Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi

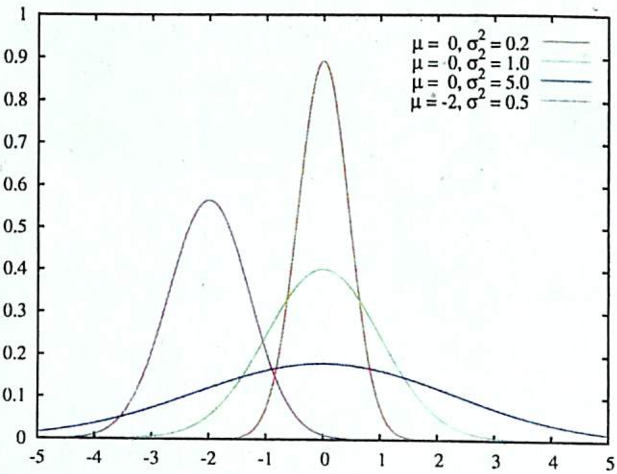
Azərbaycan Respublikası Gənclər və İdman Nazirliyi

Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyası

N.M. Kələntərli
Ş.M. Vəliyeva

R İ Y A Z İ Y Y A T

Dərslik



Bakı – 2020

N.M. Kələntərli
Ş.M. Vəliyeva

RİYAZİYYAT

Dərslik

Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasının Metodiki Şurasının 12 fevral 2020-ci il tarixli (protokol № 1) qərar ilə təsdiq edilib

Bakı – 2020

Müəlliflər: ***Kələntərli N.M.*** *– ADBTİA-nın "İdman menecmenti və kommunikasiya" kafedrasının müdiri, m.ü.e.d, professor əvəzi;*
Vəliyeva Ş.M. *- ADBTİA-nın "İdman menecmenti və kommunikasiya" kafedrasının baş müəllimi.*

Rəy verənlər: ***Əhmədov N.Q.*** *- Azərbaycan Dövlət İqtisad Universitetinin "Riyaziyyat" kafedrasının müdiri, r.e.d., professor;*
Əbiyev T.Q. *- "İdman menecmenti və kommunikasiya" kafedrasının dosenti, r.e.d., əməkdar müəllim.*

"Riyaziyyat" adlı dərslik ADBTİA-nın "Bədən tərbiyəsi və idman" ixtisası üzrə bakalavr pilləsində təhsil alan tələbələri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Ön söz

Gələcək kadrların hazırlandığı ali məktəblərdə öyrənilən fənlər arasında riyaziyyatın xüsusi əhəmiyyəti vardır. Tələbələrin riyazi biliyini yüksəltmək, onların yaradıcı təfəkkürünü, istedadlarını inkişaf etdirmək, müstəqil hesablama aparmaq vərdişlərini artırmaq üçün "Riyaziyyat" fənni mühüm əhəmiyyətə malikdir. Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasının tələbələri üçün yazılmış bu dərslik iki hissədən ibarətdir.

I hissədə funksiyanın törəməsi, törəmənin hesablanma qaydaları, qabarıq və çökük əyrilər, qeyri müəyyən və müəyyən inteqrallar, inteqrallama üsulları və s. bu kimi mövzular ardıcıllıqla və izahlı şəkildə şərh edilmişdir. Hər bir mövzu və fəslin sonunda nəzəri materialların tələbələr tərəfindən daha yaxşı qavranılması üçün misallar həll edilmiş və sərbəst işləmələri üçün tapşırıqlar verilmişdir.

II hissədə ehtimal nəzəriyyəsinin və statistikanın əsasları şərh olunub. Dərslikdə, ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti, təsadüfi hadisələr, təsadüfi kəmiyyətlər, statistik xarakteristikalr və s. kimi mövzular izah edilmişdir. Nəzəri materialla yanaşı misalların izahli həlli verilmişdir. Hər mövzuya aid auditoriyada həll ediləcək tapşırıqlar verilib. Təqdim olunan bu dərslikdə statistik təhlilin metorları açıq şəkildə izah edilmişdir. Dərslik, Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasınında riyaziyyat fənninin tədrisində istifadə etdikləri "Riyaziyyat" fənn proqramı əsasında hazırlanmışdır.

Kitabdan daha səmərəli istifadə etmək üçün aşağıda verilən addımları təqib etmək tovsiyyə olunur:

1. Mövzunun əvvəlində verilən nəzəri biliklərin oyrənilməsi,
2. Mövzuya aid həlli ilə verilən izahlı misalların diqqətlə oxunması,
3. Sərbəst həll etmək üçün verilmiş misalları həll edərkən mövzuda verilən izahlı misalların həllinə nəzər salınmalıdır.

FƏSİL I. FUNKSİYANIN TÖRƏMƏSİ

1.1. Törəmə anlayışı

Törəmənin həndəsi və fiziki mənası

Törəmə anlayışı əyriyə toxunanın çəkilməsi və hərəkətin dəyişmə sürətinin təyini məsələlərinin həlli sayəsində yaranmışdır. Əsasən, XVII əsrdə formalaşmışdır. Onu daha çox inkişaf etdirən alman riyaziyyatçısı və filosofu Q.Leybnis (1646-1716) və ingilis riyaziyyatçısı İ.Nyuton (1643-1727) olmuşdur.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $(a,\ b)$ intervalında təyin olunmuşdur və x_0 bu intervalın verilmiş nöqtəsidir: $x_0 \in (a, b)$.

Arqumentin x_0 nöqtəsində aldığı Δx artımına funksiyanın uyğun artımı $\Delta y = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)$, $x_0+\Delta x \in (a, b)$ olar.

Tərif: Arqumentin artımı sıfra yaxınlaşdıq $(\Delta x \to 0)$ funksiya artımının arqumentin artımına nisbətinin limitinə $y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi deyilir və $y'(x_0)$ ilə işarə edilir:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

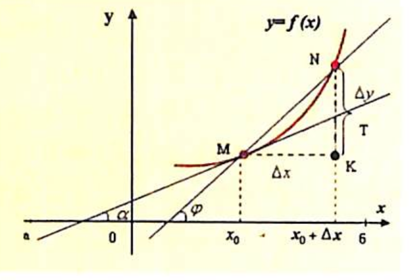
Funksiyanın törəməsi y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ kimi də işarə edilir. Törəmənin $x = a$ nöqtəsində aldığı qiyməti isə $f'(a)$ və yaxud $y'|_{x=a}$ ilə işarə edilir.

Verilmiş x_0 nöqtəsində $x_0 \in (a, b)$ törəməsi olan funksiyaya həmin nöqtədə diferensiallanan funksiya deyilir. (a,b) intervalının hər bir nöqtəsində törəməsi olan funksiya həmin intervalda diferensiallanan funksiya adlanır.

Başqa sözlə: Nöqtədə törəməsi olan funksiyaya həmin nöqtədə **diferensiallanan funksiya** deyilir.

