur/dəq}$$

Məşqdən sonra idmançılarda ÜVT ölçülmələrin emalı

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(y_i - \overline{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	165	5	825,0	-11,8	139,24	696,20
2	172	9	1548,0	-4,8	23,04	207,36
3	175	14	2450,0	-1,8	3,24	45,36
4	180	10	1800,0	3,2	10,24	102,40
5	184	8	1472,0	7,2	51,84	414,72
6	186	4	744,0	9,2	86,64	338,56
Yekun	**-**	**50**	**8839,0**	**-**	**-**	**1804,6**

Cədvəl 1.17

$y = 8839,0/50 = 176,78 \approx 176,8$ vur/dəq;

$\sigma^2{}_y = 1804,6/50 \approx 36,09$ vur/dəq^2;

$\sigma_y = \sqrt{36,09} = 6$ vur/dəq;

$V_y = 6,0/176,8 * 100\% \approx 3,4\%$;

$\overline{y} \pm \sigma_y = (176,8 \pm 6,0)$ vur/dəq

Alınmış məlumatlar ona dəlalət edir ki, ÜVT mühüm dərəcədə 111,5-dən 176,8 (vur/dəq) qədər artıb. Bununla belə nəticələrin sabitliyi heç dəyişməyib: 3,4-2,7=0,7%. Bu sübut edir ki, məşq intensiv, idmançılar isə eyni dərəcəyə aiddirlər.

Yalnız iki sınaqdan keçirilənlərin qrupunu yox, habelə iki idmançını aralarında müqayisə etmək olar, onların hər biri eyni göstərici üzrə dəfələrlə ölçülə bilər.

Məsələ 6. Xokkey oyunu zamanı 30 gün ərzində iki qapıçı hərəsi 100 şaybanın atımlarını əks edir. Birinci qapıçının əks olunmuş atımlarının (x_i) sayı cədvəl 18-də, ikinci qapıçının (y_i) isə cədvəl 19-da verilib. Sınaqdan keçirilən qapıçıların kvalifikasiyasını müqayisə edin.

Birinci qapıçının nəticələrinin emalı

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	65	5	325	-6,5	42,25	211,25
2	68	4	272	-3,5	12,25	49,00
3	72	7	5-4	-0,5	0,25	1,75
4	73	8	584	1,5	2,25	18,00
5	75	3	225	3,5	12,25	36,75
6	78	3	234	6,5	42,25	126,75
Yekun	**-**	**30**	**2144**	**-**	**-**	**443,50**

Cədvəl 18

$$\bar{x} = 2144/30 \approx 71{,}5;$$

$$\sigma^2{}_x = 443{,}5/30 \approx 14{,}78$$

$$\sigma_x = \sqrt{14{,}78} \approx 3{,}8;$$

$$V_x = 3{,}8/71{,}5 * 100\% \approx 5{,}3\%$$

$$\bar{x} \pm \sigma_x = 71{,}5 \pm 3{,}8$$

İkinci qapıçının nəticələrinin emalı

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	64	6	384	-6,2	37,20	223,2
2	69	7	483	-1,2	1,44	10,08
3	70	8	560	-0,2	0,04	0,32
4	72	4	300	1,8	3,24	12,96
5	75	2	150	4,8	23,04	46,08
6	76	3	228	5,8	33,64	100,92
Yekun	**-**	**30**	**2105**	**-**	**-**	**393,56**

Cədvəl 19

$$\bar{y} = 2105/30 \approx 70{,}2;$$

$$\sigma^2{}_y = 393{,}56/30 \approx 13{,}12$$

$$\sigma_y = \sqrt{13,12} = 3,6;$$

$$V_y = 3,6/70,2*100\% \approx 5,1\%$$

$$\overline{y} \pm \sigma_y = 70,2 \pm 3,6$$

18 və 19 cədvəllərində göstəriciləri müqayisə edərkən bu nəticəyə gəlirik ki, qapıçının ikisi də eyni dərəcəlidir, çünki əks olunmuş şaybaların sayı faktiki üst-üstə düşür: 71,5±3,8 və 70,2±3,6 və onların nəticələrin stabilliyi də praktiki olaraq eynidir: 5,3 və 5,1%.

Beləliklə, variasiya əmsalı və ya orta kvadratik yayınma vasitəsilə məşq işi üçün nəticələrin stabilliyini qiymətləndirmək mümkündür.

Məsələ 7. Birinci (x_i) və ikinci üzgüçünün (y_i) üzmə sürətində sabitliyi müqayisə edin (cədvəl 20 və 21).

Birinci üzgüçünün nəticələrinin emalı

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	1,00	2	2,00	-0,10	0,0100	0,0200
2	1,05	3	3,15	-0,05	0,0025	0,0075
3	1,08	5	5,40	-0,02	0,0004	0,0020
4	1,10	4	4,40	0,00	0,0000	0,0000
5	1,15	3	3,45	0,05	0,0025	0,0075
6	1,20	3	3,60	0,10	0,0100	0,0300
Yekun	**-**	**20**	**21,95**	**-**	**-**	**0,0670**

Cədvəl 20

$$\overline{x} = 22,00/20 \approx 1,1 m/san;$$

$$\sigma^2{}_x = 0,0670/20 \approx 0,00335(m/san)^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{0,00335} \approx 0,06 m/san; \qquad V_x = 0,6/1,1*100\% \approx 5,5\%$$

$$\overline{x} \pm \sigma_x = (1,1 \pm 0,06) m/san$$

İkinci üzgüçünün nəticələrinin emalı

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(y_i - \overline{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	1,00	4	4,00	-0,20	0,0400	0,1600
2	1,12	5	5,60	-0,08	0,0064	0,0320
3	1,20	4	4,80	0,00	0,0000	0,0000
4	1,26	3	3,78	0,06	0,0036	0,0108
5	1,30	2	2,60	0,10	0,0100	0,0200
6	1,32	2	2,64	0,12	0,0120	0,0240
Yekun	**-**	**20**	**23,42**	**-**	**-**	**0,2468**

Cədvəl.21

$$\overline{y} = 23,42 / 20 = 1,17 \approx 1,2 m / san;$$

$$\sigma^2{}_y = 0,2468 / 20 \approx 0,012349 (m / san)^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{0,01234} \approx 0,11 m / san;$$

$$V_y = 0,11 / 1,2 * 100\% \approx 9,2\%$$

$$\overline{y} \pm \sigma_y = (1,2 \pm 0,11) m / san$$

Cədvəl 20 və 21-də verilən məlumatları müqayisə edərkən, bu nəticəyə gəlmək olar ki, hər iki idmançının üzmə sürətinin göstəriciləri kifayət qədər sabitdir və birinci üçün 5,5%, ikinci üçün isə 9,2% təşkil edib, yəni birinci üzgüçünün nəticələri ikincisindən daha sabitdir.

3.8.Variasiya sırasının tərtibi və qrafiki göstərilməsi

Hər hansı göstəricini ölcərkən və ya müşahidə prosesində ədədlər cərgəsi alınır.

Ədədi nəticələrin tam ədədlər vasitəsi ilə ifadəsinə deyilir, məsələn, vurulan və ya ötürülən topların sayı. Kəsilməz fasiləsiz ədədlər isə ədədlərin kəsirlərlə qeyd olunmasına deyilr, məsələn məsafənin keçilmə vaxtı, hərəkətin sürəti, reaksiya müddəti. Ölçü nəticələrin təsadüfi ədədlərlə verilmiş cərgəsinə **seçmə cəm** deyilir. Öyrənilən seçmə cəmlərin bütün kəmiyyətlərinin məcmusu **baş cəm** adlanır.

Müxtəlif göstəricilərn ölçülməsi nəticəsində çoxlu rəqəmlər alınır. Seçmənin həcmi böyük olduqda onu intervallara bölürük. İntervalların sayını K hərfi ilə işarə edirik və aşağıdakı düstur ilə hesablayırıq:

$$k = 1 + 3{,}3 \cdot \lg n,$$

burada n – seçmənin həcmidir, k – intervalın sayı.

Ən böyük və ən kiçik ölçmələr arasındakı fərqə **variasiya genişliyi** deyilir.

$$R = X_{max} - X_{min},$$

burada R – variasiya genişliyi, X_{min} – variantların ən kiçik qiyməti, X_{max}- variantların ən bpyük qiyməti.

Hər intervalda seçmənin eyni rəqəmlərin təkrarı **intervalın tezliyi** adlanır.

Ən böyük və ən kiçik variantlar arasında olan fərqin intervallar sayının nisbətinə **intervalın addımı** deyilir. İntervalın addımı h hərfi ilə işarə edilir:

$$h = \frac{x_{\max} \quad - x_{\min}}{k} = \frac{R}{k},$$

R – variasiya genişliyi, k – intervalın sayı.

Variantların tezliyinin göstərilməsi ilə onların qruplaşdırılması **variasiya sırası** adlanır.

Eyni cinsli yığımın tərkinbindəli əlamətin fərdi qiymətlərinin müxtəlifliyi **əlamətin variasiyası** adlanır. Əlamətin variasiyası dedikdə, əlamətin dəyişməsini başa düşmək lazımdır. Əlamətin variasiyası müxtəlif amillərin birgə təsiri nəticəsində baş verir.

Tutaq ki, x –in miqdar əlamətlərini (diskret və ya kəsilməz) öyrənmək üçün həcmi n olan ümumi yığımdan $x_1, x_1, \dots, x_k$ seçmə ayrılmışdır. X əlamətinin müşahidə olunduğu x_i qiymətlərinə **variantlar** deyilir.

Variasiya sırasının x_i variantlar və onlara uyğun n_i tezlikləri (bütün tezliklərin cəmi seçmənin həcminə bərabərdir) və ya W_i nisbi tezlikləri (nisbi tezliklərin cəmi vahidə bərabərdir) cədvəlinə seçmənin statistik paylanması deyilir. Seçmənin statistik paylanmasının intervallar ardıcıllığı və onlara uyğun tezlikləri şəklində də vermək olar.

Seçmə tezliklərin paylanması:

x_i	2	5	7	11	15	18
n_i	1	3	5	2	16	3

burada x_i- variantların qiymətləri, n_i- variantların tezlikləri seçmənin həcmi $n = 20$.

Nisbi tezliklərin paylanması

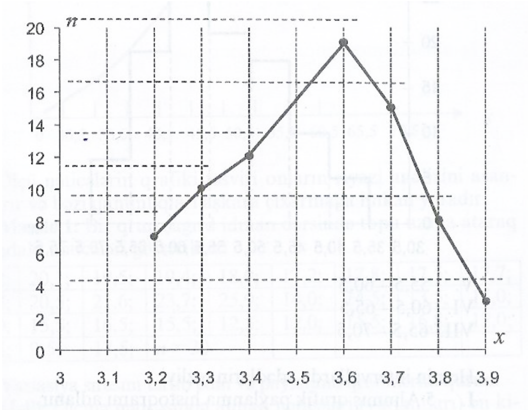
x_i	2	5	7	11	15	18
W_i	0,05	0,15	0,25	0,1	0,3	0,15

Empirik paylanmanı qrafiki şəkildə poliqon, histoqramma və kumulyata qrafikləri kimii təsvir etmək olar.

Paylanma poliqonu. Bu qrafik ölçü nəticələrinə əsasən dekort koordinat sistemi üzərində qurulur.

Absis oxu (OX) üzərində ölçülər nəticəsində alınmış ədədlər nöqtələr şəklində qeyd olunur. Ordinat oxu (OY) üzərində isə ədədlərin tezliyi yerləşdirilir.

Misal 1: Tutaq ki, uzunluğa tullananların yarə.ə zamanı aşağıdakı nəticələr alınmışdır: 3,20 3,30 3,40 3,60 3,70 3,80 3,90. Bu ədədlərin tezliyi aşağıdakı kimi olmuşdur: 7, 10, 10, 12, 19, 15, 8, 3. Alınmış nəticələr əsasında paylanma poliqonu qrafikini qururuq. Alınma əyri paylanma poliqonu qrafiki adlanır.

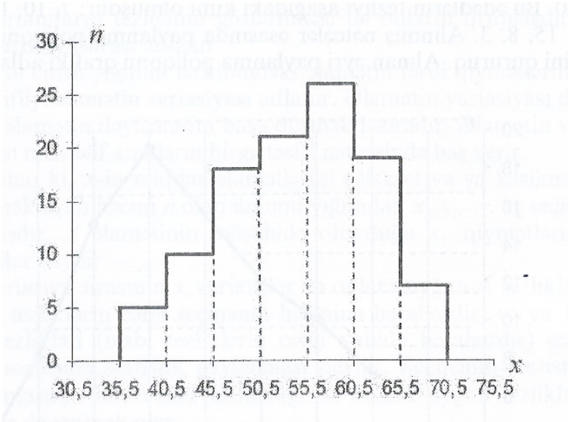


Paylanma histoqramı. Bu qrafik da paylanma poliqonu kimi dekart koordinat sistemi üzərində qurulur, ancaq fərqi ondan ibarətdir ki, ölçü nəticələri müəyyən intervallarla alındıqda qurulur.

Histoqramanı almaq üçün absis oxunda (OX) hər bir intervalın üzərində hündürlüyü uyğun tezliyə mütənasib olan düzbucaqlılar qurulur.

Misal 2. Tutaq ki, ölçmə nəticəsində alınan ədədlər intervallarla verilib

I. 35,5-40,5
II. 40,5-45,5
III. 45,5-50,5
IV. 50,5-55,5



V.   55,5-60,5

VI.   60,5-65,5

VII.   65,5-70,5

Həmin intervallarda ədədlərin tezliyi:

I. –5 Alınmış qrafik paylanma histoqramı adlanır.

II. – 10

III. – 18

IV. – 21

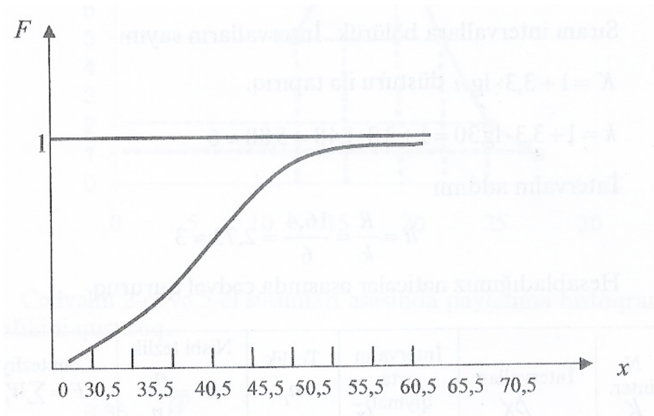
V. – 26

VI. – 19

VII. – 7

Kumulyata. Bu qrafik da dekart koordinat sistemində qurulur. Ordinat oxu üzərində cəm tezlikləri qeyd olunur, absis oxunda isə - ölçü zamanı alınan nəticələr intervallar şəklində.

Alınan əyriyə kumulyata deyilir.



Ölçü nəticələrin qrafiki təsviri onların riyazi analizini asanlaşdırır və bəzi qanunluqları aşkara çıxarmağa imkan yaradır.

Məsələ 1: Bir qrup şagird idman dərsində topu uzağa ataraq aşağıdakı nəticələri göstəriblər:

18,2	20,1	19,5	19,4	18,0	17,2	17,8	17,5	17,7
20,3	20,5	21,6	23,7	25,9	14,0	14,5	13,5	15,0
15,0	15,5	16,5	15,5	12,5	12,0	15,5	16,8	12,0
10,5	9,5	17,5	n = 30					

Variasiya sırasını tərtib edin və paylanma qrafiklərini qurun.

Həlli: Ölçmə nəticəsində alınan nəticələri (variantları) ən kiçik variantdan başlayaraq artma qaydasında bir birinin ardınca yazırıq.

9,5	10,5	12,0	12,0	12,5	13,5	14,0	14,5	15,0
15,0	15,5	15,5	15,5	16,5	16,8	17,2	17,5	17,5
17,7	17,8	18,0	18,2	19,4	19,5	20,1	20,3	20,5
21,6	23,7	25,9						

Variasiya genişliyin hesablayaq

$$x_{\min} = 9{,}5; \qquad x_{\max} = 25{,}9$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 25{,}9 - 9{,}5 = 16{,}4.$$

Sıraı intervallara bölürük. İntervalların sayını

$K = 1 + 3{,}3 \cdot \lg n$ düsturu ilə tapırıq.

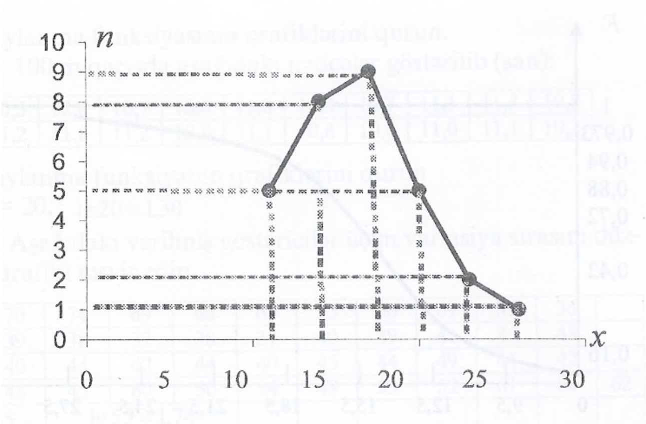
$k = 1 + 3{,}3 \cdot \lg 30 = 1 + 3{,}3 \cdot 1{,}48 = 5{,}88 \approx 6$ İntervalın addımı

$$h = \frac{R}{k} = \frac{16,4}{6} = 2,73 \approx 3.$$

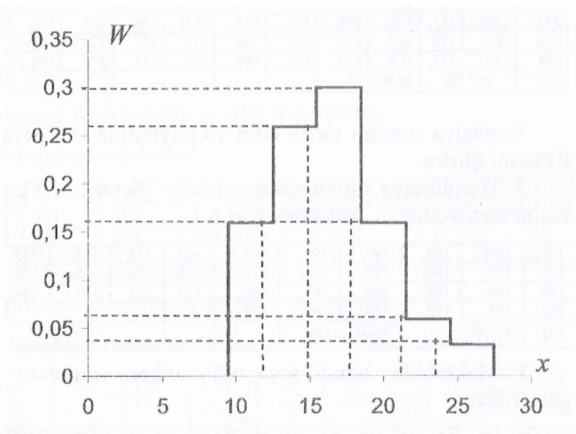
Hesabladığımız nəticələr əsasında cədvəl qururuq

№ inter. k	İntervallar	İntervalın orta qiyməti	Tezlik n_i	Nisbi tezlik $W = \frac{n_i}{n}$	Cəm tezliyi $F = \sum W_i$
1	9,5 – 12,5	11	5	0,16	0,16
2	12,5 – 15,5	14	8	0,26	0,42
3	15,5 – 18,5	17	9	0,30	0,72
4	18,5 – 21,5	20	5	0,16	0,88
5	21,5 – 24,5	23	2	0,06	0,94
6	24,5 – 27,5	26	1	0,033	0,973

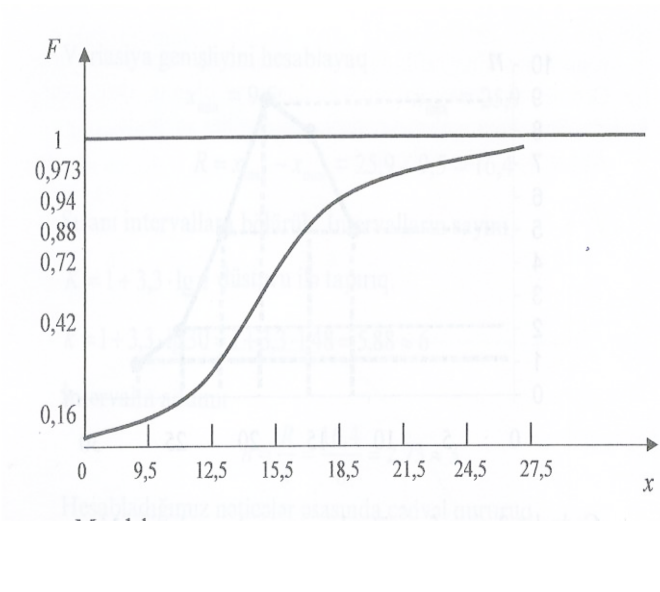
Cədvəlin 3-cü və 4-cü sütunları əsasında paylanma poliqonu qrafikini qururuq



Cədvəlin 2-ci və 5-ci sütunları əsasında paylanma histoqram qrafikini qururuq.