1.2. Törəmənin həndəsi mənası

İxtiyari L əyrisi və onun üzərində bir $M0$ nöqtəsi götürək. L əyrisinin ixtiyari M və $M0$ nöqtəsindən $M0M$ kəsəni çəkək (şəkil 1) M nöqtəsi L əyrisi boyunca öz yerini dəyişdikdə $M0M$ kəsəni də, ümumiyyətlə M0 nöqtəsi ətrafında öz vəziyyətini dəyişər. M nöqtəsi L əyrisi boyunca $M0$ nöqtəsinə yaxınlaşdıqda M0M kəsəni müəyyən $M0T$ limit vəziyyətinə yaxınlaşarsa, kəsənin həmin limit vəziyyətinə $M0$ nöqtəsində L əyrisinə **toxunan deyilir**



Törəmənin həndəsi mənası belədir: $y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində birinci tərtib törəməsi ($f'(x_0)$) funksiyanın qrafiki olan əyriyə $M_0(x_0, f(x_0))$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir:

$$f'(x_0) = k = tan\alpha \tag{2}$$

İndi L əyrisinə $M_0(x_0,f(x_0)$ nöqtəsində çəkilmiş M_0T toxunanının tənliyini yazmaq olar. Məlumdur ki, M_0 $(x_0, f(x_0)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı

k= $f'(x_0)$ olan MT düz xəttinin tənliyi

$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ şəklində yazılır.

$y_0 = f(x_0)$ olduğundan, toxunanın tənliyi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

şəklində olar.

L əyrisinin M_0 nöqtəsində çəkilmiş toxunanına həmin nöqtədə perpendikulyar olan düz xəttə əyrinin **normalı deyilir**. Bu normalın bucaq əmsalını iki düz xəttin perpendikulyar olması şərtindən tapmaq olar:

Onda L əyrisinin nöqtəsindəki normalının tənliyi

$$k_{nor} = -\frac{1}{k_{tox}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

onda L əyrisinin $M_0\ (x_0, f(x_0))$ nöqtəsindəki normalının tənliyi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (4)$$

şəklində yazılır.

Misal: $y = x^3 - 3x + 2$ əyrisində çəkilən toxunanın və normalın tənliyini tapın:

Həlli: $x = 2$ nöqtəsində verilən funksiyanın törəməsini tapaq:

$$y' = 3x^2 - 3, \quad y'(2) = 9$$

onda toxunanın tənliyi $y - 4 = 9(x - 2)$ və ya $9x - y - 14 = 0$.
Normalın tənliyi isə $y - 4 = -\frac{1}{9}(x - 2)$ və ya $x + 9y - 38 = 0$ olar.

Misal: $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ funksiyasının x_0 nöqtəsində birinci tərtib törəməsi neçədir?

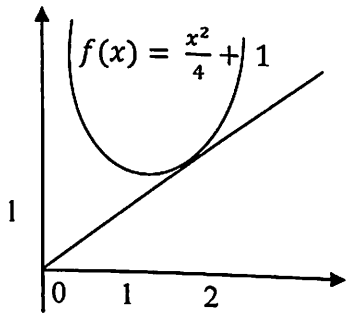
Həlli: Bilirik ki, $f'(x_0) = k = \tan\alpha$

onda

$$f'(x) = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$$

$$f'(2) = \frac{2}{4} = 1$$

deməli $k = \tan\alpha = 1$ olur



Misal 2: $f(x) = \sin 2x + 1$ əyrisi üzərində $x = \frac{\pi}{6}$ nöqtəsindən keçən toxunanın bucaq əmsalı neçədir?

Həlli: $f(x) = \sin 2x + 1$ funksiyasının 1-ci tərtib törəməsinin tapaq.

$$f'(x) = 2\cos 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \text{ deməli } \tan\alpha = 1 \text{ olar.}$$

1.3. Törəmənin fiziki mənasi

Hər hansı cismin dəyişənsürətli düzxətli hərəkətinə baxaq. Bu cismin ölçülərini və şəklini nəzərə almayaraq onu maddi nöqtə hesab etmək olar. Məlumdur ki, hərəkət edən nöqtənin getdiyi yol zamandan asılıdır: $S = S(t)$. Bu $S(t)$ funksiyasına nöqtənin hərəkət qanunu deyilir. Nöqtənin $S(t)$ zaman ərzində getdiyi yol $S(t)$,

$t + \Delta t$ zamanda getdiyi yol isə S $S(t)$. $(t + \Delta t) = S(t) + \Delta S$ olarsa, onda baxılan nöqtə Δt zamanı ərzində ΔS məsafəsini getmiş olar. Bu halda

$$V_{ort} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \text{ nisbəti,} \qquad (5)$$

nöqtənin t anından $t + \Delta t$ anına qədər müddətdəki hərəkətinin orta sürətinə bərabər olar. Aydın ki, V_{ort} - orta sürəti nöqtənin t anındakı sürətini xarakterizə edə bilməz. Lakin Δt zaman fasiləsini çox kiçik götürsək, onda orta sürət t anındakı sürətə çox yaxın olar. Buna görə də (5) orta sürətinin $\Delta t \to 0$ şərtində limiti cismin t anındakı sürəti adlanır və

$$V(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \text{ ilə işarə edilir.} \qquad (6)$$

Törəmənin tərifinə görə (6) bərabərliyinin sağ tərəfi $s(t)$ funksiyanın t dəyişəninə nəzərən törəməsidir:

$$V(t) = S'(t) \qquad (7)$$

Buradan törəmənin mexaniki mənası alınır:

Hərəkət edən nöqtənin sürəti gedilən məsafənin zamana görə törəməsinə bərabərdir.

Nöqtənin dəyişənsürətli düzxətli hərəkətinin sürəti zamandan asılı funksiyadır: $V = V(t)$. Hərəkət edən nöqtənin sürəti t anından $t + \Delta t$ anına qədər olan müddətə dəyişər

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$$

qədər dəyişər.

Bu halda $\alpha_{ort} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$ nisbətinə Δt zaman fasiləsində hərəkətin **orta təcili** deyilir.

Orta təcilin $\Delta t \to 0$ şərtində limiti hərəkətin t anındakı təcili adlanır və

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t)-v(t)}{\Delta t} = v'(t) \qquad (8)$$

ilə işarə edilir

Deməli, **hərəkət edən nöqtənin təcili onun sürətinin zamana görə törəməsinə bərabərdir.**

Apardığımız mühakimədən aydın olur ki, $y = f(t)$ funksiyası zamandan asılı hər hansı prosesi kəmiyyətcə xarakterizə edirsə, onda $y' = f'(t)$ funksiyası prosesin t anındakı dəyişmə sürətini göstərir.

Tərif: $y = f(t)$ funksiyasının x nöqtəsində törəməsi, funksiyanın verilmiş nöqtədə **dəyişmə sürəti** adlanır.