Cədvəlin 2-ci və 6-cı sütunları əsasında kumulyata qrafikini qururuq.



Məsələlər:

1. Paylanma funksiyasının qrafikin qurun.

100 m qaçışda aşağıdakı nəticələr göstərilib (san):

10,5	12,0	10,7	10,6	11,0	10,8	10,7	11,1	11,3	10,8
11,2	11,8	11,2	10,9	11,1	10,8	10,6	11,0	11,1	10,2

Variasiya sırasını tərtib edin və paylanma funksiyanın qrafiklərini qurun

$$n = 20, \quad \lg 20 = 1{,}30.$$

2. Yüngül atletlər uzunluğa tullanmada aşağıdakı nəticələri göstəriblər:

7,2	7,6	6,9	7,1	7,4	6,8	7,5	7,3	6,9	8,2

Göstərilən nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

3. Yadro itələmədə idmançılar aşağıdakı nəticələri əldə etmişdilər:

18,2	18,3	18,1	18,8	17,8	18,4	17,4			

Nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

3.9. Misalların orta ölçülər üsulu vasitəsilə həlli

Orta ölçülər üsulu ilkin göstəricilərin emalı üsulu sayılır. Yuxarıda qeyd olunduğu kimi, onun əsas xüsusiyyəti ilkin materialın sıxılmasıdır. Əsasən isə, ilkin rəqəmlər $\bar{x}, \sigma^2$, σ və ν göstəriciləri ilə çəlumatın mühüm itkisi olmadan əvəz oluna bilər.

Belə ki, 1.1. misalında bu situasiya təsvir olunub: start reaksiya 1,25 san 1,45 san qədər start reaksiyasını göstərən 43 idmançı $\bar{x} \pm \sigma, \nu$ parametrləri, yəni (1,36$\pm$0,06) san ilə xarakterizə edilə bilər.

İlkin məlumatın bu şəkildə təqdim olunması təlim işi üçün xeyirli olan bir sıra praktiki məsələləri həll etmək imkanını verir: məs., iki qrup idmançıları bir-biri ilə müqayisə etmək. İdmanda bu cür məsələyə tez-tez rast gəlir, məs., idmançıların təcrübə aparılan və eksperimental qrupları aralarında olan prinsipial fərqlərin aşkar edilməsi üçün müqayisə olunur; yaş və cins üzrə fərqlənən idmançılar qrupunun göstəriciləri; müxtəlif proqramları, metodikalar üzrə məşq edən idmançılar qrupu; müxtəlif şəraitdə, rejimlərdə, məşq yüklərinin ayrı-ayrı həcmi və intensivliyi ilə, müxtəlif vaxt, məkan və güc göstəricilərin istifadəsi vasitəsilə məşq edən idmançılar qrupu. Ən sonunda, yalnız sınaqda keçirilən qruplar yox, habelə eyni göstərici üzrə nəticələri yoxlanılmış bir fərdin yekunları müqayisə olunmalıdır. Bu halda fərdi idman imkanlarının dinamikasını müşahidə etmək və beləliklə, onun məşq metodikasını mükəmməl etmək mümkündür.

Məsələ. Qaçış sürəti (m/san) üzrə kontrol (x_i) (cədv. 11) və eksperimental (y_i) (cədv. 12) idmançılar qruplarının nəticələrini müqayisə edin.

İdmançıların təcrübə aparılan qrupunun nəticələrinin emalı

Cədvəl 11

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	2,8	5	14,0	-0,3	0,09	0,45
2	3,0	7	21,0	-0,1	0,01	0,07
3	3,1	9	27,9	0,0	0,00	0,00
4	3,2	8	25,6	0,1	0,01	0,08
5	3,3	6	19,8	0,2	0,04	0,24
6	3,4	5	17,8	0,3	0,09	0,45
Yekun	-	40	125,3	-	-	1,29

$$\bar{x} = 125{,}3/40 = 3{,}13 \approx 3{,}1 m/san$$

$$\sigma_x^2 = 1{,}29/40 = 0{,}3(m/san^2)$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}3} \approx 0{,}18 \approx 0{,}2\ m/san$$

$$V_x = 0{,}2/3{,}1 * 100\% \approx 6{,}5\%.$$

İdmançıların kontrol qrupunun xarakteristikası:

$$\bar{x} \pm \sigma_x \ = (3{,}1 \pm 0{,}2) m/san;\ v_x = 6{,}5\%.$$

İdmançıların eksperimental qrupunun nəticələrinin emalı

Cədvəl 12

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	3,1	7	21,7	-0,2	0,04	0,28
2	3,2	12	38,4	-0,1	0,01	0,12
3	3,3	11	36,3	0,0	0,00	0,00
4	3,4	10	34,0	0,1	0,01	0,10
Yekun	-	40	130,4	-	-	0,50

$$y = 130{,}4/40 = 3{,}26 \approx 3{,}3 m/san$$

$$\sigma_y^2 = 0{,}50/40 = 0{,}01 (m/san^2)$$

$$\sigma_y \ = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1\, m/san$$

$$V_y \ = 0{,}1/3{,}3 * 100\% \approx 3{,}0\%.$$

İdmançıların eksperimental qrupunun xarakteristikası:

$$\bar{y} \pm \sigma_y \ = (3{,}3 \pm 0{,}1) m/san;\ v_y = 3{,}0\%.$$

Eksperimental və kontrol qrup idmançıların nəticələrini əldə edərək, iki sıranın parametrlərini müqayisə etmək və nəticələrə gəlmək imkanı yaranır.

Eksperimental qrup daha yüksək nəticələr göstərib ($\bar{y} = 3{,}3 m/san > \bar{x} = 3{,}1 m/san$), bu halda hazırki qrupda ilkin göstəricilərin yayınma əmsalı daha azdır ($\sigma = 0{,}1 m/san, v = 3{,}0\%$), nəinki kontrolda ($\sigma = 0{,}2 m/san, v = 6{,}5\%$). Bu uğurlu eksperiment haqda dəlalət edir, onun nəticəsi belədir: idmançılar qaçışın daha yüksək sürətini göstəricilərin daha yüksək sabitliyi şərtilə göstərdilər.

İdmançıların yaş qruplarını müqayisə edən və onların əsas göstəricilərinin dinamikasını təyin edək.

Məsələ. 14 (x_i) və 15 (y_i) yaşlı iki qrup sınaqdan keçirilənlərdə əllərin yellənməsi ilə yerdən tullanmağın hündürlüyü (sm) ölçülmüşdür. Tullanmaın hündürlüyünü yaşdan asılı olaraq dəyişilməsini təhlil edin.

14 yaşlı məktəblilərin tullanma hündürlüyünün nəticələrinin emalı

Cədvəl 14

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	30,2	5	151,0	34,8	0,09	174,0
2	32,4	7	226,8	13,7	0,01	95,5
3	35,0	9	315,0	1,2	0,00	10,8
4	38,0	8	304,0	1,9	0,01	15,2
5	40,0	4	160,0	15,2	0,04	60,8
6	41,2	7	288,4	26,0	0,09	182,0
Yekun	-	40	1445,2	-	-	538,7

$$\bar{x} = 1445{,}2/40 = 36{,}13 \approx 36{,}1sm$$
$$\sigma_x^2 = 538{,}7/40 \approx 0{,}03sm$$
$$\sigma_x = \sqrt{13{,}47} \approx 3{,}7sm$$
$$V_x = 3{,}7/36{,}1 * 100\% \approx 10{,}2\%.$$
$$\bar{x} \pm \sigma_x = (36{,}1 \pm 3{,}7)sm$$

15 yaşlı məktəblilərin tullanma hündürlüyünün nəticələrinin emalı

Cədvəl 15

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	33,0	4	136,0	-0,2	4,84	19,36
2	35,2	9	316,8	-0,1	1,00	9,00
3	36,0	10	360,0	0,0	0,04	0,40
4	36,4	8	291,2	0,1	0,04	0,32
5	38,0	7	266,0		3,24	22,68
6	39,5	2	79,0		9,00	18,00
Yekun	-	40	1449,0	-	-	69,76

$$\bar{y} = 1449{,}0/40 = 36{,}22 \approx 36{,}2sm$$
$$\sigma_y^2 = 69{,}76/40 \approx 1{,}74sm$$
$$\sigma_y \; = \sqrt{1{,}74} = 1{,}34\ sm$$
$$V_y \; = 1{,}3/36{,}2 * 100\% \approx 3{,}6\%$$
$$\bar{y} \pm \sigma_y \; = (36{,}2 \pm 3{,}6)sm.$$

14 və 15 cədvəllərində verilən məlumatların müqayisəsi göstəririk ki, 14 yaşlı tullananların nəticələri bir ildən sonra azca yaxşılaşıb, daha sabit olub.

FƏSİL 4
BAŞ PARAMETRLƏRİN QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ
BAŞ YIĞIM VƏ SEÇMƏ
NÖQTƏVİ QİYMƏTLƏNDİRMƏ

4.1. Statistik nəticələr nəzəriyyəsinin üsulları

Baş yığımın təsviri üçün ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi modellərindən istifadə olunur. Bununla bağlı ehtimalların paylanması əsas məlumatı verir. Baş yığım üçün hesablanmış müxtəlif təsviri ölçülənin qiymətləri **parametrlər** adlanır. Baş parametrlərə aid edilir:

- Seçmə göstəricilər;
- Dəqiqlik göstəricisi;
- Etibarlılıq meyarı;
- Seçmənin həcmi.

Seçmə göstəricisi: $\bar{A} = \tilde{A} + \Delta$

$\bar{A}$– baş parametri (μ, σ)

$\tilde{A}$– seçmə göstəricisi $(\bar{x}, S)$

Δ – baş parametrin proqnozu zamanı buraxıla biləcək, maksimal mütləq xəta.

$$\Delta = t \cdot S_{\bar{x}}$$

Δ − etibarlılıq kriteriyası olub, baş parametrin həqiqətən etibarlı interval $\left(\tilde{A} \pm \Delta\right)$ sərhədləri daxilində yerləşməsi ehtimalını ifadə edir.

$S_{\bar{x}}$ – baş parametrin qiymətləndirmə dəqiqliyinin göstəricisi və ya **seçmə göstəricisinin reprezentativlik əmsalı [15].**

Seçmənin həcmi: aşağıdakı düsturdan təyin oluna bilər:

$$n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}.$$

Burada, σ^2 – dispersiya, t – etibarlılıq kriteriyası, Δ - baş yığımın orta qiymət göstəricisinin dəqiqlik dərəcəsi. Məsələn, tutaq ki, orta qiymətinin xətası 5%-i aşmayan seçmənin həcmini təyin etmək lazımdır:

$$\Delta = 5\%$$

İlkin verilənlərə əsasən məlumdur ki, standart meyl (σ)10%-i aşmır.

$$\sigma^2 = 10\%.$$

Əhəmiyyət səviyyəsi $\alpha = 0{,}05 \rightarrow$

Etibarlıq kriteriyası $t = 1{,}96$

Onda, $n = \frac{1{,}96^2 \cdot 10^2}{5^2} \approx 16$

Sərbəstlik dərəcəsi. Hər hansı bir obyekti nəzərdən

keçirək. Tutaq ki, bu obyektin müəyyən sayda xarakteristikaları var. Bu xarakteristikaların qarşılıqlı asılı olmayan yerdəyişmələrinin sayı **sərbəstlik dərəcəsi** adlanır.

Məsələn, əgər 3 göstəricinin cəmi 9-a bərabərdirsə, $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Bu cəmin hüdudları daxilində ilk 2 göstərici x_1, x_2 istənilən qiymət ala bilər. Əgər bu iki qiymət məlumdursa, onda x_3 avtomatik olaraq müəyyənləşir. Yəni burada sərbəstlik dərəcəsi

$$\gamma = 3 - 1 = 2$$

İki asılı olmayan seçməni nəzərdən keçirək. Onda birinci seçmənin sərbəstlik dərəcəsi $(n_1 - 1)$, ikinci seçmənin sərbəstlik dərəcəsi $(n_2 - 1)$. Bu iki seçmə arasındakı fərqin statistik əhəmiyyət dərəcəsini qiymətləndirən zaman hər 2 seçmənin qiymətlərinə istinad edilir. Ona görə də bu halda sərbəstlik dərəcəsi

$$\gamma = n_1 - n_2 - 2$$

Eyni həcmli 2 asılı (bağlı) seçmələr üçün $\gamma = n - 1$. Ümumiyyətlə, seçmə əsasında əldə edilmiş məlumat baş yığım haqqında nəticə çıxarmağa imkan verir. Bu məqsədlə istifadə olunan statistik nəticələr nəzəriyyəsinin üsulları 2 sinifə bölünür:

1. Parametrlərin qiymətləndirilməsi, hipotezlərin

yoxlanılması

2. Qiymətləndirmənin mahiyyəti və nöqtəvi qiymətləndirmə, qiymətləndirmənin əsas vəzifəsi seçmə göstəricilər əsasında baş yığımın paylanmasının parametrləri üçün ən yaxşı qiymətlərin əldə edilməsidir. Seçmə zamanı baş yığım parametrlərinin qiymətləri və bu qiymətlərin alınma prosesi qiymətləndirmə nəzəriyyəsində qiymətləndirmə adlanır. Riyazi statistikada – nöqtəvi qiymətləndirmə qiymətləndirilən parametrə təxminən yaxın olan müşahidələr əsasında hesablanan ədəddir. Seçmə zamanı baş yığım parametrlərinin qiymətləri və bu qiymətlərin alınma prosesi qiymətləndirmə nəzəriyyəsində qiymətləndirmə adlanır. Riyazi statistikada-nöqtəvi qiymətləndirmə qiymətləndirilən parametrə təxminən yaxın olan müşahidələr əsasında hesablanan ədəddir. Seçmə göstəricilərə əsasən baş yığım parametrlərinin qiymətlərinin təyin olunması – **nöqtəvi qiymətləndirmə** adlanır.

4.2. Statistik xəta. Orta qiymətin standart xətası

Seçmə zamanıəldə edilmiş $\bar{x}$ və S^2 qiymətləri baş yığımın μ və σ^2 parametrlərinin həqiqi qiymətləri ilə üst üstə düşmür. Eyni bir baş yığımdan götürülmüş müxtəlif seçmələr üçün də $\bar{x}, S^2$ qiymətləri müxtəlif olur. Baş parametrlərin həqiqi qiymətləri ilə seçmə qiymətlər arasında olan fərqə **statistik xəta** deyilir.

Eyni bir baş yığımdan çoxlu sayda asılı olmayan n həcmli seçmələr götürək və onlardan hər biri üçün orta qiymətləri hesablayaq. Onda məlum olur ki, əldə edilmiş orta qiymətlər μ-ya bərabər orta qiymət ətrafında seçmənin ayrı-ayrı variantlarına nisbətən $\sqrt{n}$ dəfə az variasiya edəcək. Onda baş yığımın orta qiymətinin standart xətası

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

σ – məlum olmadığı üçün onu seçmə qiyməti ilə əvəz edirlər. Beləliklə, seçmə orta qiymətin standart xətası.

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (N = \infty; \;\; n \geq 20).$$

$S_{\bar{x}}$ kəmiyyəti baş orta qiymət μ seçmə orta qiymətlə əvəz edildikdə yol verilən xətanı göstərir. Yəni baş yığımın orta qiyməti ilə seçmə orta qiymət arasındakı fərqi (xətanı) ifadə edir. Əgər bu xəta çox böyük olsa, onda

a) Seçmənin həcmi böyüdülür və ya

b) Interval qiymətləndirilməsinə müraciət olunur.

Ona görə də $\bar{x}$ nin dəqiqliyini qiymətləndirərkən onu $\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$ şəklində ifadə edirlər.

4.3. Baş yığım və seçmənin həcminin standart xətaya təsiri

$$N = \infty, \quad n < 20 \rightarrow S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

$$N - sonlu\,, \quad n < 20 \rightarrow S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$N - sonlu\,, \quad n \geq 20 \qquad S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{n}{N}}.$$

İdmançıların 100 m- məsafəyə qaçışda göstərfikləri nəticələr təhlil olunur. 100 nəfərdən ibarət seçmə üzərində aparılan tədqiqatlar nəticəsinə məlum olur ki, $\bar{x} \pm S_{\bar{x}} \rightarrow (13{,}7 \pm 0{,}4)$. İndi bu təcrübəni bir neçə dəfə seçmə üzərində aparsaq onda orta qiymət necə dəyişər? Aydındr ki, seçmələrin həcmi nə qədər böyük olsa, orta qiymətlərin variasiyası da bir o qədər kiçik olacaq.

4.4. İnterval qiymətləndirilməsinin mahiyyəti

Baş parametrlərin (μ, σ^2) həqiqi qiymətlərinin böyük ehtimalla daxil olduğu intervalların sərhədlərinin təyin edilməsinə - **interval qiymətləndirilməsi** deyilir. Seçmə xarakteristikalarının $(\bar{x}, S)$ müəyyən qiymətləri əsasında baş yığım parametrlərinin hər hansı ehtimalla daxil olduğu intervalı təyin etmək olar. Baş parametrlər barəsində tam əminliklə mühakimə yürütmək üçün kifayət edən ehtimallar inam ehtimalları adlanır.

İnam ehtimalı – baş parametrin seçmə göstəricilərə görə qiymətləndirilən həqiqi qiymətlərinin etibarlı interval tərəfindən tam əhatə olunma ehtimalıdır. Qiymətləndirilən baş parametrlərin verilmiş inam ehtimalı ($q = 0{,}95$; $q = 0{,}99$; $q = 0{,}999$; $q = 0{,}8$; $q = 0{,}975$; $q = 0{,}98$ və s.) ilə daxil olduğu interval **etibarlı interval** adlanır.

4.5. İnam ehtimalları. Etibarlı interval. Etibarlıq əmsalı

Ədəbiyyatda çox zaman belə bir termin işlədilir: $100(1 - \alpha)\%$-li etibarlı interval. Burada $q = 1 - \alpha$ inam ehtimalıdır. Yəni – baş parametrin seçmə göstəricilərə görə qiymətləndirilən həqiqi qiymətlərinin etibarlı interval tərəfindən tam əhatə olunma ehtimalıdır.

α – etibarlıq əmsalı olub, baş parametrin etibarlı interval sərhədlərindən kənarda qalma ehtimallarını ifadə edir. $\alpha = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}01$; $\alpha = 0{,}001$ və s.

ν – sərbəstlik dərəcəsi statistic xarakteristikaların qiymətləndirilməsində istifadə olunan asılı olmayan seçmənin sayını ifadə edir.

4.6. Kvantil anlayışı

Müəyyən paylanma qanununa tabe olan hər hansı təsadüfi kəmiyyətin müəyyən ehtimalla aşa bilmədiyi qiymətə **kvantil** deyil.

Styudent paylanmasının kvantili belə işarə olunur: $t_{\alpha,\nu}$

Burada α – etibarlıq əmsalı, ν– sərbəstlik dərəcəsi:

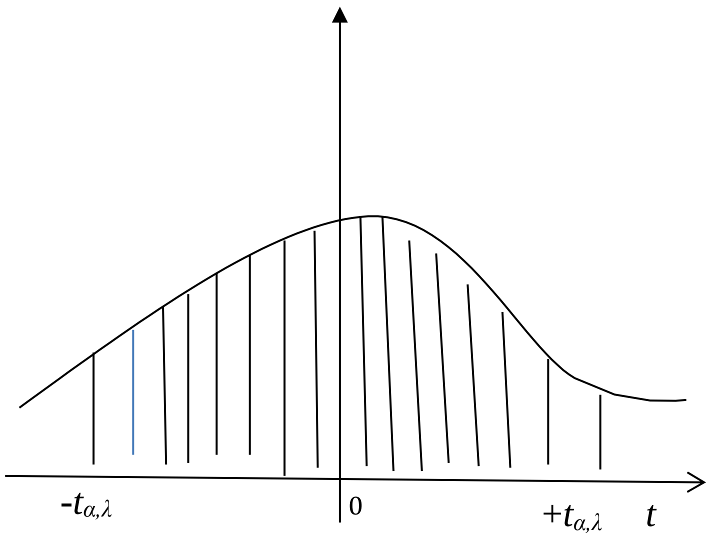
$$P(|t| \leq t_{\alpha,\nu}) = q$$

q – inam ehtimalı.

Aşağıdakı şəkildə, student paylanma qanununa tabe olan təsadüfi kəmiyyətin paylanma sıxlığı funksiyasının (W) qrafiki təsvir edilmişdir:

$$W(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(k/2)}\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{(k+1)}{2}}$$

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-k}\, dx$$



Şəkildəki ştrixlənmiş sahə inam ehtimalının qiymətinə müvafiqdir.

$$q = \int_{-t_{\alpha,\nu}}^{t_{\alpha,\nu}} W(t)dt = P[-t_{\alpha,\nu} \le t \le t_{\alpha,\nu}]$$

Etibarlılıq əmsalının tərifinə əsasən:

$$\alpha = P\left(t > t_{\alpha,\nu}\right) = \int_{t_{\alpha,\nu}}^{\infty} W(t)dt = F(t_{\alpha,\nu})$$

F – styudentin paylanma funksiyasıdır.

$$F(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\Gamma(k/2)} \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right) e^{-\frac{(k+1)}{2}} dx$$

$$\alpha = F\left(t_{\alpha,\nu}\right)$$

$$t_{\alpha,\nu} = F^{-1}(\alpha)$$

$$\nu = 1,2, \dots ,120, \dots 500, \infty$$

$$\alpha = 0{,}05{:}\, 0{,}01;\, 0{,}001;\, 0{,}1.$$

Bu düsturların köməyi ilə Styudent kriteriyasının böhran qiymətləri (kvantili) hesablanır və xüsusi cədvəllər tərtib olunur.

4.7. Normal paylanmış baş yığımın riyazi gözləməsi üçün etibarlı intervalın qurulması

Normal paylanmış baş yığımın μ riyazi gözləməsi üçün etibarlı intervalı formalaşdıraq. Baş yığımdan götürülmüş $(n < 30)$ həcmli seçmənin $\bar{x}$ orta qiymətini normallaşdıraq.

İsbat edilmişdir ki, baş yığımın seçmələri normal paylanarsa,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S_{\bar{x}}}$$

təsadüfi kəmiyyət styudentin t – paylanma qanununa tabe olacaq. Qiymətləndirilən μ parametrinin həqiqi qiyməti üçün inam ehtimalının qiyməti qabaqcadan verilir:

$$q = 1 - \alpha = P\left(-t_{\alpha,\nu} \le t \le t_{\alpha,\nu}\right) = \int_{-t_{\alpha,\nu}}^{t_{\alpha,\nu}} W(t)dt$$

$t_{\alpha,\nu}$ baş yığımın orta qiyməti ilə seçmə orta qiymət arasındakı fərqin $S_{\bar{x}}$-ni (orta qiymətin standart xətası) aşmaması şərtini ifadə edən ehtimal göstəricisidir. $t_{\alpha,\nu}$ - $\nu = n - 1$ sərbəstlik dərəcəsinə malik styudentin t- paylanması ilə ifadə olunur. (Styudent kriteriyasının böhran qiyməti) və onun artıq hesablanmış qiyməti xüsusi statistik cədvəldən seçilir.

$$-t_{\alpha,\nu} \le t \le t_{\alpha,\nu}$$

$$-t_{\alpha,\nu} \le \frac{\bar{x} - \mu}{S_{\bar{x}}} \le t_{\alpha,\nu}$$

$$\bar{x} - -t_{\alpha,\nu}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha,\nu}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Beləliklə baş yığımın orta qiyməti üçün etibarlı intervalın sərhədləri aşağıdakı ardıcıllıqla tapılır:

1) Əldə edilmiş n həcmli süçmə üçün $\bar{x}$ və S hesablanır.
2) İnam ehtimalının qiyməti verilir.
3) Styudentin t - paylamaa cədvəlindən $t_{\alpha,\nu}$ böhran (sərhəd) qiyməti təyin olunur.

Məsələn, tutaq ki,

$$n = 12, \nu = n - 1 = 11, \alpha = 0{,}05(q = 0{,}95)$$

$$t_{\alpha,\nu} = 2{,}2;\ \bar{x} = 15{,}4;\ S = 0{,}94$$

$$15{,}4 - 2{,}2\frac{0{,}94}{\sqrt{12}} \le \mu \le 15{,}4 + 2{,}2\frac{0{,}94}{\sqrt{12}}$$

$$15{,}4 - 0{,}598 \le \mu \le 15{,}4 + 0{,}598$$

$$14{,}802 \le \mu \le 15{,}998.$$

Məlumdur ki, $n \ge 30$ olduqda styudentin t paylanması normal paylanmaya çevrilir. Bu halda etibarlı interval aşağıdakı düsturdan təyin olunur:

$$\bar{x} - U_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + U_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Burada, U_α normallaşdırılmış paylanmanın faiz nöqtələridir. Cədvəldə standart inam ehtimalları üçün U_α -nın qiymətləri verilib.

α	q	U_α
0,05	0,95	1,96
0,01	0,99	2,58
0,001	0,999	3,28

Məsələn, tutaq ki, $n = 50$ idmançının 100 m məsafəyə qaçışda göstərdiyi orta nəticə:

$$\bar{x} = 15{,}4(san), S = 0{,}94(san),$$

$$\alpha = 0{,}05, U_\alpha = 19{,}6$$

$$15{,}4 - 1{,}96 \frac{0{,}94}{\sqrt{50}} \leq \mu \leq 15{,}4 + 1{,}96 \frac{0{,}94}{\sqrt{50}}$$

$$15{,}1 \leq \mu \leq 15{,}7.$$

4.8. Disperiya və variasiya əmsalı üçün etibarlı intervalın qurulması

1) $\sigma^2 - U_\alpha \cdot S_{\sigma^2} \leq \sigma^2_{bas} \leq \sigma^2 + U_\alpha \cdot S_{\sigma^2}$ $\qquad S_{\sigma^2} = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n}}$

dispersiyanın standart xətası, σ^2 seçmə dispersiya

2) $v \cdot \frac{1}{1+\tilde{U}_\alpha \sqrt{1+2v^2}} \leq v_{bas} \leq v \cdot \frac{1}{1-\tilde{U}_\alpha \sqrt{1+2v^2}}$

$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} 100\%, \tilde{U}_\alpha = \frac{U_\alpha}{\sqrt{2(m-1)}}$

3) Baş yığımının orta $S(1-\tilde{q}) \leq \sigma \leq S(1+\tilde{q})$

S- seçmə orta kvadratik paylanma $\tilde{q}$- qiyməti xüsusi statistik cədvəldən seçilir. Məsələn:

$$\alpha = 0{,}05; n = 30 \rightarrow \tilde{q} = 0{,}28.$$

Misal

$n = 30$ idmançıda O_2 məsrəfi $x_i\left(\frac{l}{dəq}\right)$ ölçülüb. Baş yığımın həcmi $N = 300$

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^6 x_i n_i}{n} = \frac{130{,}1}{30} = 4{,}33$$

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \frac{1{,}51}{30} = 0{,}05$$

$$S = 0{,}22$$

$$(\bar{x} \pm S) = (4{,}3 \pm 0{,}2)\frac{litr}{dəq}$$

N	x_i	n_i
1	4	5
2	4,2	6
3	4,3	8
4	4,5	4
5	4,6	4
6	4,7	3

Seçmənin orta kvadratik xətası

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{n}{N}} = \frac{0{,}2}{\sqrt{30}}\sqrt{1 - \frac{30}{300}} = 0{,}03$$

$$\alpha = 0{,}05; \nu = n - 1 = 29;\ t_{\alpha,\nu} = 2{,}05$$

$$\bar{x} - t_{\alpha,\nu}S_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha,\nu}S_{\bar{x}}$$

$$4{,}3 - 0{,}03 \cdot 2{,}05 \leq \mu \leq 4{,}3 + 0{,}03 \cdot 2{,}05$$

$$4{,}24 \leq \mu \leq 4{,}36$$

$$\bar{\mu} \approx \bar{x} \quad \bar{\mu} = \frac{1{,}24 + 4{,}36}{2} = 4{,}3$$

$$\bar{x} = 4{,}33$$

Deməli, baş yığımın orta qiyməti ilə seçmə orta qiymət demək olar ki, üst-üstə düşür. Amma bunu hökm edərkən 0,95 ehtimalla $S_{\bar{x}} = 0{,}03$ qədər xətaya yol veririk.

FƏSİL 5
HİPOTEZLƏRİN YOXLANILMASI. ƏHƏMİYYƏT KRİTERİYALARI. ƏSAS ANLAYIŞLAR.

5.1. Statistik kriteriya. Statistik hipotez

Statistik hipotez – seçmə əsasında təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu haqqında formalaşan fərziyyədir. Statistik hipotez ölçmə nəticələrinin statistik xarakteristikalarına nəzərən riyazi üsullarla yoxxlanılan fərziyyədir. Başqa sözlə desək, baş yığımın paylanması haqqında mühakimədir.

Məsələn:

1) Baş yığımın paylanması üstlü qanuna tabedir;

2) Üstlü qanunla dəyişən 2 seçmənin riyazi gözləmələri bir-birinə bərabərlədir;

3) Bir-birindən asılı olmayan 2 seçmədə müşahidə nəticələri eyni normal paylanma qanununa tabedir.

4) Müşahidənəticələri normal paylanmaya malikdir və s.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma parametrini birqiymətli xarakterizə edən hipotez **Sadə hipotez** adlanır. **Mürəkkəb hipotez** isə sonlu və sonsuz sayda sadə hipotezlər çoxluğundan ibarət olur. Verilmiş əhəmiyyət səviyyəsində bu və ya digər statistik hipotezi qəbul və ya istisna edənriyazi qaydaya-**statistik əhəmiyyət kriteriyası deyilir.** Başqa sözlə, statistik kriteriya qabaqcadan verlmiş ehtimalla həqiqi hipotezi qəbul edən və yalan hipotezi istisna edən qaydadır. Bütün kriteriyalar 2 qrupa bölünür: **parametrik və qeyri - parametrik [4]. Parametrik kriteriyalar** normal paylanma qanununun mütləq mövcudluğunu nəzərdə tutur. Yəni normal paylanma qanununun əsas göstəriciləri – orta qiymət $(\bar{x})$ və orta kvadratik paylanma (σ) mütləq təyin olunmalıdır. Parametrik kriteriyalar baş yığım parametrlərinin paylanma hipotezlərinin yoxlanılmasına xidmət edir.

Qeyri - parametrik kriteriyalar - baş yığım parametrlərinə istinad etmədən hipotezi yoxlayır və seçmələrin elementləri arasındakı ranq (tərtib) fərqlərinə əsaslanır.

Tədqiqat nəticələri keyfiyyət və ya atributiv (yəni rəqəmdə ifadə olunmayan) əlamətləri əhatə edərkən bu parametrlərdən istifadə edilir.

5.2. Sıfır hipotezi. Alternativ hipotez

Fərz edək ki, müqayisə olunan qrupların baş parametrləri arasındakı fərq sıfra bərabərdir və seçmə göstəricilər arasında müşahidə olunan fərq təsadüfi xarakter daşıyır. İki müxtəlif baş yığımdan götürülmüş 2 seçməni nəzərdən keçirək. Yuxarıda ifadə etdiyiniz fərziyyə - **sıfır hipotezi** adlanır:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2; \quad \sigma_1 = \sigma_2.$$

Sıfır hipotezindən fərqli olan hər hansı hipotez **alternativ hipotez** adlanır:

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2; \quad H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2.$$

1. Müşahidə nəticələrinin paylanma funksiyası $N(0{,}1)$ $\mu = 0,\ \sigma = 1.$
2. Müşahidə nəticələri riyazi gözləməsi sıfır olan ($\mu = 0$) normal paylanmaya tabedir.

Tutaq ki, I fərziyəni sıfır hipotezi kimi qəbul etmişik. Onda II fərziyyə alternativ hipotez olacaq

$$H_0: \sigma = 1; \quad H_1: \sigma \neq 1$$

5.3.Əhəmiyyət səviyyəsi. Etibarlı ehtimal

Təsadüfi seçməyə görə H_0 hipotezinin qəbul və ya istisna edilməsi, müəyyən ehtimalla həqiqətə uyğun gəlir. Ona görə də 2 növ səhvə yol verilə bilər.

I növ xəta: Doğru olduğu halda sıfır hipotezinin rədd edilməsi (qəbul edilməməsi) ehtimalı testin **əhəmiyyət səviyyəsi** adlanır

$$\alpha = P(\overline{H}_0).$$

(Məsələn, $\alpha = 0{,}001(0{,}1\%)$ – hadisənin təsadüfi baş vermə şansı 1000 dənədən 1-dir.)

II növ xəta: Doğru olduğu halda sıfır hipotezinin qəbul edilməsi ehtimalı **inam (etibarlı) ehtimalı** adlanır

$$q = 1 - \alpha = P(\overline{H}_0).$$

5.4.Hipotezlərin yoxlanılmasının əsas mahiyyəti

Hipotezlərin yoxlanması məsələsi baş yığımla seçmələr arasında mövcud olan fərqərin təsadüfi və ya qanunauyğun amillərlə şərtlənməsi probleminə aydınlıq gətirir. Aydındır ki, fərq(meyl) çox kiçikdirsə, onda onun **təsadüfi olması** ehtimalı çox böyükdür.

Statistik hipotezləri yoxlayarkən təcrübə aparanın qərarını tam əminliklə qəbul etmək olmaz. Burada həmişə səhv qəbul edilmə riski mövcuddur. Bu riskin dərəcəsinin qiymətəndirilməsi hipotezlərin yoxlanılmasının əsas mahiyyətini təşkil edir. Təcrübə aparan fərqin ehtimalını ifadə edərkən **əhəmiyyət səviyyəsini** seçə bilər.

Eyni bir baş yığımdan çoxlu sayda seçmələr ayırmaq olar:

1) Əgər bu seçmələr korrekt seçilərsə, onda onların orta qiymətləri ilə baş yığımın orta göstəriciləri arasındakı fərq bir o qədər də böyük olmayacaq.

2) Əgər müxtəlif baş yığmalara mənsub olan seçmələr götürsək, onda bu fərq çox böyük olacaq.

3) Əgər seçmələr arasındakı fərq çox kiçik olarsa, onda faktiki onların eyni bir baş yığıma aid olmasını söyləmək olar. Onda deyirlər ki, **seçmələr arasındakı fərq statistik baxımdan**

əhəmiyyətli deyil.

4) Əgər bu fərq çox böyük olarsa, onda deyirlər ki, seçmələr arasındakı fərq **statistik baxımdan əhəmiyyətlidir. Yəni, onlar müxtəlif baş yığmalara mənsubdurlar.**

5.5. Statistik əhəmiyyət dərəcələrinin təyini. Hipotezərin yoxlanılması sxemi

Bədən tərbiyəsi və idman təcrübəsində statistik əhəmiyyət dərəcələrinin qiymətləndirilməsi çoxlu sayda praktiki məsələlərin həlli deməkdir. Məsələn, yəni tədris metodikasının, proqramların, tapşırıqlar kompleksinin, testlərin tətbiqi onların təcrübi yoxlanılması ilə nəzarət qrupu arasındakı prinsipal fərqləri müəyyənləşdirmək üçün xüsusi statistik metodlar – **statisik əhəmiyyət kriteriyalarından istifadə edilir**.

Hipotezlərin yoxlanılması proseduru aşağıdakı sxem üzrə həyata keçirilir:

1) Sıfır hipotezi qurulur: H_0: $(\bar{x} = \bar{y})$;
2) Əhəmiyyət səviyyəsi (α) seçilir;
3) Seçmənin statistik xarakteristikaları hesablanır;
4) Statistik hipotezin yoxlanılması üçün əhəmiyyət kriteriyası seçilir (Styudent, Fişer);
5) Seçilmiş əhəmiyyət səviyyəsində kriteriyanın hesabı və böhran qiymətləri müqayisə olunur;
6) Müqayisənin nəticələri əsasında hipotezin qəbul və ya rədd edilməsi barədə qərar qəbul edilir.