Başqa sözlə törəmənin fiziki mənası:

Fərz edək ki, hərəkət edənin t zamanda aldığı yol $f(t)$ olsun. Onda $f(t_0, t)$ zaman aralığındakı orta sürət $V_{ort} = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ tapılır

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0) \text{ tapılır} \qquad (9)$$

Yol $\longrightarrow$ ***sürət*** $\longrightarrow$ ***təcil*** (t anındakı təcil)

yol = $x(t)$; sürət = $v(t)$; təcil= $a(t)$

1. $v(t) = x'(t)$ (yəni gedilən yol verilib sürət soruşularsa)
2. $a(t) = v'(t)$
3. $a(t) = a(t) = x''(t)$

Qaydalar:

1. funksiyanın törəməsini aldıqda **ani sürəti tapırıq**.

2. sürət funksiyasının törəməsini alaraq **təcili tapırıq.**

3. sürət yolun 1-ci tərtib törəməsidir. Bunun üçün isə, verilən funksiyanın 2-ci tərtib törəməsini almaq lazımdır. Yəni, $a(t) = x''(t)$.

Misal 1: Fərz edək ki, hərəkət edənin t saniyədəki aldığı yol $f(t) = t^2 - t + 10$ metrədir. Hərəkət edənin [2,t] saniyələr arasındakı sürət 6 m/san olarsa t necə olar?

Həlli

$\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$ (9) düsturuna görə

$$\frac{f(t) - f(2)}{t-2} = 6$$

$$\frac{t^2 - t + 10 - (2 \cdot 6)}{t-2} = 6$$

$$\frac{f^2 - t + 10 - 12}{t-2} = 6$$

$$\frac{f^2 - t - 2}{t-2} = 6 = \frac{(t-2).(t+1)}{t-2} = 6$$

$$t + 1 = 6$$

$$t = 5$$

Cavab: Hərəkət edənin [2, t] saniyələr arasındakı sürəti 6m/san olarsa, $t = 5$ olar.

Misal 2. Hərəkətdə olan birinin t saatda aldığı yol $x(t) = 2t^3 + t^2 - 5$ km olaraq verilərsə, bu hərəkət edənin

a) 3 saatdakı ani sürəti neçədir?

b) 5 saatdakı ani təcili neçədir?

Həlli :

a) $x'(t) = 6t^2 + 2t = v(t)$

$v(t) = v(3) = 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 54 + 6 = 60$ km/san

c) $x''(t) = 12t + 2 = a(t)$

$a(t) = a(5) = 12 \cdot 5 + 2 = 62$ km/san

Cavab: 3 saatdakı ani sürəti 60 km/san, 5 saatdakı ani təcili isə 62 km/san olar.

1.4. Törəmənin tapılması qaydaları

Cəmin, hasilin və kəsrin törəməsi haqqında teoremlər

Fərz edək ki, $f(t)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları hər hansı (a,b) intervalında diferensiallanan funksialardır. x həmin intervalın ixtiyari nöqtəsidir, Δx isə onun artımıdır. Funksiyanın törəməsi üçün aşağıdakı teoremlər doğrudur.

Teorem 1. İki funksiya cəminin törəməsi onların törəmələri cəminə bərabərdir.

$$[f(x)+\varphi(x)]' = f'(x)+\varphi'(x) \qquad (1)$$

İsbatı: $f(x)+\varphi(x)$ funksiyasına baxaq və x-ə Δx artımı verib, funksiyanın uyğun artımını hesablayaq:

$$\Delta y = [f(x+\Delta x)+\varphi(x+\Delta x)] - [f(x)+\varphi(x)]$$
$$= [f(x+\Delta x) - f(x)] +$$
$$+[\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] = \Delta f(x) + \Delta\varphi(x)$$

yəni $\Delta y = \Delta f(x) + \Delta\varphi(x)$ olar.

Bu bərabərliyinin hər iki tərəfini Δx -ə bölüb, $\Delta x \to 0$ -da limitə keçsək aşağıdakı limitləri alırıq.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = [f(x)+\varphi(x)]'$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

Bunları nəzərə alsaq (1) münasibətinin doğruluğunu isbat etmiş oluruq. Yə'ni $[f(x)+\varphi(x)]' = f'(x)\cdot\varphi'(x)$ doğrudur.

Başqa sözlə: əgər $f(x) = u$ və $\varphi(x) = v$ ilə işarə etsək, $(u \mp v)' = u' \mp v'$ yazmaq olar.

Analoji qayda ilə isbat edilir ki, sonlu sayda diferensiallanan funksiyaların cəminin və fərqinin törəməsi onların törəmələrinin cəminə və fərqinə bərabərdir.

Nəticə: Fərqin törəməsi törəmələr fərqinə bərabərdir.

$$[f(x) - \varphi(x)]' = f'(x) - \varphi'(x)$$

Teorem 2. İki funksiya hasilinin törəməsi üçün

$$[f(x) \cdot \varphi(x)]' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x) \qquad (2)$$

düsturu doğrudur.

İsbatı: $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ funksiyasına baxaq. Arqumentə Δx artımı verib, funksiyanın uyğun artımını aşagıdakı kimi yazaq.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x) =$$
$$= [f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x + \Delta x)]$$
$$+ [f(x) \cdot \varphi(x + \Delta x)] =$$
$$= [f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot \varphi(x + \Delta x) + f(x)[\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)] =$$
$$= \Delta f(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \Delta\varphi(x)$$

yəni

$$\Delta y = \Delta f(x) \cdot \varphi(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta\varphi(x).$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini Δx -ə bölək və $\Delta x \to 0$ -da limitinə baxaq.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(x + \Delta x) = \varphi(x)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(x + \Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$$

bu isə o deməkdir ki,

$$[f(x) \cdot \varphi(x)]' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x)$$

doğrudur.

Başqa sözlə: əgər $f(x) = U$ və $\varphi(x) = V$ ilə işarə etsək onda, (2) düsturunu $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$ yazmaq mümkündür.

Nəticə: Sabit vuruğu törəmə işarəsi xariçinə çıxarmaq olar.

$$[c\varphi(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad (3)$$

Doğrudan da (3) düsturuna əsasən

$$[c\varphi(x)] = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$$

doğrudur ($c' = 0$ olduğu üçün)

Teorem 3. Kəsrin törəməsi üçün $\varphi(x) \neq 0$ olduqda $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot\varphi(x) - f(x)\cdot\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$ (3) düsturu doğrudur.

İsbatı: y = $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiyasına baxaq. Arqumentə Δx artımı verib, funksiyanın uyğun artımını aşağıdakı kimi çevirək:

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x) - f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)} =$$

$$= \frac{f((x+\Delta x) - f(x))\varphi(x) - f(x)\cdot(\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)}$$

yəni $\Delta y = \frac{\Delta f(x)\varphi(x) - f(x)\cdot\Delta\varphi(x)}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)}$ olar.