A) $t_{hes} < t_{\alpha,\nu}$

1) Verilmiş əhəmiyyət səviyyəsində H_0 hipotezi qəbul edilir.
2) Öyrənilən göstəriciyə görə statistik baxımdan qruplar bir-

birindən əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənmirlər.

3) Baş yığımın seçmələri arasındakı fərq təsadüfi amillərlə izah edilə bilər.

B) $t_{hes} > t_{\alpha,\nu}$

1) H_0 hipotezi rədd edilir.

2) Müşahidə olunan fərq statistik baxımdan əhəmiyyətlidir;

3) Seçmələr arasındakı fərq qanununa uyğun amillərlə bağlıdır;

4) Faktor əlaməti böyük ehtimalla nəticə əlamətinə həlledici təsir edir.

5.6. Statistik əhəmiyyət kriteriyaları və onların təsnifatı

Qabaqcadan verilmiş ehtimalla həqiqi hipotezi qəbul edən və yalnış hipotezi istisna edən qaydaya statistik kriteriya deyilir. Seçmə göstəricilərin sıfır hipotezini ödəyib-ödəmədiyini dəqiq müəyyən edən üsullara əhəmiyyət kriteriyaları deyilir. Statistik əhəmiyyət kriteriyaları seçmələr arasında olan fərqlərin statistik baxımdan əhəmiyyətli olub-olmadığını müəyyənləşdirir. Bu kriteriyalar tədqiqatlarda istifadə olunan formal dəqiq vasitədir. Praktiki əhəmiyət barədə rəy hadisəni öyrənən tədqiqatçı tərəfindən verilir. Burada təcrübə aparanın səhmi həqiqi kriteriya rolunu oynayır. Statistik əhəmiyyət kriteriyaları 3 qrupa bölünür:

1.Razılaşdırılmış (uzlaşdırılmış) - kriteriyalar baş yığımın və seçmənin paylanması əvvəlcə qəbul edilmiş nəzəri model ilə (çox zaman normal paylanma ilə) razılaşdırılan hipotezi yoxlayır.

2.Parametrik kriteriyalar – baş yığım parametrlərinin paylanma hipotezlərinin yoxlanılmasına xidmət edir. Normal paylanma qanununun mütləq mövcudluğunu, yəni normal paylanma qanununun əsas parametrlərinin $(\bar{x}, \sigma)$ təyinini nəzərdə tutur.

3.Qeyri-parametrik kriteriyalar – baş yığım parametrlərinə istinad etmədən hipotezi yoxlayır. Paylanma parametrlərinin hesablanmasının əhatə etmirlər. Tezliklər və ranqlar üzərindəki əməliyyatlara əsaslanır.

5.7. Styudent kriteriyası

Statistik əhəmiyyət dərəcəsi yerləşmə xarakteristi-kasının $(\bar{X})$ müqayisəsi əsasında aparılanda Styudent kriteriyasından istifadə olunur.

1) Seçmə orta qiymətin $(\bar{X})$ verilmiş qiymətlə müqayisəsi:

Tutaq ki, normal paylanma qanununa tabe olan seçmə verilmişdir. Sıfır hipotez: $H_0: \bar{x} = \mu$

$t = \frac{(\bar{x} = \mu)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ təsadüfi kəmiyyəti $\nu = n - 1$ sərbəstlik dərəcəsinə malik Styudent – paylanma qanununa tebdir:

Burada $\bar{x} = \frac{\sum_i^n x_i}{n}$; $S^2 = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

S^2 – seçmə dispersiya. $|t| > t_{\alpha/2}$ olarsa, H_0 hipotezi rədd edilir, alternativ $H_1: \bar{x} \neq \mu$ – hipotezi qəbul edilir, $|t| < t_\alpha - H_1': \bar{x} < \mu$ – hipotezi qəbul edilir; $|t| > t_{1-\alpha} - H_1'': \bar{x} > \mu$- alternativ hipotezi qəbul edilir. t_α- Styudent paylanmasının kvantilidir.

2) Dispersiyaları məlum olan 2 seçmənin orta qiymətlərinin müqayisəsi.

Fərz edək ki, hər 2 seçmə standart normal paylanma qanununa tabedir.

Sılır hipotez: $H_0: \bar{x} = \bar{y}$.

Kriteriyanın statistikası

$t = \frac{(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m}+\frac{\sigma_y^2}{n}}}$ təsadüfi kəmiyyəti standart normal paylanma qanununa tabedir: $N(0,1)$. $(\mu = 0,\ \sigma = 1)$.

Burada $\bar{x}, \bar{y}$ – seçmə orta qiymətləndir. $\sigma_x^2,\ \sigma_y^2$- dispersiyalarının qiyməti aprior məlumdur (seçməgöstəricilərə görə təyin olunmayıb).

$|t| > U_{1-\alpha/2}$, H_0- hipotezi qəbul edilmir. Alternativ $H_1{:}\,\bar{x} \neq \bar{y}$ hipotezi qəul edilir.

$t < U_\alpha \rightarrow H_1'{:}\,\bar{x} < \bar{y}$ qəbul edilir;

$t > U_{1-\alpha} \rightarrow H_1''{:}\,\bar{x} > \bar{y}$ qəbul edilir.

U_α – standart normal paylanmanın kvantilidir.

3) Naməlum bərabər dispersiyalara malik iki seçmənin orta qiymətlərinin müqayisəsi.

Hər 2 seçmə sadədir və normal paylanma qanununa tabedir.

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ (apriori məlum deyillər).

Sıfır hipotezi $H_0{:}\,\bar{x} = \bar{y}$

$$t = \frac{(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}}}\sqrt{\frac{mn}{n+1}}$$

Seçmə dispersiyalar:

$$S_x^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{m-1}; \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{m}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

$|t| > t_{\alpha/2} - H_1{:}\,\bar{x} \neq \bar{y}$ qəbul olunur

$t < t_\alpha \rightarrow H_1'{:}\,\bar{x} < \bar{y}$ qəbul olunur

$t > t_{1-\alpha} \rightarrow H_1''{:}\,\bar{x} > \bar{y}$ qəbul olunur.

t_α →styudenr paylanmasının kvantilidir (sərbəstlik dərəcəsi $\nu = m + n - 2$).

4) Naməlum, qeyri-bərabər dispersiyalara malik 2 seçmənin orta qiymətlərinin müqayisəsi

$$t_{hes} = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{S_x^2}{m} + \frac{S_y^2}{n}}}$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2}{m-1}; \quad S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

$t_{hes} > t_\alpha - H_0$ hipotezi qəbul edilmişdir;

$t_{hes} > t'_{\alpha/2} - H_1 : \bar{x} \neq \bar{y}$ qəbul edilir;

$t_{hes} > t'_\alpha - H'_1 : \bar{x} < \bar{y}$ qəbul edilir;

$t_{hes} > t'_{\alpha-1} - H''_1 : \bar{x} > \bar{y}$ qəbul edilir.

t'_α -kvantili müxtəlif yaxınlaşmalarda müxtəlif cür təyin olunur.

5.8.Fişer kriteriyası (F-paylanma)

Statistik əhəmiyyət dərəcəsi səpələnmə (σ) xarakteristikalarının müqayisəsi əsasında aparılanda Fişer kriteriyasından istifadə edilir. Bu kriteriya idman nəticələrinin stabilliyini qiymətləndirməyə imkan verir.

1) Fişer kriteriyasının hesabı qiymət hesablanır.

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} > 1$$

2) Əhəmiyyət səviyyəsi verilir: $\alpha = 0{,}05$ və hər 2 seçmə üçün sərbəstlik dərəcələri təyin olunur $\nu_x = n_x - 1$

$$\nu_y = n_y - 1$$

3) Cədvəldən Fişer kriteriyasının kvantili F_{α,ν_x,ν_y} → təyin olunur.

4) F və F_{α,ν_x,ν_y} müqayisə olunur.

$F > F_{\alpha,\nu_x,\nu_y}$ olarsa, $H_0: (\bar{x} = \bar{y})$ hipotezi rədd edilir; $H_0: (\sigma_x = \sigma_y)$ qəbul edilir. Yəni, yerləşmə xarakteristikasına əsasən müşahidə edilən fərq statistik baxımdan əhəmiyyətlidir. Səpələnmə xarakteristikasına görə müşahidə edilən fərq isə statistik baxımdan əhəmiyyətli deyil. Stabillik müşahidə olunur.

$$F < F_{\alpha,\nu_x,\nu_y}$$

$H_0: (\sigma_x = \sigma_y)$ qəbul edilmir.

Yəni, stabillik yoxdur. $H_0: (\bar{x} = \bar{y})$ edilir. Yəni, seçmələr arasında müşahidə olunan fərq statistik baxımdan əhəmiyyətli deyil.

Misal. Gimnastlar 2 qrupa bölünmüşdür. Birinci qrup $(n_x = 34)$ adi proqram üzrə, ikinci qrup isə xüsusi $(n_y = 31)$ proqram üzrə məşq edir. Çeviklik göstəricisi olaraq – idmançının əyilmə amplitudu (mm) ölçülür. Xüsusi proqramın effektivliyi qiymətəndirilir.

N	$x_i(mm)$	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	30	5	150	-5	25	125
2	32	10	320	-3	9	90
3	35	10	350	0	0	0
4	38	4	152	3	9	36
5	40	3	120	5	25	75
6	42	2	84	7	49	98
		34	1176			424

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{1176}{34} \approx 35mm$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{34} = \frac{424}{32} = 12{,}5mm^2$$

$$\sigma_x = 3{,}54mm \quad m_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_x}} = \frac{3{,}54}{\sqrt{34}} \approx 0{,}6mm$$

N	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
1	35	1	35	-11	121	121
2	40	4	160	-6	36	144
3	45	9	405	-1	1	9
4	48	8	384	2	4	32
5	50	7	350	4	16	112
6	53	2	106	7	49	98
		31	1440			516

$$\bar{y} = 46mm \quad \sigma_y^2 = 16{,}6 \quad \sigma_y = 4{,}07mm \quad m_y = 0{,}7mm$$

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} = 11{,}9$$

$$\alpha = 0{,}05 \quad \nu = n_x + n_y - 2 = 63 \quad t_{\alpha,\nu} = 2 \quad t > t_{\alpha,\nu}$$

Nəticə

1) $H_0: (\bar{x} = \bar{y})$ hipotezi qəbul edilmir.

2) Göstəricilər arasında müşahidə olunan fərq statistik baxımdan əhəmiyyətlidir.

3) İnkişaf qanunauyğunluqla bağlıdır.

4) Faktor əlaməti (xüsusi proqram) nəticə əlamətinə (çevikliyə) həlledici təsir göstərir.

$$F = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{16{,}6}{12{,}5} = 1{,}328$$

$$F_{\alpha,\nu_1,\nu_2} = F_{0,05;33;30} = 1{,}8$$

$$\nu_1 = n_x - 1 = 34 - 1 = 33$$

$$\nu_2 = n_y - 1 = 31 - 1 = 30$$

$$F < F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$$

Deməli, $H_0: (\sigma_x^2 = \sigma_y^2)$ hipotezi qəbul edilmir. Səpələnmə xaeakteristikasına görə müşahidə olunan fərq statistik baxımdan əhəmiyyətli deyil. Beləliklə, yeni proqram çeviklik göstəricisinin yüksəlməsinə səbəb olsa da, idmançıların göstəricilərində stabillik yoxdur.

FƏSİL 6
KORRELYASİYA ANALİZİ ÖLÇMƏ NƏTİCƏLƏRİNİN QARŞILIQLI ƏLAQƏSİ

6.1. Statistik və korrelyasiya asılılığı

İdman sahəsində aparılan tədqiqatlar göstərir ki, öyrənilən göstəricilər arasında qarşılıqlı əlaqə mövcud olur. Bu əlaqə 2 cür olur: funksional və statistik

Funksional – qarşılıqlı əlaqə o deməkdir ki, hər hansı göstəricinin müəyyən qiymətinə digər göstəricinin yalnız bir qiyməti uyğun gəlir.

Statistik asılılıq – elə asılılığa deyilir ki, kəmiyyətin birinin dəyişməsi, digərinin paylanmasını dəyişir. Hər hansı bir əlamətin (göstəricinin) bir qiymətinə digər göstəricinin bir neçə qiyməti uyğun gəlir. Məsələn, çəkinin boydan asılı olması. Xüsusi halda statistik asılılıqda, kəmiyyətin birinin dəyişməsi, digərinin orta qiymətini dəyişərsə, onda bu asılılıq korrelyasiya asılılığı adlanır. Yəni korelyasiyanın mənası ondan ibarətdir ki, bir göstəricinin orta qiyməti digər göstəricinin qiymətindən asılı olaraq dəyişir. Müxtəlif gösəricilər arasındakı qarşılıqlı əlaqənin öyrənilməsi müəyyən qanunauyğunluqları aşkar etməyə imkan verir [13].

6.2. Korrelyasiya modeli və korrelyasiya analizi

Korrleyasiya – iki və ya bir neçə təsadüfi kəmiyyətin statistik qarşılıqlı əlaqəsidir. Bu zaman bu kəmiyyətlərdən birinin və ya bir neçəsinin qiymətinin dəyişməsi digər kəmiyyətin sistematik qiymətinin dəyişməsinə səbəb olur. Əgər bir təsadüfi kəmiyyətin dəyişməsi qanunauyğun olaraq digər təsadüfi kəmiyyətin dəyişməsinə səbəb olmursa, yalnız onun digər statistic xarakteristikasının dəyişməsi ilə nəticələnərsə, onda bu əlaqə statistik olsa da, **korrelyasion** hesab edilə bilməz.

Korrleyasiya analizi – statistik göstəricilərin emal üsuludur. Qarşılıqlı əlaqəni təhlil etmək üçün istifadə edilən statistic üsuldur. Korelyasiya asılılığının statistik tədqiqi zamanı müxtəlif modellərdən istifadə olunur. **Korrelyasiya modelinə -** əsasən hər iki dəyişən təsadüfi kəmiyyət qəbul edilir. Korrelyasiyanın qarşılıqlı əlaqəsində birinci əlamətin bir qiymətinə digər əlamətin müxtəlif qiymətlərinin orta qiyməti uyğun gəlir.

İdmaçıların göstərdikləri nəticələr bir çox faktorlardan asılı olur. Bu faktorların təbiəti təsadüfi olduğuna görə adi riyazi üsullarla bunlar arasındakı asılılığı təyin etmək mümkün olmur. Korelyasiya analizindən məhz bu asılılığı təyin etmək üçün istifadə edilir.

6.3. Qarşılıqlı əlaqənin sıxlıq dərəcəsinin təyini

Korrelyasiya analizi iki və ya bir neçə təsadüfi kəmiyyət arasındakı qarşılıqlı əlaqənin sıxlıq dərəcəsini qiymətləndirməyə imkan verir. Bu məqsədə Korrelyasiya əmsalı r_{xy} – adlanan kəmiyyət hesablanır.

1) $r_{xy} = \pm 1$ – kəmiyyətlər arasındakı funksional əlaqə mövcuddur;

2) $r_{xy} = 0$ – kəmiyyətlər arasındakı statistik əlaqə mövcud deyil;

3) $r_{xy} = 0{,}99 \div 0{,}7$– güclü statistik əlaqə;

4) $r_{xy} = 0{,}69 \div 0{,}5$– orta statistik əlaqə;

5) $r_{xy} = 0{,}49 \div 0{,}2$– zəif statistik əlaqə;

6) $r_{xy} = 0{,}19 \div 0{,}09$– çox zəif statistik əlaqə

Aparılan çoxsaylı hesablamalar göstərir ki, $-1 \le r_{xy} \le +1$.

6.4. Xətti və ranqlı korrelyasiya əmsalı
Brave-Pirson düsturu

Fərz edək ki, aparılan tədqiqatlar nəticəsində təsadüfi kəmiyyətlər (əlamətlər) arasında **xətti** asılılığın mövcud olması aşkar edilmişdir. Bu halda qarşılıqlı əlaqənin sıxlıq dərəcəsini qiymətləndirmək üçün korrelyasiya əmsalının qiyməti **Brave-Pirson** düsturu vasitəsi ilə hesablanır:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \qquad (1)$$

Burada, n təcrübi göstəriciərin sayı x_i, y_i – təsadüfi gösəricilərin qiymətləri; $\bar{x}, \bar{y}$ – orta nəticələr.

Misal.

10 velosipedçi–məşq zamanı veloerqometrin pedalını 30 dəfə fırladır.

Bu zaman sərf edilən vaxt $x_i(san)$ qeydə alınır. Bu nəticə idmançıların 200 m. Məsafəni qət edərkən göstərdikləri nəticə $y_i(san)$ ilə müqayisə edilir.

(1) düstur vasitəsilə korrelyasiya əmsalını hesablayarkən aşağıdakı şəkildə cədvəl tərtib olunur:

N	x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})$	$(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})\times(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$
1	10	17	-0,6	-0,8	0,48	0,36	0,64
2	10,1	17,1	-0,5	-0,7	0,35	0,25	0,49
3	10,2	17,3	-0,4	-0,5	0,2	0,16	0,25
4	10,3	17,4	-0,3	-0,4	0,12	0,09	0,16
5	10,5	17,9	-0,1	0,1	0,01	0,01	0,01
6	10,7	18	0,1	0,2	0,02	0,01	0,04
7	10,9	18,1	0,3	0,3	0,09	0,09	0,09
8	11	18,3	0,4	0,5	0,2	0,16	0,25
9	11,1	18,5	0,5	0,7	0,35	0,25	0,49
10	11,2	18,7	0,6	0,9	0,54	0,36	0,81
Cəmi	106	178,3			2,34	1,74	3,23

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{106}{10} = 10{,}6\ san$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{178{,}3}{10} = 17{,}8\ san$$

$$r_{xy} = \frac{2,34}{\sqrt{1,74 \cdot 3,23}}$$

Nəticədə birincisi $r_{xy} > 0$– Yəni göstəricilər arasında düz mütənasib asılılıq mövcuddur. Pedalın fırladılmasına sərf edilən vaxt azaldıqca, yarışa sərf edilən vaxt da azalır. İkincisi göstəricilər arasında güclü statistik əlaqə mövcuddur. Faktor əlaməti (məşq) nəticə əlamətinə (200 m-məsafədəki nəticəyə) həlledici təsir göstərir.

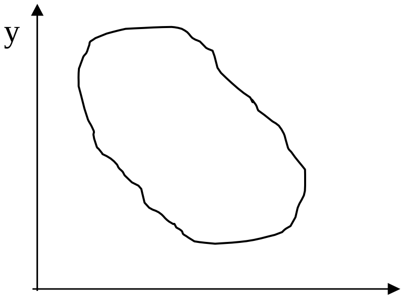
6.5. Korrelyasiya sahəsi. Qarşılıqlı əlaqənin istiqaməti

Qarşılıqlı təhlili ölçmə nəticələrinin düzbucaqlı kordinat sistemində qrafiki təsvirindən başlayır. fərz edək ki, 6 idmançı turnikdə dartınır. X-məşqlərin hazırlıq mərhələsinə qədər dartınmaların sayı, y-məşqdən sonra dartınmaların sayı olsun:

N	X	Y
1	10	12
2	9	10
3	12	12
4	10	10
5	9	13
6	11	12

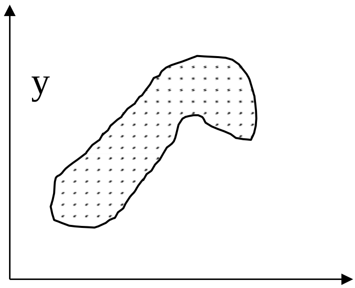
Hər bir idmançının göstərdiyi nəticə müstəvi üzərində bir nöqtə uyğun gəlir. Bu 6 nöqtəni əhatə edən sahəyə korrelyasiya sahəsi **(səpələnmə diaqramı)** deyilir.

Şəkil 1.



Əgər bu sahə düzgün ellips formasında alınarsa, onda deyirlər ki, **<u>xətti</u>** asılılıq forması əldə edilmişdir. Amma praktikada qeyri-xətti formaları da əldə etmək mümkündür.

Şəkil 2.

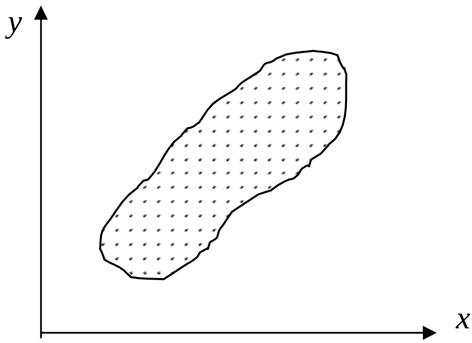


x – raketkanın sürəti
y – topun uçuş sürəti

Əgər korrelyasiya əmsalı müsbət alınarsa, onda deyirlər ki, kəmiyyətlər arasında düz mütənasib asılılıq mövcuddur.

Məsələn, $x - 5kq$ -lıq daşı tullayarkən göstərilən nəticə $y - 3kq$ -lıq daşı tullayarkən göstərilən nəticədir olsun. Təcrübə $n = 80$ dəfə təkrar edilmiş və korrelyasiya əmsalı hesablanmışdır: $r_{xy} = 0{,}892$.

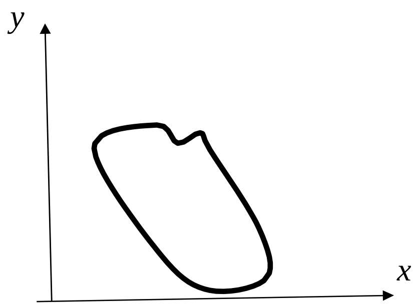
Şəkil 3.



Təcrübi müşahidələr göstərir ki, 400 m. Məsafəyə qaçışa sərf edilən vaxt (x) azalanda, uzununa tullanma yarışında göstərilən nəticə (y) yüksəlir. Yəni, bu halda mənfi korrelyasiyadan danışa bilərik:

$$n = 50; \quad r_{xy} = -0{,}628$$

Şəkil 4.



6.6. Spirmenin ranqlı korrelyasiya əmsalı

Növbə şkalası üzrə ölçülmüş göstəricilər arasındakı əlaqənin sıxlıq dərəcəsini qiymətləndirmək üçün ranqlı korrelyasiya əmsalı hesablanır.

Əgər seçilmiş göstəriciləri artma və ya azalma sırası ilə düzsək, onda ranqlaşdırılmış seçmə alarıq. Seçilmiş qiymətin sıra nömrəsi onun ranqı adlanır. Əgər seçmədə təkrar olunan qiymətlər yoxdursa, onda ranq birqiymətli olaraq sıra nömrəsi ilə təyin olunur. Təkrar olunan qiymətlərin ranqı onların sıra nömrələrinin orta qiyməti ilə ifadə olunur.

İndi tutaq ki, baş yığımda normal paylanma qanununa tabe olmayan 2 əlamət arasındakı statistik asılılığı müəyyən etmək tələb olunur. Aşağıdakı cədvəldə x-30 m. Məsafəyə qaçışda göstərilən nəticə; y-100 m. Məsafəyə qaçışda göstərilən nəticədir. Spirmenin ranqlı korrelyasiya əmsalı aşağıdakı düsturdan təyin olunur:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum(R_{x_i}-R_{y_i})^2}{n(n^2-1)} \qquad (2)$$

$$\sum(R_{x_i}-R_{y_i})^2 = 4; \ \ n = 10$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 4}{10(100-1)} \approx 0{,}976.$$

N	x	y	R_x	R_y	$R_x - R_y$	$(R_x - R_y)^2$
1	4,6	12,4	1,5	1	0,5	0,25
2	4,6	12,7	1,5	2	-0,5	0,25
3	4,7	13	3	3	0	0
4	4,8	13,3	5	4	1	1
5	4,8	13,1	5	5	0	0
6	4,8	13,2	5	6	-1	1
7	4,9	13,5	8	7,5	0,5	0,25
8	4,9	13,5	8	7,5	0,5	0,25
9	4,9	13,6	8	9	-1	1
10	5	13,7	10	10	0	0

x_i və y_i sıralarında üst-üstə düşən qiymətlər olduqda (2) düsturu bir qədər təhrif olunmuş nəticə verir. Daha dəqiq hesablamalar üçün aşağıdakı düsturdan istifadə olunur:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum(R_x-R_y)^2}{n(n^2-1)(T_x+T_y)} \qquad (3)$$

$$T_x = \frac{1}{2}\sum(t_x^3 - t_x); \qquad T_y = \frac{1}{2}\sum\left(t_y^3 - t_y\right)$$

t_x, t_y hər qrupda təkrar olunan qiymətlərin sayıdır.

x_i- sırasında təkrar olunan qiymətlərin 3 qrupu yerləşir:

I qrupda 2 ədəd:	4,6	4,6	
II qrupda 3 ədəd:	4,8	4,8	4,8
III qrupda 3 ədəd:	4,9	4,9	4,9

$$T_x = \frac{1}{2}[(2^3 - 2) + (3^3 - 3) + (3^3 - 3)] = 27$$

y_i- sırasında isə 2 təkrar olunan ədəddən ibarət 1 qrup yerləşir:

$$T_y = \frac{1}{2}(2^3 - 2) = 3$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 4}{10(10^2 - 1) - (27 + 3)} \approx 0{,}975.$$

6.7.Qeyrı-xəttı korrelyasıya əmsalı

Qeyri-xətti korrelyasiyanın təyini

Əgər korrelyasiya sahəsi düzgün ellips formasında alınmazsa, onda qeyri-xətti statistik asılılıqdan danışa bilərik. Korrelyasiyanın formasını dəqiq təyin etmək üçün Fişer kriteriyasının hesabı qiyməti aşağıdakı düsturdan təyin olunur:

$$F = \frac{(n-1)\left(\eta_{y/x}^2 - \eta_{xy}^2\right)}{(k-2)(1 - \eta_{y/x}^2)}.$$

Burada η- göstəricilərin sayı; *k*- təkrar olunan nəticələri özündə birləşdirən siniflərin sayı; $\eta_{y/x}$-korrelyasiya nisbəti; r_{xy}- Brave-Pirson düsturu ilə hesablanmış korrelyasiya əmsalı; F-Fişer kriteriyasının böhran qiyməti; F_{α,ν_1,ν_2} ilə müqayisə edilir. ν_1 və ν_2– sərbəstlik dərəcələridir; $\nu_1 = 1, \nu_2 = n - 1,$ α-əhəmiyyət səviyyəsi.

$F < F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$- xətti korrelyasiya (düzxətli)

$F > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$- qeyri-xətti (əyrixətli) korrelyasiya.

6.8. Şərti orta qiymət

Bəzən müqayisə olunan seçmələrdən hər hansı birində müəyyən qiymətlər təkrar olunur. Bu halda təkrar qiymətlərə malik əlamət (x) siniflərə bölünür. Hər sinifə x- in eyni qiymətləri daxildir. Məsələn tutaq ki, $x = 70$ olanda $y_1 = 0{,}8$; $y_2 = 0{,}9$; $y_3 = 0{,}9$.

y - əlamətinin ədədi orta qiymətini tapaq:

$\bar{y}_{x=70} = \frac{0{,}8+0{,}9+0{,}9}{3} = 0{,}84$ (şərti orta qiymət).

Beləliklə, $\bar{y}_x$ -şərti orta $X = x$ qiyməti üçün y-qiymətlərinin cəbri ortasına deyilir. X-in hər bir qiymətinə şərti ortanın bir qiyməti uyğun gələrsə, onda aydındır ki, şərti orta x -dən asılı funksiyadır: $\bar{y}_x = f(x)$.

6.9.Korrelyasiya nisbətinin hesablanması

12 sprinterdə oksigen borcunun $x\left(\frac{ml}{kq}\right)$ 100 məsafəyə qaçışda orta sürətdən $y(m/s)$ asılılığı tədqiq edilir.

Ölçmə nəticələri əsasında cədvəl tərtib olunur. y'_x şərti orta qiymətdir. Təkrar göstəricilərə görə x-əlaməti k=5 sinifə bölünür.

N	x	y	y'_x	$(y' - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	70	0,8	0,87		
2	70	0,9	0,87		
3	70	0,9	0,87		
4	72	0,9	0,9		
5	75	1	1		
6	75	1	1		
7	77	1	1,05		
8	77	1,1	1,05		
9	80	1,2	1,25		
10	80	1,2	1,25		
11	80	1,3	1,25		
12	80	1,3	1,25		

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{12} y_i}{n} = \frac{12,6}{n} 1,05.$$

Korelyasiya nisbəti: $\eta_{y/x} = 0,96.$

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

r_{xy} və $\eta_{y/x}$ qiymətləri bir-birinə yaxın olduqları üçün korelyasiyanı həm düzxətli, həm də əyrixətli qəbul etmək olar. Fişer kriteriyasının hesabi qiyməti:

$$F = \frac{(n-1)(\eta^2 - r^2)}{(k-2)(1-\eta^2)} =$$

$$= \frac{(12-1)(0,96^2 - 0,94^2)}{(5-2)(1-0,96^2)} \approx 1,83$$

$$F_{\alpha,\nu_1,\nu_2} = F_{0,05;1,11} = 34,8.$$

$F < F_{\alpha,\nu_1,\nu_2} \rightarrow$ Deməli bu halda, xətti korelyasiya modelindən istifadə edilə bilər.

6.10. Çoxölçülü korelyasiya anlayışı

Çoxölçülü korelyasiya asılılığının ən sadə halı 3 dəyişən əlamətin (x, y, z) korelyasiyasıdır. Bu əlamətlər arasındakı əlaqənin sıxlıq dərəcəsi aşağıdakı düsturdan təyin olunan çoxölçülü korelyasiya əmsalı vasitəsilə hesablanır:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 + r_{yz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}} \quad 0 \leq R \leq 1.$$

z -əlamətinin sabit qiymətində x və y əlamətləri arasındakının əlaqənin sıxlıq dərəcəsi:

$$r_{xy(z)} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

Analoji qaydada

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

$$r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xz}^2)}}$$

6.11. Korrelyasiya əmsalının etibarlığının yoxlanılması. Korrelyasiya əmsalı üçün etibarlı intervalın qurulması

Baş korrelyasiya əmsalı R_{xy} üçün etibarlı intervalın sərhədlərini təyin edək. Seçmə korrelyasiya əmsalının qiyməti $r_{xy} = 0{,}95$ olsun, seçmənin həcmi $n = 19$. Onda seçmə korrelyasiya əmsalının standart xətası, yəni baş parametr hesablanan zaman yol verilən xəta

$$\frac{1-r^2}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n} \text{ olacaq,}$$

$t_{\alpha,n}$-Styudent kriteriyasının böhran qiyməti $\alpha = 0{,}05$ əhəmiyyət səviyyəsində cədvəldən təyin edirik: $t_{\alpha,n} = 1{,}73$

$$\Delta r_{xy} = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n} = \frac{1 - (0{,}95)^2}{\sqrt{19}} 1{,}73 = 0{,}04.$$

Beləliklə, baş korelyasiya əmsalı üçün etibarlı intervalın sərhədləri aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunacaq (95% ehtimalla)

$$r_{xy} - \Delta r_{xy} \leq R \leq r_{xy} + \Delta r_{xy}$$

$$0{,}91 \leq R \leq 0{,}99.$$

Hesablamalar göstərdi ki, korrelyasiya əmsalının etibarlıq dərəcəsi çox yüksəkdir. Yəni seçmənin həcmini nə qədər böyük götürsək də, bu korrelyasiya əmsalının qiymətini 0,04 qədər dəyişəcək. Bu isə o qədər də önəmli deyil.

6.12. Qarşılıqlı əlaqə əmsalının qiymətləndirilməsi

Məsələnin həlli zamanı r_{xy} korrelyasiya əmsalının qiyməti sıfırdan fərqli olduğu halda belə qiymət seçmə qiymət hesab olunur. Bu seçmənin mənsub olduğu baş yığım üçün də korellyasiya əmsalının (R_{xy}) sıfırdan fərqli olması barədə mühakimə yürütməyə imkan vermir.

Ona görə də baş yığımın korellyasiya əmsalının sıfra bərabər olması barədə H_0 hipotezini alternativ fərziyyə əsasında yoxlamaq lazımdır

$$H_0: (R_{xy} = 0).$$

Əgər H_0 hipotezi qəbul olunmazsa, onda bu o deməkdir ki, seçmə korrelyasiya əmsalının sıfırdan fərqli olması həqiqətə uyğundur. Deməli, x və y əlamətləri arasında korrelyasiya asılılığı mövcuddur. Korrelyasiya əmsalının xətası $(n < 100)$

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}.$$

Kriteriyanın hesabı qiyməti:

$$t_{hes} = \frac{r_{xy}}{m_r} = \frac{r_{xy}}{\frac{\sqrt{1 - r^2}}{\sqrt{n - 2}}}$$

$t_{hes} > t_{\alpha,\nu}$ olarsa, H_0 hipotezi qəbul edilmir. Yəni, seçmə korrelyasiya əmsalı statistik baxımdan sıfırdan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir.

6.13. Seçmə korrelyasiya əmsalının statistik əhəmiyyət dərəcəsinin təyini

Tutaq ki, 13 ağır atlet üçün ştanqın təkanla qaldırılması və yerindən hündürlüyə tullanma nəticələri arasındakı asılılıq təhlil edilir və $r_{xy} = 0{,}855$.

Korelyasiya əmsalının həqiqətə uyğunluğunun təyin edək.

1) Korreyasiya əmsalının xətası

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} \approx \sqrt{\frac{1-0{,}855^2}{13-2}} \approx 0{,}156$$

2) Student kriteriyasının hesabı qiyməti

$$t_{hes} = \frac{r_{xy}}{m_r} = \frac{0{,}855}{0{,}156} = 5{,}48$$

3) Student kriteriyasının böhran qiyməti

$$t_{\alpha,\nu} = 2{,}2 \quad (\alpha = 0{,}05 \quad \nu = n-2 = 11)$$

4) $t_{hes} > t_{\alpha,\nu}$ $\qquad 5{,}48 > 2{,}2$

Deməli $r_{xy} = 0{,}855$ əhəmiyyətli dərəcədə sıfırdan fərqlidir və öyrənilən əlamətlər korrelyasiya asılılığı ilə bir-birinə bağlıdır.

Qarşılıqlı əlaqə əmsalının dəqiqliyini qiymətləndirən zaman 2 sualla qarşılaşırıq:

1. Verilmiş əmsal statistik baxımdan sıfırdan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlidirmi?
2. Baş yığımın həqiqi korelyasiya əmsalı hansı inam sərhədlərində yerləşir?

Məsələn, fəz edək ki, aparılan $n = 52$ sayda sınaq nəticəsində seçmə korelyasiya əmsalı üçün $r_{xy} = 0{,}35$ alınmışdır. Bu halda tam əminliklə qarşılıqlı əlaqənin mövcud olması barədə mühakimə yürütmək olarmı? Bəlkə də həqiqətən heç bir korrelyasiya yoxdur və korrelyasiya əmsalı üçün əldə edilən qiymət seçmənin təsadüfi olması ilə şərtlənir. Bu halda korrelyasiya əmsalının müəyyən əhəmiyyət səviyyəsindəki qiymətini cədvəldəki böhran qiyməti ilə müqayisə etmək kifayətdir. $|r| < r_\alpha$ olarsa, H_0 hipotezi qəbul olunur və əhəmiyyətli korelyasiyanın olmaması qənaətinə gəlirik.

$|r| \geq r_\alpha$ olarsa, H_0 hipotezi rədd edilir.

Məsələn, $n = 52$, $\nu = n-2 = 50$, $\alpha = 0{,}05$, $\quad t_{\alpha,\nu} = 0{,}273$, $r = 0{,}35$ $r > r_{\alpha,\nu}$

Deməli, seçmə korelyasiya əmsalı statistik baxımdan sıfırdan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir

Sərbəstlik dərəcəsi	Korelyasiya əmsalı		
	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
2	0,9	0,95	0,99
3	0,805	0,878	0,959
4	0,729	0,811	0,9117
5	0,669	0,754	0,874
6	0,622	0,707	0,834
7	0,582	0,666	0,798
8	0,549	0,632	0,765
9	0,521	0,602	0,735
10	0,497	0,576	0,708
20	0,36	0,423	0,534
30	0,296	0,349	0,449
50	0,231	0,273	0,354

FƏSİL 7
REQRESIYA MODELI. ƏSAS ANLAYIŞLAR

7.1. Reqresiya analizi

Bir və ya bir neçə asılı olmayan (sərbəst) dəyişənin digər asılı Y dəyişəninə təsirinin statistik tədqiqat üsuludur.

Reqresiya Y təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinin (orta qiymətinin) $x_1, x_2, \dots, x_n$ sərbəst dəyişənlərindən asılılığıdır. Tutaq ki, $Y, X_1, X_2, \dots, X_n$ verilmiş ümumi ehtimal paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlərdir. Əgər hər bir $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ qiymətlər yığımı üçün şərti riyazi gözləmə

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = M(Y \,/\, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

təyin olunarsa, onda $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyası Y təsadüfi kəmiyyətinin $X_1, X_2, \dots, X_n$ kəmiyyətlərinə nəzərən reqresiyasi adlanır.