Bu münasibətinin hər tərəfini Δx-ə bölüb, $\Delta x \to 0$-da limitə keçək:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\varphi(x) - f(x)\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)}$$

Beləliklə, $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot\varphi(x) - f(x)\cdot\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$ düsturunun doğruluğu isbat edildi.

Başqa sözlə: əgər $f(x) = u$ və $\varphi(x) = v$ ilə işarə etsək, onda tərifə əsasən $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'\cdot V - V'\cdot U}{V^2}$ olar.

Nəticə: $\left[\frac{f(x)}{c}\right]' = \frac{1}{c}\cdot f'(x)$ düsturu doğrudur. (4)

Doğrudan da $\left[\frac{f(x)}{c}\right]' = \left[\frac{1}{c}\cdot f(x)\right]' = \frac{1}{c}\cdot f'(x)$

Nəticə: $\left[\frac{c}{\varphi(x)}\right]' = -\frac{c\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$ olar. Doğrudan da

$$\left[\frac{c}{\varphi(x)}\right]' = \frac{c'\varphi(x) - c\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = -\frac{c\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

1.5. Əsas elementar funksiyaların törəməsi

Qüvvət funksiyasına $y = x^n$, $(n \in N)$ baxaq $y = x^n$ funksiyasının törəməsi

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \qquad (5)$$

düsturu ilə hesablanır.

Qeyd. n $= \frac{m}{k}$ olduqda, $\left(x^{\frac{m}{k}}\right)' = \frac{m}{k} \cdot x^{\frac{m-k}{k}}$ olar. Çox vaxt $\left(\sqrt[k]{x^m}\right)' = \frac{m}{k.\sqrt[k]{x^{k-m}}}$ kimi də göstərilir. Xüsusi halda ,

$$k = 2 \text{ və } m = 1 \text{ olduqda } \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \text{ alınır.} \qquad (6)$$

Misal 1. $f(x) = x^5$ olarsa, $f'(x) = 5x^4$ olar

Misal 2. $f(x) = 3x^5$ olarsa, $f'(x) = 15x^4$ olar

Misal 3. $f(x) = x^8 + \sqrt{x}$ olarsa, $f'(x) = 8x^7 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 8x^7 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ olar.

Misal 4. $f(x) = x^{-7} + \sqrt[5]{x^2}$ olarsa, $f'(x) = -7x^{-8} + \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} -$
$-7x^{-8} + \frac{2x}{5\sqrt{x^2}}$ olar.

Misal 5. $f(x) = x^{-4} + 2x^{-3} - x^{-1} + 4$ olarsa
$f'(x) = -4x^{-5} - 6x^{-4} + x^{-2} + 0$ olar $(c' = 0)$.

1.6. Üstlü funksiyasının törəməsi

$y = a^x$ üstlü funksiyasının törəməsi

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{düsturu ilə hesablanır.} \qquad (7)$$

xüsusi halda $a = e$ olarsa düstur

$$(e^x)' = e^x \text{ şəklinə düşər.} \qquad (8)$$

Misayl 6. $f(x) = (3x^3 + 3x)^4$ olarsa,
$f'(x) = 4\,(3x^3 + 3x)^3 \cdot\cdot (9x^2 + 3)$ olar.
Misayl 7. $f(x) = 3^{6x^2-5}$ olarsa, $f'(x) = 12x \cdot 3^{6x^2-5} \cdot \ln 3$ olar.
Misal 8. $f(x) = \sqrt[3]{(x^3+2)^2}$ olarsa, $f'(x) = \frac{2}{3}\,(x^3 + 2) \cdot 3x^2$ olar.

1.7. Loqarifmik funksiyanın törəməsi

$y = \log_a x$ loqarifmik funksiyasının törəməsi

$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$ düsturu ilə hesablanılır (9)

Xüsusi halda $a = e$ olarsa, onda düstur

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ şəklində olur. ($\ln x = 1$ olduğu üçün) (10)

Əgər,

$\log_a u(x)$ olarsa isə $f'(x) = \frac{U'}{U}$ olar (11)

Misal 9. $\log_3(2x-1)$ olarsa, $f'(x) = \frac{2}{2x-1}\log_3 e$ olar.
Misal 10. $\log_5(x-1)$ olarsa, $f'(x) = \frac{1}{x-1}\log_5 e$ olar.
Misal 11. $f(x) = \ln(x^3 - x + 2)$ olarsa, $f'(x) = \frac{3x^2-1}{(x^3-x+2)}$ olar.

Qeyd: Üstlü funksiyanın tərsi loqarifmik funksiya olduğundan loqarifmanın törəməsi üstlü funksiyanın törəməsinin tərsidir.

Triqonometrik funksiyaların törəməsi

$$(\sin x)' = \cos x \tag{12}$$
$$(\cos x)' = -\sin x \tag{13}$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x' = (1 + \tan^2 x) \tag{14}$$
$$(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot x' = -\,(1 + \cot^2 x) \tag{15}$$

Analoji olaraq $(\cos a\,x)' = -a \sin ax$ olur.
Misal 12. $(\sin 5x)' = 5\cos 5x$ olar.
Misal 13. $(\cos 6x)' = -6 \sin 6x$ olar.

Misal 14. $f(x) = \sin 3x + \cos x^2$ olarsa $f(x)' = 3\cos 3x - 2x \sin x^2$ olar.

Misal 15. $f(x) = \sin^4 6x$ olarsa $f(x)' = 4(\sin 6x)^3 \cdot 6\cos 6x$ olar.

<u>**Qeyd:**</u> Misalları həll edərkən $\sin^4 6x$ yazılışı $(\sin 6x)^4$ kimi başa düşülür:

Misal 16. $f(x) = \tan 5x$ olarsa $f(x)' = 5 \cdot (1 + tan^2 5x)$ olar.

Misal 17. $f(x) = \cot(x^2 - 1)$ olarsa

$$f(x)' = -2x(1 + cot^2(x^2 - 1)) \text{ olar}$$

1.8. Tərs triqonometrik funksiyaların törəmə düsturları

$$(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{16}$$

$$(arccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{17}$$

$$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{18}$$

$$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{19}$$

Misal 18. $y = ctgx^4$ funksiyası üçün

$$y' = -\frac{1}{sin^2(x^4)} \cdot (x^4) = -\frac{4x^3}{sin^2 x^4}$$

olar.

Misal 19. $y = arc\text{tg}3x^2$ funksiyası üçün

$$y' = \frac{1}{1+9x^4} \cdot (3x^2)' = \frac{6x}{1+9x^4}$$

olar.