Reqresiya analizinin məqsədi:

- Bir asılı olan və bir və ya bir neçə asılı olmayan dəyişənlər arasındakı münasibətləri araşdırmaq;
- Asılı dəyişənlərin sistematik təsiri nəticəsində asılı olmayan dəyişənlərin özlərini aparmasını izah etmək və onları təsadüfi təsirlərdən ayrıd etmək;
- Asılı olmayan dəyişənlərin köməyi ilə asılı dəyişənlərin qiymətlərinin əvvəlcədən müəyyən edilməsi;

Asılı dəyişənlərin variasialarında asılı olmayan dəyişənlərin töhfələrinin təyin edilməsidir [7].

7.2. Reqressor və kriterial

Asılı olmayan dəyişənlərə **reqressor və ya prediktor** deyilir. Asılı dəyişənlər isə kriterial dəyişənlər adlanır. Dəyişənlər arasındakı münasibət bir ölçülü halda $y = f(x) + e$ formada, çoxölçülü halda isə

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + e$$

formada axtarılır. Burada y -asılı olan dəyişən (kriterial), x-isə asılı olmayan dəyişənlərdir. (reqressor). f – axtarılan və ya qəbul edilmiş funksiyadır.

e – isə təsadüfi xətalar. Reqressiya analizi nəticəsində axtarılan funksiya e – qiymətinin minimumunu verməlidir. Axtarılan funksiyanın seçilməsi üçün ilkin məlumat ölçmə nəticələrinin paylanma diaqramından almaq olar.

7.3. Nəticə və faktor əlaməti Reqresiya əmsalının mahiyyəti

Bir ölçülü xətti reqresiya tənliyini nəzərdən keçirək:

$$\hat{Y}_x = a + bx$$

Burada $\hat{Y}_x$ – nəticə əlaməti, x – faktor əlaməti adlanır

b– isə reqresiya əmsalı adlanır.

Reqresiya əmsalının mənası: faktor əlamətini bir vahid artırsaq, $\hat{Y}_x$– nəticə əlamətinin orta qiyməti necə dəyişəcək?

b-nin ölçü vahidi: $[b] = \frac{[\hat{Y}]}{[x]}$.

Məsələn tutaq ki, x – 100m məsafəyə qaçışda göstərilən nəticədir. $[x] = san.$ $[\hat{Y}] = metr$ (uzununa tullanmada) göstərilən nəticə. Onda $[b] = \frac{metr}{san}$.

Deməli, əgər

$$\hat{Y}_x = 4 + 0{,}2x$$

olarsa və qaçışa sərf edilən vaxt bir saniyə azalarsa, onda tullanmalardakı orta nəticə 0,2 metr artacaq.

Reqresiya əmsalı əlamətlər arasındakı əlaqənin strukturunu göstərir. Onun işarəsi əlaqənin istiqamətindən xəbər verir. Reqresiya – faktor əlamətinin nəticə əlamətinə təsirini ifadə edən qrafikdir.

7.4. Reqresiya modellərinin qurulma

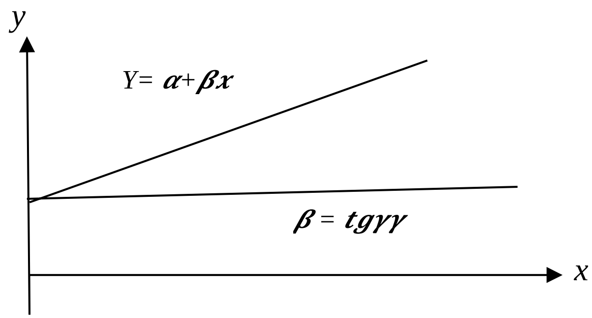
Reqresiya 2 əlamət arasındakı qarşılıqlı əlaqəni ifadə edən qanunauyğunluqdur. Reqresiya analizində əsas mərhələ Y təsadüfi kəmiyyət ilə x sərbəst dəyişni arasındakı asılılığın qurulmasıdır. Bu asılılıq naməlum parametrlərin daxil olduğu reqresiya tənliyindən təyin olunur. Uyğun reqresiya modelinin qurulması – Y təsadüfi kəmiyyət ilə x sərbəst dəyişəni arasındakı asılılığın riyazi ifadəsinin qurulmasıdır. Ən sadə halda bu asılılıq aşağıdakı xətti tənliklə ifadə olunur:

$$y = m_{y/x} = \alpha + \beta x. \qquad (1)$$

Burada $m - Y$-in şərti riyazi gözləməsi olub, x-in qeyd olunmuş qiyməində təyin olunub.

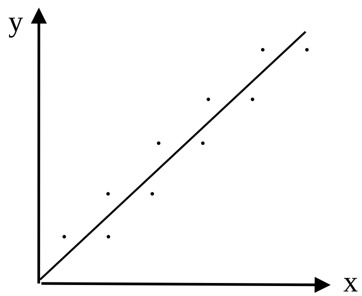
α, β– reqresiya tənliyinin parametrləri adlanır.

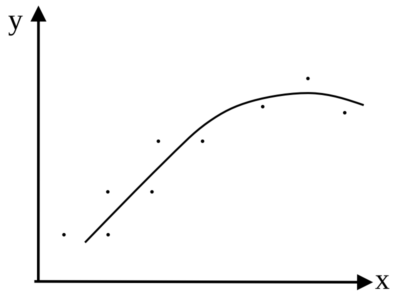
Aşağıdakı şəkildə (1) tənliyi ilə ifadə olunan düz xəttin qrafiki verilmişdir.

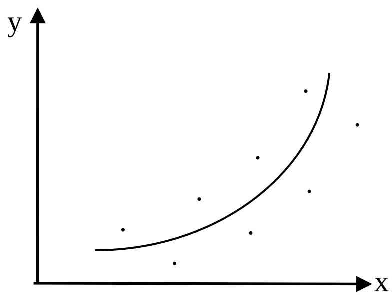


Reqresiya modelinə əsasən y asılı dəyişəni təsadüfi kəmiyyət qəbul edilir, sərbəst dəyişənin qiyməti isə təcrübi nəticələrə uyğun olaraq ixtiyari qaydada verilir. Həqiqi reqresiya tənliyi (1) adətən məlum deyil. Belə ki, bütün baş yığımı nəzərdən keçirtmək imkanı yoxdur. Ona görə də seçmə tədqiqat aparıb, təcrübi göstəricilərə əsasən α, β baş parametrləri qiymətləndirilir. Başqa sözlə desək, həqiqi reqresiya tənliyi empirik düsturla əvəz edilir.

Empirik düsturun uğurlu seçimi tədqiqatçının təcrübəsindən çox asılı olur. Öyrənilən proses barəsindəki nəzəri mülahizələrin də əhəmiyyəti böyükdür. Təcrübi göstəricilər əsasında Excell – proqramı vasitəsi ilə həm korrelyasiya sahəsi, həm də hamar əyri qurula bilər. Bu da öz növbəsində empirik düsturun ümumi ifadəsini əldə etməyə imkan verir







Təcrübi göstəricilərin sayı həddindən artıq çox olanda ond empirik düsturun ümumi ifadəsi orta qiymətlər üsulu əsasında qurulur: Tədqiqatlarda ən çox aşağıdakı empirik düsturlardan istifadə edilir:

$y = a + bx$ – xətti asılılıq;
$y = ax^b$ – qüvvət asılılığı;
$y = ab^x$ – üstlü asılılıq;
$y = a + \frac{b}{x}$ – hiperbolik asılılıq.

Empirik düsturun ümumi ifadəsini almaq üçün aşağıdakı cədvəldən istifadə edilir:

Misal 1.

Cədvəl 1

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Emprik düstur
1	$\frac{x_1 + x_n}{2}$ orta riyazi	$\frac{y_1 + y_n}{2}$ orta riyazi	$y = a + bx$
2	$\sqrt{x_1 x_n}$ orta riyazi	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = ax^b$
3	$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = ax^b$ $y = a10^b$
4	$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$	$y = a + \frac{b}{x}$

Cədvəl 2

x	1	2	3,5	5,1	6	8	9
y	6	10	20	30	35	42	50

$$x_c = \frac{1 + 9}{2} = 9, \quad y_c = \frac{6 + 50}{2} = 28.$$

Bu orta riyaziqiymətlərə Cədvəl 2-dən $x = 5{,}1$; $y = 30$ qiymətləri çox yaxındır. Ona görə də empirik asılılıq xətti olacaq: $y = a + bx$.

Misal 2.

Cədvəl 3

x	2	3	4	5	6
y	52	281	800	4000	10000

$$\bar{x}_c = \frac{2+6}{2} = 4; \;\; y_c = \frac{52+10000}{2} = 5026.$$

Bu qiymətlər təcrübi $x = 4; y = 800$ qiymətlərinə uyğundur. y və y_c arasındakı uyğunsuzluq qeyri-xətti asılılıqdan xəbər verir. Orta həndəsi qiymət:

$$y_c = \sqrt{52 \cdot 10000} = 720.$$

Bu qiymətlər isə təcrüb $x = 4, y = 800$ qiymətlərinə uyğundur. Onda cədvəl 1-ə əsasən bu halda empirik düstur

$$y = ab^x \text{ və ya } y = a10^{bx}$$

şəklində olaraq

Arqumentin dəyişmə parçasında bir-birindən kifayət qədər uzaqda yerləşən 2 etibarlı nöqtəni seçək. Fərz edək ki, bu x_1 və x_n nöqtələridir.

1) Orta hesabi, həndəsi və harmonik qiymətlər hesablanır:

$$x_{hes} = \frac{x_1 + x_n}{2}; \quad x_{hən} = \sqrt{x_1 x_n}; \quad x_{hes} = \frac{x_1 + x_n}{x_1 + x_n}.$$

2) Arqumetlərin bu hesablanmış qiymətlərinə əsasən qurulmuş qrafiklərdən funksiyanın uyğun qiymətlərini təyin edək:

$$x_{hes} \to y_1^*; \quad x_{hən} \to y_2^*; \quad x_{har} \to y_3^*.$$

3) $y_{hes} = \frac{y_1 + y_n}{2}; \quad y_{hən} = \sqrt{y_1 y_n}; \quad y_{har} = \frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}.$

4) Qrafikdən tapılmış y_1^*, y_2^*, y_3^* qiymətləri ilə hesablanmış qiymətlər arasında fərqlər hesablanır.

$e_1 = |y_1^* - y_{hes}|$

$e_2 = |y_1^* - y_{hən}|$

$e_3 = |y_1^* - y_{har}|$

$e_4 = |y_2^* - y_{hes}|$ $\qquad e = \min_i\{e_i\}$

$e_5 = |y_2^* - y_{hən}|$ $\qquad e$ - ən kiçik xəta

$e_6 = |y_3^* - y_{hes}|$

$e_7 = |y_3^* - y_{har}|$

5) $e = e_1 \rightarrow y = a + bx$

$e = e_2 \rightarrow y = ab^x$

$e = e_3 \rightarrow y = \frac{1}{a+bx}$

$e = e_4 \rightarrow y = a + b \ln x$

$e = e_5 \rightarrow y = ax^b$

$e = e_6 \rightarrow y = a + b/x$

$e = e_7 \rightarrow y = \frac{x}{a+bx}$

7.5. Reqresiya tənliyinin parametrlərinin qiymətləndirilməsi. Xətti reqresiya modeli Həqiqi və empirik tənlikləri

Reqresiya analizində əsas mərhələ y təsadüfi kəmiyyəti ilə x sərbəst dəyişəni arasndakı asılılığın riyazi ifadəsinin qurulmasıdır. Ən sadə halda bu asılılıq aşağıdakı xətti tənliklə ifadə olunur

$$Y = m_{y/x} = \alpha + \beta x \qquad (1)$$

Korelyasiya asılılığının riyazi ifadəsi olan (1) tənliyinə reqresiya tənliyi deyilir. y təsadüfi kəmiyyətinin ayrı-ayrı $\{y_i\}$ qiymətlərinin $\{x_i\}$ qiymətlərindən necə asılı olduğunu araşdırmaq üçün reqresiya modelinə təsadüfi faktorlar əlavə olunur

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \qquad (2)$$

ε_i - x_i –in hər bir qiyməti üçün y_i qiymətlərinin təsadüfi mahiyyətini təyin edən təsadüfi kəmiyyətlərdir. ε_i həm də y_i qiymətlərinin reqresiya xəttindən təsadüfi meyllərini ifadə edən təsadüfi xətalardır.

İndi fərz edək ki, təcrübi göstəricilərin seçildiyi baş yığımda həqiqətən xətti reqresiya mövcuddur. y və x arasındakı asılılığa həlledici təsir edə biləcək faktorlar yoxdur. y təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunan $\{y_i\}$ qiymətləri x_i-nin istənilən qiymətində statistik asılı deyil. Həqiqi reqresiya tənliyi (1) adətən məlum deyil. Belə ki, bütün baş yığımı nəzərdən keçirtmək imkanı yoxdur. Ona görə də seçmə tədqiqat aparıb təcrübi göstəricilər əsasında α, β parametrlərini qiymətləndirmək olar. Seçilmiş göstəricilərə görə α, β parametrləri üçün alınmış qiymətləri a və b hərfləri ilə işarə edirlər. Beləliklə, emprik reqresiya tənliyi

$$y = \alpha + bx. \tag{3}$$

7.6. Ən kiçik kvadratlar üsulu ilə xətti reqresiya tənliyinin parametrlərinin təyin

a və b parametrlərini təyin etmək üçün ən kiçik kvadratlar üsulundan istifadə edilir. Bu əmsallar elə təyin edilməlidir ki, $[y_i - (a + bx_i)]$ fərqlərinin kvadratları cəmi ən kiçik olsun:

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 .$$

Approksimasiya xətasının hər bir i nöqtəsindəki qiyməti:

$$\varepsilon_i = y_i - y(x_i)$$

kimi, bu xətaların kvadratları cəmi isə aşağıdakı düsturlarla təyin olunur:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 .$$

E-nin minimum olması üçün aşağıdakı şərtlər ödənilməlidir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= \sum 2\,[y_i - (a + bx_i)] = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= \sum 2\,x_i[y_i - (a + bx_i)] = 0 \end{aligned}\right\}$$

B şərtlər a və b əmsallarını təyin etmək üçün 2 xətti tənlik qurmağa imkan verir:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot n + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}\right\}$$

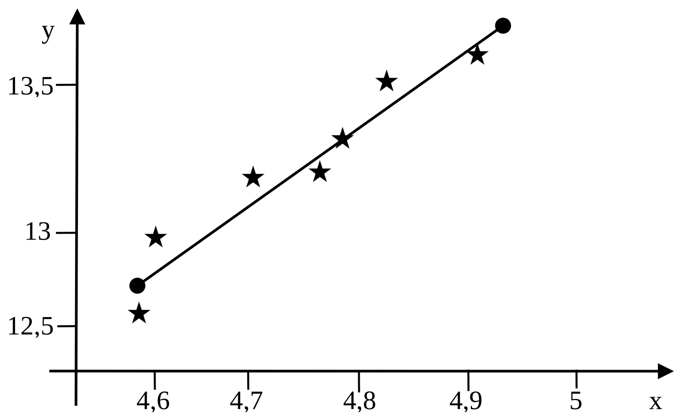
Bu sistem tənliyi həll edib, a və b əmsallarını hesablamaq üçün düsturlar əldə edirik:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ a &= \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Misal: Aşağıdakı cədvəldə 10 məktəblinin 30 m və 100 m məsafəyə qaçışda göstərdikləri nəticələr verilmişdir.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x(s)	4,6	4,6	4,7	4,8	4,8	4,8	4,9	4,9	4,9	5
y(s)	12,4	12,7	13	13,3	13,1	13,2	13,5	13,5	13,6	13,7

Şəkildə göstəricilərin qrafiki təsviri-korrelyasiya sahəsi təsvir olunub:



Qrafikin təhlili əsasında fərz etmək olar ki, birinci yaxınlaşmada 100 m məsafəyə qaçışda göstərilən orta nəticə, 30 m məsafəyə qaçışda göstərilən nəticələrdən xətti asılıdır. Yəni bu halda xətti reqresiya modeli tətbiq edilə bilər. Doüurdan da, $x_{hes} = 4{,}8$, $\bar{y}_{hes} = 13{,}65$ →.təcrübi göstəricilər $x_0 = 4{,}8$; $y_0 = 13{,}1$

$$y = a + bx.$$

Cədvəldəki nəticələr əsasında reqresiya tənliyinin əmsallarını hesablayırıq:

$$\sum x_i = 48; \quad \sum y_i = 132; \quad \bar{x} = 4{,}8; \quad \bar{y} = 13{,}2$$

$$\sum x_i^2 = 230{,}56; \quad \sum x_i y_i = 634{,}08; \quad n = 10$$

$$b = \frac{10 \cdot 634{,}08 - 48 \cdot 132}{10 \cdot 230{,}56 - 48^2} = 3$$

$$a = 13{,}2 - 3 \cdot 4{,}8 = -1{,}2$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$y = -1{,}2 + 3x \qquad (5)$$

(5) empirik tənliyindən istifadə edib, 30 m məsafəyə qaçışın nəticələrinə görə 100 m – məsafəyə qaçışda göstərilən nəticələri proqnozlaşdırmaq olar. Məsələn, əgər 30 m məsafəyə qaçışda 5,2 san nəticə göstərilibsə, onda 100 m məsafədə göstərilən nəticə:

$$-1{,}2 + 3 \cdot 5{,}2 = 14{,}4(san)$$

olacaq.

7.7. Qeyri-xətti empirik düsturların əmsallarının təyin olunması

1. $y = ax^b$

Qeyri-xətti tənliklər üçün məchul a və b əmsallarını hesablamaq üçün bu tənlikləri xəttiləşdirmək lazımdır.

$$y = ax^b$$

$$\lg y = \lg a + b \lg x$$
$$Y = A + bX.$$

Sonuncu, xətti tənliyə ən kiçik kvadratlar üsulunu tətbiq edərək, məchul A və b əmsalların təyin edirik:

$$Y_i = \lg y_i, \quad X_i = \lg x_i$$
$$A = \frac{\sum Y_i \cdot \sum X_i^2 - \sum X_i \cdot \sum X_i Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$
$$B = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \cdot \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$
$$A = \lg a \to a = 10^A$$

2. $y = ab^x \to \lg y = \lg a + x \lg b$

$$Y = A + xB$$
$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\sum Y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ B &= \frac{n \sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \end{aligned}\right\}$$
$$A = \lg a, \quad B = \lg b$$
$$a = 10^2; \quad b = 10^B$$
$$Y = \lg y$$

3. $y = a + \frac{b}{x}, \quad X = \frac{1}{x}$ işarə edək

$y = a + bX, \quad X = \frac{1}{x_i}.$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\sum Y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ b &= \frac{n \sum X_i y_i - \sum X_i \sum y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \end{aligned}\right\}.$$

7.8. Çoxölçülü reqresiya modeli

Bəzən y təsadüfi kəmiyyətinin mahiyyətini yalnız bir x sərbəst dəyişəni ilə izah etmək mümkün olmur. Ona görə də çoxölçülü xətti reqresiya modelindən istifadə edilir:

$$m_{y/x_1,x_2,\dots,x_n} = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n.$$

Burada artıq y təsadüfi kəmiyyətinin orta qiyməti bir neçə sərbəst dəyişənin qiymətləri ilə təyin olunur.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ kəmiyyətləri digər kəmiyyətlərin funksiyaları ola bilər. Xətti reqresiya anlayışı yalnız $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ parametrlərinə nəzərən xəttiliyi ifadə edir.