1.9. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi

Fərz edək ki, hər hansı intervalda $y = f[\varphi(x)]$ mürəkkəb funksiyası verilmişdir. Həm də $y = f(u)$ və $u = u = \varphi(x)$ və funksiyaları diferensiallanandır. Onda $y = f[\varphi(x)]$ funksiyası da diferensiallanandır və onun törəməsi üçün

$y_x{}' = y_u{}' \cdot U_x{}'$ münasibəti doğrudur. (20)

Misal 20: $y = \sqrt{u}$ və $u = a^2 - x^2$

$$x' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(a^2 - x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Teorem 10. $z = \varphi(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində, $y = f(z)$ funksiyasının isə uyğun $z_0 = \varphi(x_0)$ nöqtəsində törəməsi varsa, $y = f(\varphi(x))$ mürəkkəb funksiyasının da x_0 nöqtəsində törəməsi var bu törəmə $y'(x_0) = f'(z_0)\varphi'(x_0)$ düsturu ilə hesablanır.

Teorem 11. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında artan (azalan) kəsilməz funksiyasıdır və nöqtədə onun sıfırdan fərqli $f'(x_0)$ törəməsi var. Onda funksiyanın uyğun $y_0 = f(x_0)$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş $x = f^{-1}(y)$ tərs funksiyası var və (y_0) nöqtəsində diferesiallanandır Bu zaman $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{(f)'\cdot(x_0)}$ düsturu doğrudur.

1.10. Parametrik funksiyaların törəməsi

$X = U(x)$ və $Y = V(t)$ funksiyaları üçün $y' = \frac{dy}{dx}$ və $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

olar.

Misal 21: $x = x^2 + 1$ və $y = 2t + 3$ isə $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

olar.

Misal 22: $x = t^2 + 2t$ və $y = 3t^2 - 1; t = 1$ isə $\frac{dy}{dx} = ?$

$\frac{dy}{dx} = \frac{6t}{2t+2}$ buradan $t = 1$ olduğuna görə

$\frac{6}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ olar.

1.11. Qapalı funksiyaların törəməsi

$F(x,y) = 0$ olarsa

$F(x,y)' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ olar.

Misal 23: $F(x,y) = 3\,x^2y^2 + 2\,x^3y^2 - y^3 + 2x = 0$

$F(x,y)' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{6xy^2 + 6\,x^2y^2 - y^3 + 2}{3\,x^2y + 4\,x^3y - 3y^2}$ olar.

Misal 24: $F(x,y) = x^2y + 3xy^3 + x^2 + y^5 + 4 = 0$

$F(x,y)' = -\frac{2xy + 3y^3 + 2x}{x^2 + 9\,y^2 + 5y^4}$ olar.

1.12. Yüksək tərtibli törəmə

$y = f(x)$ funksiyasını x_0 nöqtəsindəki birinci tərtib törəməsini tapdığımız kimi 2-ci, 3-cü və s. törəməsini də tapmaq mümkündür.

Tutaq ki, $y = f(x)$–funksiyası $[a,b]$ parçasında diferensiallana biləndir. $f'(x)$ törəməsinin qiymətləri x-dən asılıdır, yəni $f'(x)$ törəməsi də x dəyişəninin funksiyasıdır. Deməli, bu funksiyanı diferensiallamaq olar. $f(x)$ funksiyasının $f'(x)$ törəməsinin törəməsinə həmin funksiyanın ikinci tərtib törəməsi deyilir və y'' və ya f'' ilə işarə edilir:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Ümumiyyətlə, funksiyasının n tərtibli törəməsi, onun n-1 tərtibli törəməsinin törəməsinə deyilir və y^n ; yaxud da $f^{(n)}(x)$ kimi işarə edilir:

$$y^n = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x)$$

Törəmənin tərtibini qüvvət üstü ilə qarışdırmamaq üçün onu mötərizə içərisinə alırlar. Dörd, beş və s. tərtibli törəmələr rum rəqəmləri ilə də işarə edilir: yəni y^{IV}; y^V; y^{VI}. Bu halda tərtibi göstərən rəqəmi mötərizəsiz yazırlar.

Misal 25: $y = x^4 + 3\,x^2 + 5x + 4$ funksiyası üçün $y'' = ?$

$y' = 4x^3 + 6x + 5$ olar, daha sonra y''-ni tapırıq,

$y'' = 12x + 6$ olar.

Misal 26: Əgər, $y = x^{10} + 10^{10}$ isə $(y^{10})' = ?$

$y' = 10.x^9$

$y'' = 10.9x^8$

$y''' = 10.9.8x^7$ və.s.

....

$y^{10} = 10.9.8.7........1$

oluğu üçü n = 10! olar.

Onda, $(y^{10})' = 10!$

1.13. Törəməni tapmaq üşün qaydalar

1. $C' = 0 \quad (c = const)$
2. $(u + v - \omega)' = u' + v' - \omega'$
3. $(cv)' = c\,v'$
4. $(uv)' = u\,v' + v\,u'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u\,v' - v\,u'}{v^2}$
6. $y'_x = y'_z \cdot z'_x$
7. $(x)' = 1, \qquad (x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1, \quad (x^0 = 1$ bərabərdir)
8. $(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
9. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad (x)' = 1$-ə bərabərdir
10. $(\sin x)' = \cos x$
11. $(\cos x)' = -\sin x$
12. $(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$
13. $(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{sin^2 x} = -cosec^2 x$
14. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
15. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

17. $(e^x)'=e^x$

18. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

19. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

20. $(arc\ tg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

21. $(\text{arc}\ ctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Törəmənin hesablanmasına aid bəzi misalların izahla həlli:

Misal 1. $(x^2 + x + 7)' = (x^2)' + (x)' + (7)' = 2x + 1$

Misal 2. $\left(x^3 + \sqrt{x} + 7\right)' = (x^3)' + (\sqrt{x})' + (7)' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Misal 3. $\left(\sqrt{x} - x^2 + 7x\right)' = (\sqrt{x})' - (x^2)' + (7x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x + 7$

Misal 4. $\left(\frac{x^2}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2)' = \frac{2}{3}\, x$

Misal 6. $(\ \ln(x^2 + 3x + 9)\ )' = \frac{2x+3}{x^2+3x+9}$

Misal 7. $(\sin 5x)' = \cos\ 5x\ \ (5x)' = 5 \cdot \cos 5x$

Misal 8. $(\sin 3x^2)' = \cos\ 3x^2\ \ (3x^2)' = 6x \cdot \cos 3x^2$

Misal 9. $(\text{tg}\, 3x)' = \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' = \frac{3}{\cos^2 3x}$

Misal 10. $(\text{ctg}\, 4x)' = -\frac{1}{\sin^2 4x} \cdot (4x)' = -\frac{4}{\sin^2 4x}$

Misal 11. $(\ e^{x^2}\ )' = 2x \cdot e^{x^2}$

Misal 12. $f(x) = \sin x$ funksiyasının $x = \pi$ nöqtəsində törəməsini tapaq: $y' = (\ \sin x\ )' = \cos x = \cos \pi = -1$

Tapşırıq 1: Aşagıdakı funksiyalar üçün $f'(x) - i$ hesablayın:

1. $f(x) = 6x^5$
2. $y = \frac{x+2}{x}$
3. $y = \frac{3}{x^2-1}$
4. $f(x) = x^{-3} + x^{-1} + 21$
5. $f(x) = x^5 + \sqrt{x} + 3$

6. $f(x) = x^{-5} + \sqrt[3]{x^2} + 2x$
7. $f(x) = (3x^3 + 3x)^5$
8. $f(x) = (5x^3 + 2x)^{-4}$
9. $f(x) = 5^{4x^2-5}$
10. $f(x) = \sqrt[5]{(x^3+2)^3}$
11. $f(x) = \log_5(3x - 2)$
12. $f(x) = \ln(x^4 - 3x + 4)$
13. $f(x) = \log_3(7x + 11)$
14. $f(x) = \cos 7x$
15. $f(x) = \sin 4x$
16. $f(x) = \sin 6x + \cos x^2$
17. $f(x) = \sin^3 4x$
18. $f(x) = \tan 4x$
19. $f(x) = \tan 6x$
20. $f(x) = \cot(x^2 - 2)$
21. $f(x) = \cot x^3$
22. $x = t^3 + 3$ və $y = 5t - 7$ olarsa $\frac{dy}{dx} =?$
23. $x = t^2 + 6t$ və $y = 5t^3 - 2;\ t = 2$ isə $\frac{dy}{dx} =?$
24. $y = \frac{3x+1}{5x-4}$
25. $y = 3 + \frac{x}{2} + 21.$

1.14. Funksiyanın ekstremumu. Törəmənin köməyi ilə onların tapılması

Tərif 1: $f'(x) = 0$ olan nöqtələri və törəmənin olmadığı x nöqtələri $f(x)$ funksiyasının böhran nöqtələri adlanır.

Tərif 2: Funksiyanın maksimum və minimum nöqtələrinə onun ekstremum nöqtələri deyilir.

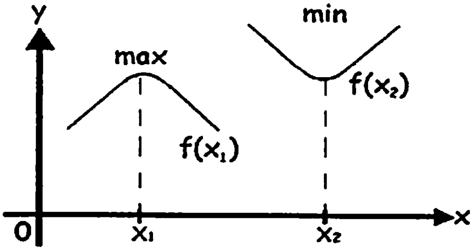
Tərif 3: $f'(x_0) = 0$ bərabərliyini ödəyən x_0 nöqtəsinə $f(x)$ funksiyasının stasionar nöqtəsi deyilir.

Funksiyanın maksimum və minimum nöqtələrini onun böhran nöqtələri arasında axtarmaq lazımdır

Tərif 4: x_1 nöqtəsinin müəyyən ətrafından olan bütün x-lər üçün $x \neq x_1$ $f(x_1) > f(x)$ bərabərsizliyi ödənərsə $f(x_1)$ qiymətinə funksiyanın maksimum qiyməti, x_1 - nöqtəsinə isə $f(x)$ -in maksimum nöqtəsi deyilir.

Tərif 5: x_2 -nöqtəsinin müəyyən ətrafında olan bütün x-lər üçün $x \neq x_2$ $f(x_2) < f(x)$ ödənilərsə $f(x_2)$ qiymətinə funksiyanın minimum qiyməti, x_2 -nöqtəsinə isə $f(x)$ funksiyasının minimum nöqtəsi deyilir.

Deməli – ekstremum funksiyanın yaxın yerləşən qiymətləri arasında ən böyük və ya ən kiçik qiymətləridir .



Beləliklə: $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında maksimum və minimum qiymətlərini tapmaq üçün:

1) $f(x)$ funksiyasının [a,b] parçası daxilində olan bütün qiymətlərini hesablamaq:

2) $f(x)$ funksiyasının [a,b] parçasının uc nöqtələrindəki $f(a)$ və $f(b)$ qiymətlərini hesablamaq:

3) alınan bu ədədlərin ən böyüyünü və ya ən kiçiyini seçmək lazımdır.

Tapılmış ədədlər uyğun olaraq , funksiyanın verilmiş parçada ən böyük və ən kiçik qiymətlər olur. Funksiyasının $[a, b]$ parçasında maksimum və minimum qiymətləri uyğun olaraq $\max f(x)$ və $\min f(x)$ kimi işarə olunur.

Nəticə: Arqumentin baxılan bütün qiymətlərində $f(x)$ funksiyasının törəməsi varsa, onda bu funksiya öz ekstremumunu yalnız törəmənin sıfıra bərabər olduğu nöqtələrdə ala bilər.

Ekstremumun varlığı üçün kafi şərtlər verilmiş funksiya özünün böhran nöqtəsində nə zaman lokal ekstremum qiymət alacağını təyin etmək üçün nöqtə ətrafında onun törəməsini tədqiq edirlər. Bu qayda ilə funksiyanın birtərtibli, ikitərtibli və s. törəmələrindən istifadə etməklə lokal ekstremum varlığı üçün müxtəlif kafi şərtlər verilir.

Misal 1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ -nın ekstremumlarını tapaq:

Həlli: $f'(x) = 3x^2 - 6 - 3x^2x = 0$

$3x(x - 2) = 0$

$x = 0;\ x = 2$

$f(0) = 0 - 0 + 4 = 4(\max)$

$f(2) = 8 - 12 + 4 = 0(\min)$

1.15. Ekstremumun yüksək tərtibli törəmə vasitəsilə araşdırılması

Bəzən funksiyanın lokal ekstremumunu yüksək tərtibli törəmə vasitəsilə təyin etmək daha əlverişli olur.

Teorem: Əgər $y = f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində n - tərtibə qədər kəsilməz və $f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ şərtlərini ödəyən törəmələri varsa, onda n cüt ədəd olduqda $x = x_0$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının lokal ekstremumu vardır. n tək ədəd olduqda isə $x = x_0$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının lokal ekstremumu yoxdur. Bu halda

1) n cüt ədəd və $f^{''}(x) < 0$ olduqda $f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində lokal maksimumu var.

2) n cüt ədəd və $f^{''}(x) > 0$ olduqda $f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində lokal minimumu var.

Başqa sözlə: Əgər $f''(x_0) > 0$ isə x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının min var. Əgər $f''(x_0) < 0$ isə x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının max var.

Misal 2: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$ ekstremumları tapaq:

$$f'(x) = x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4; \quad x = -2; \quad x = 2$$
$$f''(x) = 2 \text{ olduğuna görə}$$
$$f''(-2) = 2 \cdot (-2) = -4 < 0 \text{ (max)}$$
$$f''(2) = 2 \cdot 2 = 4 > 0 \text{ (min)}$$

Misal 3: $f(x) = 3x - x^3$ –nın $[-2; 3]$ max və min qiymətlərini hesablayaq.