Məsələn, 2 ölçülü xətti reqresiya modelini nəzərdən keçirək:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_2.$$

Məçhul a_0, a_1, a_2 əmsallarını təyin etmək üçün ən kiçik kvadratlar üsulundan istifadə edək:

$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_1 - (a_0 + a_1 x_{1i} + a_1 x_{2i})]^2$$

E-nin minimum olması üçün aşağıdakı 3 şərt ödənilməlidir:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial a_2} = 0.$$

Nəticədə, 3 məchullu cəbri xətti tənliklər sistemi əldə edirik:

$$\left.\begin{array}{r} a_0 n + a_1 \sum x_{1i} + a_2 \sum x_{2i} = \sum y_i \\ a_0 \sum x_{1i} + a_1 \sum x_{1i}^2 + a_2 \sum x_{1i} x_{2i} = \sum x_{1i} y_i \\ a_0 \sum x_{2i} + a_1 \sum x_{1i} x_{2i} + a_2 \sum x_{2i}^2 = \sum x_{2i} y_i \end{array}\right\}$$

Bu sistemi həll edib məchul a_0, a_1, a_2 parametrlərini təyin edirik.

7.9. Reqresiya əmsalının etibarlığının yoxlanılması Proqnozlaşdırmanın standart xətası

E və x kəmiyyətləri arasındakı real asılılğın təqribi təsvirinin keyfiyyət ölçüsü - y_i qiymətlərinin reqresiya xəttindən standart meyli ilə ifadə olunur. Bu meyl proqnozlaşdırmanın standart xətası adlanır və aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - a\sum y_i - b\sum x_i y_i}{n-2}}$$

və ya

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum\left(y_i - \hat{y}(x_i)\right)^2}{n-2}}$$

$$(\hat{y} = a + bx)$$

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{(1-r^2)\sum(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}$$

Reqresiya tənliyinin mütləq xətası:

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y\sqrt{1-r^2}.$$

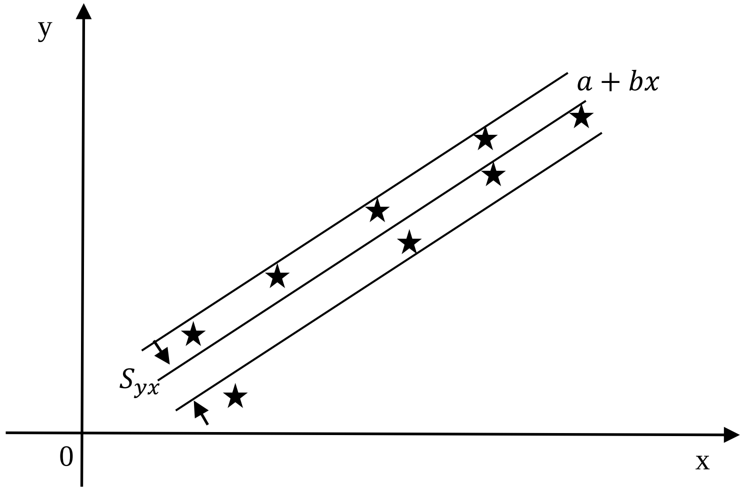
Reqresiya tənliyinin nisbi xətası

$$\sigma'_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\bar{y}}100\%.$$

Yuxarıdakı cədvəldəki qiymətlər əsasında

$$S_{yx} = 0{,}11(san).$$

Beləliklə reqresiya xəttindən $\pm 0{,}11$ məsafədə yerləşən 2 düz xətt reqresiya ətrafı zonanı məhdudlaşdırır. y_i-təcrübi qiymətlərin 68,3%-i bu zonaya düşür.



S_{yx} –həm də qalıq orta kvadratik meyl olub, Y təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinin reqresiya xəttinə nəzərən rəqs etmə xarakterini ifadə edir.

7.10. Seçmə reqresiya əmsalının xətası

Aşağıdakı düsturlardan təyin edilir

$$S_b = \frac{S_{yx}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

$$S_b = \sqrt{\frac{(1-r^2)D_y}{(n-2)D_x}}$$

$$D_y = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$$

$$D_x = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}.$$

7.11. Styudent əmsalı vasitəsiylə reqresiya əmsalının statistik əhəmiyyət dərəcəsinin təyini

Reqresiya əmsalının statistik əhəmiyyət dərəcəsinin qiymətləndirilməsi nəticə və faktor əlamətləri arasında qarşılıqlı əlaqənin movcud olmaması hipotezinin yoxlanılmasıdır. Bu Hipotez onu göstərir ki, reqresiya əmsalının sıfırdan fərqli qiymətləri yalnız seçmənin təsadüfi olması ilə şərtlənir. Baş yığımda isə bu tənliyin bütün əmsalları sıfra bərabərdir.

$t_{hes} > t_{\alpha,\nu}$ olarsa, $H_0: (b = 0)$ hipotezi rədd edilir. Yəni reqresiya əmsallarının sıfırdan fərqli qiymətləri yalnız təsadüfi amillərlə bağlı deyil Baş yığımda bu əmsalların hamısı sıfır deyil. b - əmsalı statistik baxımdan əhəmiyyətlidir. Fator əlaməti (x), nəticə əlamətinə real həlledici təsir göstərir.

Korelyasiya əmsalından fərqli olaraq, b-əmsalı nə max, nə də min qiymətə malikdir. Beləliklə, öz-özlüyündə faktor əlamətinin nəticə əlamətinə təsir gücünü ifadə etmir. Amma əgər, ən kiçik qiymətli b statistik baxımdan əhəmiyyətli olsa, onda o reqresiya modelində əhəmiyyətli rol oynaya bilər.

Misal 1. $y = -1{,}2 + 3x$

$a = -1{,}2$

$b = 3$

$S_{yx} = 0{,}11$

$\bar{x} = 4{,}8$

$n = 10$

$\sum x_i^2 = 230{,}56.$

Seçmə reqresiya əmsalının xətası:

$$S_b = \frac{S_{yx}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}} = \frac{0{,}11}{\sqrt{230{,}56 - 10 \cdot 4{,}8^2}}.$$

Student kriteriyasının hesabı qiyməti:

$$t_{hes} = \frac{b}{S_b} \approx 6{,}82.$$

Sərbəstlik dərəcəsi $\nu = n - 2 = 8$, $\alpha = 0{,}05$, $t_{\alpha,\nu} = 2{,}306$

$$t_{hes} > t_{\alpha,\nu} \rightarrow H_0: (b = 0)$$

hipotezi rədd edilir. b-statistik baxıımdan əhəmiyyətlidir.
Faktor əlaməti – 30 m – göstərilən nəticə
Nəticə əlaməti – 100 m – göstərilən nəticə.

Misal 2. $y = 0{,}42 + 0{,}024x$

$r_{xy} = 0{,}564 \quad n = 20 \quad \sum x_i = 237{,}4$

$\sum y_i = 14{,}06; \quad \sum x_i^2 = 2861{,}6$

$\sum y_i^2 = 9{,}9596$

$$S_b = \sqrt{\frac{(1-r^2)}{n-2}\frac{D_y}{D_x}} = 0{,}008$$

$$D_y = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 0{,}0754$$

$$D_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 43{,}66$$

$$t_{hes} = \frac{b}{S_b} = \frac{0{,}024}{0{,}008} = 3 > t_{\alpha,\nu}$$

$t_{\alpha,\nu} = 2{,}88 \quad \alpha = 0{,}01 \quad \nu = n - 2 = 18$

Deməli, seçmə əmsalın $b = 0{,}024$ qiyməti statistik baxımdan əhəmiyyətlidir.

FƏSİL 8
DİSPERSİYA ANALİZİ

İdman təcrübəsində bizi daha çox maraqlandıran sual: bir və ya bir neçə faktorların nəticəvi əlamətə (qeydə alınan) olan əhəmiyyətli təsiridir.

Dispersiya analizinin əsas məqsədi kənar faktorların əlaqəsi və nəticəvi əlamətə və göstəriciyə olan təsirinin qiymətləndirilməsidir. Fiziki hərəkətlər kompleksinin idman nəticəsinə əhəmiyyətli təsiri məsələsini araşdıraq. Bu məsələdə bir faktor tədqiq olunur, ona görə də məsələnin araşdırılmasında bir faktorlu dispersiya analizindən istifadə olunur.

Faktorlar idarə olunan və idarə olunmayanlara ayrılırlar. Məsələn, məşq yükünün həcmi, idmançının ixtisası və təsnifatı – idarə olunan faktorlara aiddir, idmançının emosional vəziyyəti, iş qabiliyyəti, metroloji şərait – idarə olunmayan faktorlardır. Adətən, hər faktorun təsiri bir neçə qrup üzərində sınaqdan keçirilir. Belə qrupların sayı faktorun səviyyəsini xarakterizə edir.

Dispersiya analizi metodu əlamətin variasiyasının qiymətləndirmə təsirini faktor kimi qəbul etmək üçün imkan verir. Dispersiya analizinin əsas ideyası – müşahidə nəticələrinin ümumi variasiyasının iki komponentindən ibarət olunmasındadır (qrupdaxili və qruparası variasiya) [8].

Variasiya altında variantların kvadrat yayınma cəmi başa düşülür, yəni

$$\sum (x - \bar{x}_0)^2.$$

Tədqiqat zamanı bir qrupun bir neçə dəfə testləşdirmə (sınaqlaşdırma) halı ilə rastlaşırıq. Nəticələrin təkrarında dispersiya analizinin elə modeli tədbiq olunur ki, burada qrupdaxili və qruparası variasiya arasındakı əlaqə nəzərə alınır. Bu model aşağıdakı kimi yazılılır:

$$Q_{\text{ümumi}} = Q_{qa} + Q_{qd}$$

burada $Q_{\text{ümumi}}$ – ümumi variasiya;

Q_{qa} – qruparası variasiya;

Q_{qd} – qrupdaxili variasiya.

Bu model testlər nəzəriyyəsində daha geniş istifadə olunur və dəfələrlə sınaq apardıqda testin etibarlığını qiymətləndirir.

Bu qanuna uyğunluğu misal üzərində izah edək. Tədqiq edilən 3 nəfər 2 cəhddə yerindən uzunluğa tullanmada aşağıdakı nəticələri göstəriblər.

Tədqiq edilənlər	**1-ci cəhddin nəticəsi (sm)**	**2-ci cəhddin nəticəsi (sm)**
1	210	212
2	207	208
3	216	210
orta nəticə	211	210

qrupdaxili variasiya

qruparası variasiya

Orta nəticələri təyin etmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə edilir:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\bar{X}_0 = \frac{210 + 207 + 216 + 212 + 208 + 210}{3} = 210{,}5$$

1-ci cəhddin orta nəticəsi (I qrup)

$$\bar{X}_1 = \frac{210 + 207 + 216}{3} = 211$$

2-ci cəhddin orta nəticəsi (II qrup)

$$\bar{X}_2 = \frac{212 + 208 + 210}{3} = 210$$

Kvadrat yayınma ümumi cəmi (ümumi variasiya) ümumi orta və hər nəticənin arasındakı variasiyanı müəyyən edir (1-ci və 2-ci cəhdlər) və düsturla hesablanır:

$$Q_{ümumi} = \sum_i \sum_j \left(x_{ij} - \bar{x}_0\right)^2$$

$$Q_{ümumi} = (210 - 210{,}5)^2 + (207 - 210{,}5)^2 +$$
$$+(216 - 10{,}5)^2 + (212 - 210{,}5)^2 +$$
$$+(208 - 210{,}5)^2 + (210 - 210{,}5)^2 = 51{,}5$$

$$Q_{qa} = \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x}_0)^2 \cdot n_j$$

$$Q_{qa} = (211 - 210{,}5)^2 \cdot 3 + (210 - 210{,}5)^2 \cdot 3 = 1{,}5$$

$$Q_{qd} = \sum_i \sum_j \left(x_{ij} - \bar{x}_0\right)^2$$

$$Q_{qd} = (210 - 211) + (207 - 211) + (216 - 211)^2 +$$
$$+(208 - 210)^2 + (210 - 210)^2 = 50$$

$Q_{ümumi}$, Q_{qa}, Q_{qd} nəticələrindən məlum olur ki, bərabərlik ödənilir.

51,5=1,5+50

51,5=51,5

Bu misalda fərz etmək olar ki, 1-ci cəhddin nəticələri 2-ci cəhddin nəticələrindən fərqlənmirlər. Onda bu fərziyyəni statistik hipotez şəklində yazmaq olar $H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2$

Fərz etsək ki, iki cəhd bir-birindən yalnız vaxt ölçüsü ilə fərqlənirlər. Onda demək olar ki, vaxt ölçüsü (iki cəhd arasındakı) idman nəticəsinə təsir göstərmir.

İdman nəticəsinə göstərilən faktorların sayından asılılıq dispersiya analizi birfaktorlu və çoxfaktorlu ola bilər.

8.1. Birfaktorlu dispersiya analizinin hesablanması

Fiziki hərəkətlər kompleksinin idman nəticəsinə əhəmiyyətli təsiri məsələsini araşdıraq. Bu məsələdə bir faktor tədqiq olunur, ona görə də məsələni araşdırmaq üçün bir faktorlu dispersiya analizindən istifadə olunur. Dispersiya analizi metodu əlamətin variasiyasının qiymətləndirmə təsirini faktor kimi qəbul etmək üçün imkan verir. Dispersiya analizin əsas ideyası müşahidə nəticələrinin ümumi variasiyasının iki komponentdən ibarət olmasındadır (qrupdaxili və qruparası variasiya). Tədqiqat zamanı, bir qrupun bir neçə dəfə testləşdirmə (sınaqlaşdırma) halı ilə rastlaşırıq. Nəticələrin təkrarında dispersiya analizinin elə modeli tətbiq olunur ki, burada qrupdaxili və qruparası variasiya arasındakı əlaqə nəzərə alınır.

Testlər nəzəriyyəsində bu model daha geniş istifadə olunur. Modelin tətbiqini aşağıdakı məsələ üzərində araşdıraq. İdmançı-həndbolçu qızlar (10 nəfər) aşağıdakı testlərdən keçiblər: top ilə qaçış, uzunluğa tullanma, üç qat tullanma. Hər üç test ilkin mərhələdə: fiziki hazırlığın cəmləşməsi mərhələsi əsasında keçirilib.

Sınaq müddətində idmançı-qızlar ümumi fiziki hazırlıqlarını yaxşılaşdırıblar. İsbat etmək lazımdır ki, bu yaxşılaşdırma ehtibarlıdı. Yoxlanılan hipotez bu cür təsvir edilir:

$H_0: (\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3)$, yəni fərz edirik ki, üç sınağın orta qiymətləri bərabərdir, həmçinin, idman nəticələrinin sınaqdan sınağa təkrarlanmasını qiymətləndirək. Bunun üçün qrupdaxili korrelyasiya əmsalını hesablamaq lazımdır, bu da testin etibarlıq əmsalı ilə eynidir (bərabərdir).

Sınağın nəticələri və aralıq hesablamalar aşağıdakı cədvəldə verilib.

Test - uzunluğa tullanma (metr)

№	1-ci sınaq	2-ci sınaq	3-cü sınaq	Sətirlərin cəmi $\Sigma x_{sət}$	Sətirlər cəminin kvadratı $(\Sigma x_{sət})^2$
1	2	3	4	5	6
1	2,35	2,33	2,38	7,06	49,8436
2	2,08	2,10	2,15	6,33	40,0689
3	2,25	2,30	2,40	6,95	48,3025
4	2,12	2,20	2,38	6,70	44,89
5	1,90	2,00	2,10	6,00	36,00
6	2,20	2,30	2,30	7,00	49,00
7	2,18	2,20	2,28	6,66	44,3556
8	1,96	2,15	2,18	6,27	39,3129
9	2,28	2,30	2,36	6,94	48,1636
10	2,08	2,18	2,20	6,46	41,7316
Sütunun cəmi $\Sigma x_{süt}$	**21,40**	**22,06**	**22,73**	**$\Sigma\Sigma x_{sət}$= 66,19**	**$\Sigma(\Sigma x_{sət})2$= 441,6687**
Sütunun cəminin kvadratı $(\Sigma x_{süt})^2$	457,96	486,66436	516,6529	**$\Sigma(\Sigma x_{süt})^2$=1461,2665**	
$\bar{x}_1 = 2{,}140$ $\bar{x}_2 = 2{,}206$ $\bar{x}_3 = 2{,}273$ $\bar{x}_0 = 2{,}2063$				**$\Sigma\Sigma x^2$=147,3833**	

Nəticələrin ümumi sayını hesablayaq:

$N = n_1 + n_2 + n_3 = 10 + 10 + 10 = 30$

Sətirlərin cəmini hesablayaq (sütun 5):

1-ci sətir: 2,35+2,33+2,38=7,06

2-ci sətir 2,08+2,10+2,15=6,33 və s.

5-ci sütundakı ədədlərin cəmini hesablayaq:

$\sum\sum x_{sət} = 7{,}06 + 6{,}33 + \ldots + 6{,}46 = 66{,}19.$

Sətir cəminin kvadratlarını hesablayaq:
1-ci sətir: $(7{,}06)^2 = 49{,}8436$
2-ci sətir: $(6{,}33)^2 = 40{,}0689$ və s.

6-cı sütunun cəmini hesablayaq:
$\sum(\sum x_{sət})^2 = 441{,}6687$.

2-ci, 3-cü və 4-cü sütundakı ədədlərin cəmini hesablayaq:
2-ci sütun: $\sum x_{süt} = 21{,}40$
3-cü sütun: $\sum x_{süt} = 22{,}06$
4-cü sütun: $\sum x_{süt} = 22{,}73$

Ədədlərin sütun cəminin kvadratlarını hesablayaq:
2-ci sütun: $(\sum x_{süt})^2 = 457{,}96$
3-cü sütun: $(\sum x_{süt})^2 = 486{,}6436$
4-cü sütun: $(\sum x_{süt})^2 = 516{,}6529$

Ədədlərin sütun cəminin kvadratlarının cəmini hesablayaq:
$\sum(\sum x_{süt})^2 = 45{,}96 + 486{,}6436 + 516{,}6529 = 1461{,}2565$.