Həlli: $f'(x) = 3 - 3x^2; f'(x) = 0$

$$3(1 - x^2) = 0$$
$$3 \neq 0; \quad x = \pm 1$$
$$f(-1) = -2$$
$$f(1) = 2$$

İndi parçanın uc nöqtələrindəki $[-2, 3]$ qiymətlərini hesablayaq:

$$f(-2) = 2 > 0(\max)$$
$$f(3) = -18 < 0(\min)$$

Deməli $f(\max) = 0$

$$f(\min) = 0$$

1.16. Funksiyanın araşdırılması və qrafiklərin qurulmasının ümumi sxemi

Funksiyanı araşdırmaq və onların qrafiklərini qurmaq üçün aşağıdakı ümumi sxemdən istifadə etmək olar.

1. Funksiyanın təyin oblastı tapılır.
2. Funksiyanın tək, cüt və periodik olması yoxlanılır.
3. Funksiyanın qrafikinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri tapılır.
4. Funksiyanın kəsilməz olduğu oblastlar, kəsilmə nöqtələri və onların xarakterləri müəyyən edilir.
5. Funksiyanın ekstremum nöqtələri və bu nöqtələrdə onların qiymətləri tapılır.
6. Funksiyanın artma və azalma aralıqları təyin olunur.
7. Funksiya qrafikinin qabarıq və çökük olduğu hissələr, əyilmə nöqtələri və həmin nöqtələrdə funksiyanın qiymətləri təyin edilir.
8. Funksiya qrafikinin asimtot ları tapılır.

Bunların nəticəsində alınan məlumatlara əsasən funksiyanın qrafiki qurulur.

Misal 4: $y = \frac{x^2-1}{x}$ funksiyasını araşdıraq:

1. Bu funksiyanın təyin oblastı $x = 0$ – dan başqa bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur .
2. Verilmiş funksiya tək funksiyadır. Çünkü, $f(-x) = -f(x)$
3. Absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsi $x = \pm 1$, ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi yoxdur.
4. Asimptotunu təyin edək:

$$\lim_{x\to+0} y - \lim_{x\to+0} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-0} y - \lim_{x\to-0} \frac{x^2-1}{x} = \infty$$

olduğuna görə ordinat oxu əyrinin şaquli asimptotudur.

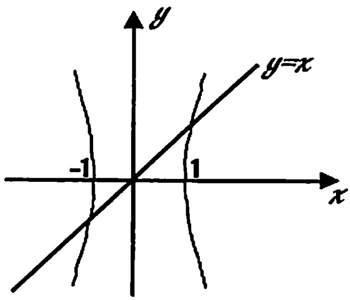
Maili asimptotu hesablayaq:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(\frac{x^2 - 1}{x} - x) = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

olduğuna görə $y = x$ düz xətti verilən əyrinin maili asimptotudur.

5. $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ .Bu törəmə heç bir vaxt sıfra çevrilmir, buna görə də funksiyanın ekstremum nöqtələri yoxdur. Funksiyanın təyin oblastında törəmə müsbətdir.
6. Funksiyanın birinci tərtib törəməsi müsbət olduğuna görə verilən funksiya monoton artandır.
7. Funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiyməti yoxdur, şünkü onun qiymətlər çoxluğu qeyri məhduddur.



Misal 5. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$ funksiyasını araşdıraq.

Həlli:

1. Funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. $D(f) = (-\infty; +\infty)$
2. Funksiyanın tək və cütlüyünü yoxlayaq:

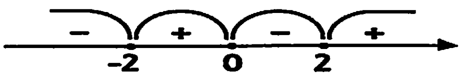
   $f(x) = \frac{(-x)^4}{4} - 2(-x)^2 + 5 = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5 = f(x)$ cüt funksiyadır.
3. Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtəsini tapaq:

   $x = 0 \to y = \frac{0}{4} - 2 \cdot 0 + 5 = 5;$ (0; 5)

$$y = 0 \rightarrow \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5 = 5$$
$$x^4 - 8x^2 + 20 = 0$$
$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \left(\frac{8}{2}\right)^2 - 20 = -4 < 0$$
$D < 0 \rightarrow$ funksiyanın qrafiki OX oxunu kəsmir.

Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını təyin edək: yəni $f'(x) \geq 0$ və $f'(x) \leq 0$ bərabərsizlikləri həll edək:

$$f'(x) = \frac{1}{4}4x^3 - 2 \cdot 2x + 0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) =$$
$$= x(x-2)(x+2)$$
$$x = 0; \quad x = 2; \quad x = -2$$



1) $(-\infty; -2\,] \cup [\,0;\ 2\,]$ bu aralıqda funksiya azalır

2) $[\,-2;\ 0\,] \cup [\,2;\ \infty)$ bu aralıqda funksiya artır

3) -2 və 2 nöqtələrində isə funksiya işarəsini mənfidən müsbətə dəyişir.

Onda $x = 2$ və $x = -2$ nöqtələri ***min***, $x = 0$ nöqtəsi isə ***max*** nöqtədir.

$$(f-2) = \frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2 + 5 = 1$$
$$f(2) = \frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 + 5 = 1$$
$f(0) = \frac{0}{4} - 2 \cdot 0 + 5 = 5$ yəni, $f(max) = 5$; $f(min) = 1$

Tapşırıq 2: Aşağıda verilmiş funksiyaların maksimum və minumum qiymətlərini tapın:

1. $y = 2x^2 + 5x^2 - 4x$
2. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 2$
3. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{4} + 5$
4. $y = 2x^3 + 5x^2, \quad [-1;\ 1\,]$

5. $y = x^3 - 6x + 1$, $[-1; 2]$

6. $y = x + \frac{1}{x}$, $[0{,}5 ; 3]$

7. $y = x^2 - 6x + 8$, $[-3; 1{,}3]$

Aşağıdakı verilmiş funksiyaları tədqiq edin və qrafiklərini qurun:

8. $f(x) = x^2 - 2$

9. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6$

10. $f(x) = x^2 - x + 2$

11. $f(x) = x^3 - 3x$

12. $f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{3} - x$

13. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3$

14. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + 2 - 4x$

15. $f(x) = x^3 - 2x^2$

FƏSİL II. QEYRİ - MÜƏYYƏN İNTEQRALLAR

2.1. İbtidai funksiya və qeyri-müəyyən inteqral

Diferensiallama əməlində $F(x)$ verilir. Onun törəməsini, yəni $f(x) = F'(x)$ şərtini ödəyən $f(x)$ funksiyasını tapmaq tələb olunur. İnteqrallama əməlində $f(x)$ funksiyası verilir, törəməsi bu funksiya olan, yəni

$$F'(x) = f(x)$$

şərtini ödəyən $F(x)$funksiyasınıtapmaq tələb olunur.