Qrupların və ümumi orta qiymətləri hesablayaq:

$$\bar{x}_1 = \frac{21{,}40}{10} = 2{,}14$$

$$\bar{x}_2 = \frac{22{,}06}{10} = 2{,}206$$

$$\bar{x}_3 = \frac{21{,}40 + 22{,}06 + 22{,}73}{30} = 2{,}2063$$

Qrup orta qiymətlər bir-birindən fərqlənirlər. İsbat etmək lazımdır ki, bu fərq etibarlıdır.

Cədvəldəki nəticələrin kvadrat cəmini hesablayaq:

$$\sum\sum x^2 = (2{,}35)^2 + (2{,}08)^2 + \ldots + (2{,}20)^2 = 1461{,}2565.$$

Ümumi variasiyanı hesablayaq:

$$Q_{\text{üm}} = \sum\sum x^2 = \frac{\sum\sum(x_{süt})^2}{n \cdot k}$$

$$Q_{\text{üm}} = 147{,}3833 - \frac{(66{,}19)^2}{30} =$$

$$= 147{,}3833 - 146{,}0372 = 1{,}3461$$

Qruparası variasiyanı hesablayaq:

$$Q_{qr.ar} = \frac{\sum(\sum x_{süt})^2}{n} - \frac{(\sum\sum x_{set})^2}{n \cdot k}$$

$$Q_{qr.ar} = \frac{1461{,}2565}{10} - \frac{(66{,}19)^2}{30} =$$

$$= 146{,}12565 - 146{,}0372 = 0{,}08845$$

Qrupdaxili variasiyanı hesablayaq:

$$Q_{qr.d} = \frac{\sum(\sum x_{set})^2}{k} - \frac{(\sum\sum x_{set})^2}{n \cdot k}$$

$$Q_{qr.d} = \frac{4416687}{3} - \frac{(66{,}19)^2}{30} =$$

$$= 147{,}2229 - 146{,}0372 = 1{,}1857$$

Qalıq variasiyanı hesablayaq:

$$Q_q = Q_{\text{üm}} - Q_{qr.ar} - Q_{qr.d}$$

$$Q_q = 1{,}3461 - 0{,}08845 - 1{,}1857 = 0{,}07195$$

Ümumi dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2_{\text{üm}} = \frac{Q_{\text{üm}}}{N-1} - \frac{1{,}3461}{30-1} = 0{,}0464$$

Qruparası dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2_{qr.ar} = \frac{Q_{qr.ar}}{k-1} - \frac{0{,}08845}{3-1} = 0{,}0442$$

Qrupdaxili dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2_{qr.ar} = \frac{Q_{qr.d}}{n-1} - \frac{1{,}1857}{10-1} = 0{,}1317$$

Qalıq dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2_{qalıq} = \frac{Q_q}{(n-1)(k-1)} = \frac{0{,}07195}{(10-1)(3-1)} = 0{,}00399$$

$H_0: (\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3)$ hipotezin yoxlanması üçün F_1 hesablayacaq:

$$F_1 = \frac{\sigma^2_{qr.ar}}{\sigma^2_q} = \frac{0{,}0442}{0{,}00399} = 11{,}07$$

$$F_2 = \frac{\sigma^2_{qr.d}}{\sigma^2_q} = \frac{0{,}1317}{0{,}00399} = 30{,}5$$

Fişerin paylanma cədvəlinə əsasən $a = 0{,}05$ və sərbəstlik dərəcəsi

$$K_1 = k - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$K_2 = (n-1)(k-1) = (10-1)(3-1) = 18$$

üçün

$$F_{\alpha,k_1,k_2} = 3{,}55$$

$$3{,}55 < 11{,}07(F_{\alpha,k_1,k_2} < F_1)$$

$\alpha = 0{,}05$ və sərbəstlik dərəcəsi

$$K_1 = n - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$K_2 = (n-1)(k-1) = (10-1)(3-1) = 18$$

$$F_{\alpha,k_1,k_2} = 2{,}46$$

$$2{,}46 < 30{,}5(F_{\alpha,k_1,k_2} \prec F_1)$$

Beləliklə, hipoteza $H_0: (\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3)$ 95%-li ehtimalla rədd edilir. Deməli, idmançı-qızlar, sınaq müddətində, test nəticələrini yaxşılaşdırıblar.

Öyrənilən faktorun (fiziki hərəkətlərin) test nəticəsinə təsirini hesablayaq:

$$\eta_1 = \frac{Q_{qr.ar}}{Q_{üm}} = \frac{0{,}08845}{1{,}3461} = 0{,}0657$$

Qrupdaxili korrelyasiya əmsalını hesablayaq:

$$\eta_2 = \frac{\sigma_{qr.d}^2 - \sigma_q^2}{\sigma_{qr.d}^2} = \frac{0{,}1317 - 0{,}00399}{0{,}1317} = 0{,}96$$

Hesablama nəticələrini cədvəl şəklində göstərək:

Variasiya	Kvadratlar cəmi	Sərbəstlik dərəcəsi	Dispersiya	F-kriteri
Ümumi	1,3461	N-l 30-1	0,0464	-
Qrupdaxili (sınaq arası)	1,1157	n-1 10-1	0,1317	$F_2 = 30{,}5$ $\alpha = 0{,}05$ $F_{\alpha,k_1,k_2} = 2{,}46$
Qruparası	0,08845	k-1 3-1	0,0442	$F_1 = 11{,}07$ $\alpha = 0{,}05$ $F_{\alpha,k_1,k_2} = 3{,}55$
Qalıq	0,07195	(n-l)(k-l) (10-1)(3-1)	0,00399	-

İkinci test – top ilə 30 metr məsafəni qaçmaq. Testin nəticələri aşağıdkı cədvəldə göstərilib:

K	1-ci sınaq	2-ci sınaq	3-cü sınaq	Sətirlərin cəmi $\sum x_{sət}$	Sətirlər cəminin kvadratı $(\sum x_{sət})^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	4,29	6,26	5,85	16,4	268,96
2	4,6	6,35	6,22	17,17	294,8089
3	4,54	6,15	6,36	17,05	290,7025
4	5,05	5,45	6,15	16,65	277,2225
5	4,95	6,00	6,85	17,60	309,76
6	4,83	5,80	6,22	16,85	283,922
7	4,6	5,81	6,40	17,11	292,7521
8	5,29	6,92	7,72	19,93	397,2049
9	4,5	5,57	6,34	16,41	269,2881
10	4,9	5,10	5,99	15,99	255,6801

Sütunun cəmi $\sum x_{süt}$	47,61	59,41	64,1	$\sum\sum x_{sət} = 171{,}12$	$(\sum x_{sət})^2 = 2940{,}3016$
Sütünun cəminin kvadratı $(\sum x_{süt})^2$	2266,7121	3529,5481	4108,81	$\sum(\sum x_{sət})^2 = 9905{,}0702$	
$\bar{x}_1 = 4{,}761$ $\bar{x}_2 = 5{,}941$ $\bar{x}_3 = 6{,}41$ $\bar{x}_0 = 5{,}704$				$\sum\sum x^2 = 995{,}6941$	

Dispersiya analizinin nəticələri aşağıdakı cədvəldə göstərilib:

Variasiya	Kvadratlar cəmi	Sərbəstlik dərəcəsi	Dispersiya	F-kriteri
Ümumi	19,62574	N-l 30-1	0,6767496	-
Qrupdaxili (sınaq arası)	4,03207	n-1 10-1	0,4480077	$F_2 = 6{,}981$ $\alpha = 0{,}05$ $F_{\alpha,k_1,k_2} = 2{,}46$
Qruparası	14,43856	k-1 3-1	7,21928	$F_1 = 156{,}243$ $\alpha = 0{,}05$ $F_{\alpha,k_1,k_2} = 3{,}55$
Qalıq	1,15511	(n-l)(k-l) (10-1)(3-1)	0,0641727	-

Öyrənilən faktorun test nəticələrinə təsirini hesablayaq:

$$\eta_1 = \frac{Q_{qr.ar}}{Q_{üm}} = \frac{14{,}43856}{19{,}62574} = 0{,}735$$

Qrupdaxili korrelyasiya əmsalını

$$\eta_2 = \frac{\sigma_{qr.d}^2 - \sigma_q^2}{\sigma_{qr.d}^2} = \frac{0{,}448077 - 0{,}0641727}{0{,}4480077} = 0{,}8567$$

və ya $(0{,}8567)^2 \cdot 100\% = 73{,}39\%$.

Əldə edilən nəticələrə əsaslanaraq bu qənaətə gəlirik, məşq zamanı fiziki hərəkətlərin yerinə yetirilməsi test nəticələrinə bir o qədər əhəmiyyətli təsir göstərməyib.

	1-ci sınaq	2-ci sınaq	3-cü sınaq	Sətirlərin cəmi $\sum x_{sət}$	Sətirlər cəminin kvadratı $(\sum x_{sət})^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	7,43	7,20	7,30	21,93	480,92
2	6,60	6,55	6,65	19,80	392,04
3	6,89	7,10	6,65	20,64	426,00
4	6,48	6,05	6,15	18,68	348,94
5	5,50	5,50	5,54	16,54	273,57
6	6,99	6,80	6,80	20,59	423,94
7	6,81	6,74	6,80	20,35	414,12
8	5,61	5,90	6,25	17,76	315,41
9	7,35	6,85	6,70	20,90	436,81
10	6,60	6,15	6,45	19,20	368,64
Sütunun cəmi $\sum x_{süt}$	66,26	64,84	65,29	$\sum\sum x_{sət} = 196{,}39$	$(\sum x_{sət})^2 = 3880{,}4267$
Sütünun cəminin kvadratı $(\sum x_{süt})^2$	4390,3876	4204,2256	4262,7841	$\sum(\sum x_{sət})^2 = 12857{,}397$	
$\bar{x}_1 = 6{,}626$ $\bar{x}_2 = 6{,}484$ $\bar{x}_3 = 6{,}526$ $\bar{x}_0 = 6{,}5453$				$\sum\sum x^2 = 1290{,}2799$	

Dispersiya analizinin nəticələri aşağıdakı cədvəldə göstərilib:

Variasiya	Kvadratlar cəmi	Sərbəstlik dərəcəsi	Dispersiya	F-kriteri
Ümumi	4,6455	N-l 30-1	0,16	-
Qrupdaxili (sınaq arası)	7,8411	n-1 10-1	0,8712	$F_2 = -4{,}7528$ $\alpha = 0{,}05$ $F_{\alpha,k_1,k_2} = 2{,}46$

Qruparası	0,1053	k-1 3-1	0,05265	$F_1 = -0,2872$ $\alpha = 0,05$ $F_{\alpha,k_1,k_2} = 3,55$
Qalıq	-3,3009	(n-l)(k-l) (10-1)(3-1)	-0,1833	-

Öyrənilən faktorun test nəticələrinə təsirini hesablayaq:

$$\eta_1 = \frac{Q_{qr.ar}}{Q_{üm}} = \frac{0,1053}{4,6455} = 0,0226$$

Qrupdaxili korrelyasiya əmsalını hesablayaq:

$$\eta_2 = \frac{\sigma_{qr.d}^2 - \sigma_q^2}{\sigma_{qr.d}^2} = \frac{0,8712 + (-0,1833)}{0,8712} = 1,05$$

Nəticə: $\alpha = 0,05$ və sərbəstlik dərəcəsi k_1 və k_2 üçün $F_{\alpha,k_1,k_2} > F_1$ və $F_{\alpha,k_1,k_2} > F_1$ 3,55>-0,2872; 2,46>-4,7528.

Aparılan tədqiqatlar və hesablamalar əsasında aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

Həndbolçu-qızların idman hazırlığına fiziki hərəkətlərin təsirini qiymətləndirərək aşağıdakı nəticələrə gəlirik:

1. Sınaqlar zamanı aparılan testlər etibarlıdır;
2. İdmançı qızların fiziki hazırlığı birsəviyyəlidir;
3. Uzunluğa tullanma və 30 metr məsafəyə qaçışda olan testlər idmançıların göstərdiyi nəticəyə müsbət təsir edib;
4. Üçqat tullanma testləri idmançıların nəticələrini yaxşılaşdırmayıb.

Hərəkətlər kompleksini bir daha nəzərdən keçirmək və dəyişikliklər etmək tövsiyə edilir.

Üçqat tullanmada əldə edilən nəticələri yüksəltmək üçün məşq zamanı fiziki hərəkətlərdə bir sıra dəyişikliklər etməli və onların sayını artırmaq tələb olunur.

ƏLAVƏLƏR

Styudent t – kriterisinin böhran qiymətləri

Cədvəl 1

Sərbəstlik dərəcəsi ədədi	**Əhəmiyyət səviyyəsi**			
	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,001$
1	6,314	12,706	63,657	636,619
2	2,92	4,308	9,925	31,599
3	2,353	3,182	5,841	12,924
4	2,132	2,776	4,604	8,61
5	2,015	2,571	4,032	6,869
6	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,895	2,365	3,499	5,408
8	1,86	2,306	3,355	5,041
9	1,833	2,262	3,25	4,781
10	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,771	2,16	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,977	4,14
15	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,746	2,12	2,921	4,015
17	1,74	2,11	2,898	3,965
18	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,725-	2,086	2,845	3,85
21	1,721	2,08	2,831	3,819
22	1,717	2,074	2,819	3,792
23	1,714	2,069	2,807	3,768
24	1,711	2,064	2,797	3,745
25	1,708	2,06	2,787	3,725
26	1,706	2,056	2,779	3,707
27	1,703	2,052	2,771	3,69
28	1,701	2,048	2,763	3,674
29	1,699	2,045	2,756	3,659
30	1,697	2,042	2,75	3,646
40	1,684	2,021	2,704	3,551
50	1,676	2,009	2,678	3,505
60	1,664	2,000	2,66	3,505
80	1,664	1,99	2,639	3,416

100	1,66	1,984	2,626	3,391
120	1,658	1,98	2,617	3,373
200	1,653	1,972	2,601	3,34
500	1,648	1,965	2,586	3,31
∞	1,645	1,96	2,58	3,291

Z -ədədi üçün korrelyasiya əmsalının qiymətləri

Cədvəl 2

r	ədədin 1/100 hissəsi									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
0,3	0,309	0,321	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,338	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,498	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,663	0,678
0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,776	0,793	0,811	0,829	0,848

0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,951	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,188	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,527	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647

Cədvəl E.K.Merkuryeva tərəfindən tərtib olunub (1970)

Fişer F kritesinin böhran qiymətləri

Cədvəl 3

k_1 – sərbəstlik dərəcəsi											
k_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	161	200,0	216	225	230	234	237	239	241	242	243
2	18,1	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,9	8,8	8,8	8,8	8,8
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	6,1	6,0	6,0	6,0	5,9
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,8	4,7	4,7
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,2	4,1	4,1	4,0
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,7	3,6	3,6
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	2,1	3,0	3,0	2,9
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,6
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,6	2,5
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,5	2,5
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3
21	4,3	3,5	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3
23	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2
25	4,2	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2
27	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,2
29	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1

30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1
40	4,1	3,2	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0
50	4,0	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,3	2,1	2,1	2,0	2,0
100	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9
150	3,9	3,1	2,7	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9
200	3,9	3,0	2,7	2,4	2,3	2,1	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8
400	3,9	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8
1000	3,9	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8
k_1 – sərbəstlik dərəcəsi											
12	**14**	**16**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**75**	**100**	**200**	**500**
244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254
19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
8,7	8,7	5,8	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	5,6
5,9	5,9	5,8	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	5,6
4,7	4,6	4,6	4,6	4,5	4,5	4,5	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4
4,0	4,0	3,9	3,9	3,8	3,8	3,8	3,8	3,7	3,7	3,7	3,7
3,6	3,5	3,5	3,4	3,4	3,4	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,2
3,3	3,2	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	3,0	2,9
3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8	2,7	2,7
2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6
2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4
2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3
2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2
2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,2	2,1
2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1
2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0
2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0
2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0	1,9
2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9
2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9
2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8
2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7
2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7
2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7
2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7
2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6
2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5
2,0	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5
1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3
1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3
1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2
1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2
1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,1
1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1

ƏDƏBİYYAT

1. В.С. Иванов, Основы математичиской статистики, Москва, 1990, 176 с.
2. А.В.Лебедев, Делающим первие шагив науке, Санкт-Петербург, «Образование», 2006, 418с.
3. Бритвина В., Конюхов В.В. Вышая математика и математическая статистика. Москва, Физкультра, 2007, 368 с.
4. Дудин Н.М., Ласников Н.В., Лезина М.Л. Статистика. Москва, «Юрайт», 2017, 378с.
5. Павлушков И., Розовский Л. Основы высшей математики и математической статистики. Москва, «ГЭОТАР-Медия», 2009, 432с.
6. ГоряиноваЕ.Р., Панков А.Р., ПлатоновЕ.Н. Прикладные методы анализа статистических данных. Москва, «Высшая школа эконимики» 2012, 312с.
7. Денисова Л.В., Хмельницкая И.В., ХаренкоЛ.А. Измрения и методы математической статистики в физическом воспитании и спорте. Киев, «Олимпийская литература», 2018, 128с.
8. Елисеева И.И., Флуд Н.А., ЮзбашевМ.М- Обшая теория статистики. Москва, «Финансы и стастика», 2006.
9. Елисеева И.И., Флуд Н.А., ЮзбашевМ.М. Практикум по общей теории статистика. Москва, «Финансы и стастистики», 2008, 512с.
10. S.Ö. Ömərov, N.Ə. Cavadov - Riyazi və tətbiqi statistika, Bakı, 2007, Azərnəşr.
11. Əbiyev T.Q. Ali riyyaziyyat fənnidə statistik analizin əsasları, Bakı, 2005,118 s.
12. Əbiyev A.Q., Əbiyev T.Q., Agayeva M.S., Əbiyev E.M. “Ali riyaziyyat” Bakı “Nərgiz”., 2011, 255 səh.

13. Kələntərli N.M., Mirsəlimova G.M., Vəliyeva Ş.M., Mirzəyeva B.D., Ali riyaziyyat və riyazi statistika, Bakı, “Müəllim”, 2014, 262 səh.
14. Əliyev F.N., Mikayılov C.İ., Əliyev Y.N., “Statistika”, 2015, 246 səh.
15. David R. Anderson, Denis J. Sweeney, Thomas A. Williaams, James J. Cochran, Statistics for Business and economics 12-E, , USA, 2014. 1204 p.

MÜNDƏRİCAT

Nailə Kələntərli

STATİSTİK TƏHLİLƏ GİRİŞ
(ADBTİA – nın tələbələri üçün dərslik)

Nəşriyyatın direktoru: M.Şəfiyev

“Müəllim” nəşriyyatında çap olunmuşdur.
Tel.: (+99412) 555 15 60
E-mail: muallim.mmc@gmail.com

Çapa imzalanmışdır: 05.10.2022. Sifariş: 157
Kağız formatı: $60\times84^{1/16}$. Şərti ç.v.: 9,125. Sayı: 100