Deməli, inteqrallama əməli diferensiallama əməlinin tərs əməlidir.

Tərif 1. Verilmiş aralıqdan götürülən bütün x-lər üçün $F'(x) = f(x)$ olarsa, onda $F(x)$ funksiyasına $f(x)$–funksiyasının ibtidai funksiyası deyilir (aralıq dedikdə, parça, interval, yarıminterval və s. başa düşülür).

Başqa sözlə:

Tərif 2. Əgər $[a, b]$ parçasının bütün nöqtələrində $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənərsə, onda $F(x)$ funksiyasına $f(x)$ funksiyasının **ibtidai funksiyası** deyilir.

Teorem 1. Müəyyən aralıqda təyin olunmuş funksiyanın ixtiyari iki müxtəlif ibtidai funksyası bu aralıqda bir-birindən sabit qədər fərqlənir.

İbtidai funksiyanın ümumi ifadəsi də belə olur

$$F(X) + C, (c = \text{cons}).$$

Yəni, funksiyanın heç olmazsa bir ibtidai funksiyası varsa, onda onun sonsuz sayda ibtidai funksiyası var.

Misal 1. $f(x) = x^2 + 3$ funksiyasına baxaq.

Burada, $f'(x) = 2x$ olduğuna görə

$F(x) = 2\frac{x^2}{2} = x^2 + C$ olar.

2.2. Qeyri-müəyyən inteqral anlayışı

Tərif 3. Hər hansı (a,b) intervalında verilmiş $f(x)$ funksiyasının bütün ibtidai funksiyaları çoxluğuna $f(x)$ funksiyasının həmin intervalda qeyri-müəyyən inteqralı deyilir və $\int f(x)dx$ simvolu ilə işarə edilir.
("inteqral ef iks de iks" kimi oxunur)

Burada $f(x)$ inteqralaltı funksiya, $f(x)\,dx$ -ə inteqralaltı ifadədir.
Tərifə görə, $F(x)$ funksiyası (a,b) intervalında $f(x)$ funksiyasının hər hansı ibtidai funksiyasıdırsa, $\int f(x)dx = F(x) + c$ şəklində yazılır.

Funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralının tapılması əməliyyatı inteqrallama adlanır. İnterqral alma əməliyyatında, inteqralı alınacaq olan ifadının hansı funksiyanın törəməsi olduğu məlumdursa bu funksiyaya ixtiyari bir C sabiti əlavə etməklə inteqral hesablanmış olur. Buna görə, törəmə mövzusunda gördüyümüz düsturların doğru olduğunu yazmaq olar.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c, \qquad (a > 0; a \neq 1)$
3. $\int a^n\,dx = \frac{a^n}{\ln a} + c, \qquad (a > 0; a \neq 1)$
4. $\int e^x\,dx = e^x + c$
5. $\int \cos x\;dx = \sin x + c$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -arcosx + c$
8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\,arctg + c$
9. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, \quad (a \neq 0)$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + c, \quad (a \neq 0)$

Deməli, qeyri-müəyyən inteqral $y = F(x) + c$ funksiyaları ailəsindən ibarətdir.

2.3. Qeyri-müəyyən inteqralın xassələri

Xassə 1: Qeyri-müəyyən inteqralın törəməsi inteqralaltı funksiyaya diferensialı isə inteqralaltı ifadəyə bərabərdir.

$(\int f(x)dx)' = f(x)$

$d(\int f(x)dx) = f(x)dxx$

Xassə 2: Funksiyanın diferensialının qeyri-müəyyən inteqralı funksiyanın özündən sabit toplanan qədər fərqlidir.

$\int df(x)dx = f(x) + c$ (buradakı $f(x)$ funksiyası kəsilməzdir)

Xassə 3: Sıfırdan fərqli sabit vuruğu qeyri-müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxmaq olar.

$\int cf(x)dx = c \quad \int f(x)dx$ (burada c – sabit vuruqdur)

Xassə 4: İki və ya bir neçə funksiyanın cəminin qeyri-müəyyən inteqralı onların inteqrallarının cəminə bərabərdir

$$\int[f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)dx$$

Qeyri-müəyyən inteqralı hesablayarkən aşağıdakı qaydaları nəzərə almaq lazımdır.

Əgər, $\int f(x)dx = F(x) + C$ olarsa onda

1. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$
2. $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$
3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Qeyri-müəyyən inteqralların hesablanmasına aid misalların həlli:

Misal 1. $\int 3x^2\,dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$

Misal 2. $\int(x^2+2)dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$

Misal 3. $\int \frac{5}{x+3}\, dx = 5\int \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| + C$

Misal 4. $\int \frac{x^2-5x+4}{x}\, dx = \int(\frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{4}{x})dx = \int(x-5+\frac{4}{x})dx =$

$= \frac{x^2}{2} + 5x + 4\ln|x|$

Misal 5. $\int 2^{x+4}\, dx = \frac{2^{x+4}}{\ln 2} + C$

Misal 6. $\int e^{x+4}\, dx = e^{x+4} + C$

Misal 7. $\int(x^2 - \sin x)\, dx = \frac{x^3}{3} - (-\cos x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + C$

Misal 8. $\int(x^4+x^2)dx$ inteqralını hesablayaq:

$$\int(x^4+x^2)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C.$$

Misal 9. $\int cos2x\, dx$ inteqralını hesablayaq:

$$\int cos2xdx = \frac{sin2x}{2} + C.$$

Misal 10. $\int \frac{x+1}{x} dx$ inteqralını hesablayaq.

$$\int \frac{x+1}{x} dx = \int(\frac{x}{x} + \frac{1}{x})\, dx = \int(1 + \frac{1}{x})\, dx = +\ln x + Cx.$$

2.4. Qeyri-müəyyən inteqralda hissə-hissə unteqrallanma üsulu

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Misal 11. $\int x\cos x dx = uv - \int vdu$ burada,

$x = u; cos\, xdx = dvv$

$du = dx, \quad v = \sin x$ onda

$\int udu = x \cdot \sin x - \int \sin x\, dx = x \cdot \sin x + cosx + C.$

2.5. Qeyri-müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi üsulu

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Misal 12: $\int (x^2+x)^3 \cdot (2x+1)dx$

$x^2 + x = U$ əvəz etsək, onda $2x + 1 = du$ olar. $(x^2+x)' = 2x+1$ olduğu üçün. Onda $\int U^3 \cdot du = \frac{U^4}{4} + C$deməli,

$$\int (x^2+x)^3 \cdot (2x+1)dx = \frac{(x^2+x)^4}{4} + C$$

olar.

Tapşırıq: Aşağıda verilmiş qeyri –müəyyən inteqralları hesablayın:

1. $\int 7x^2\, dx$
2. $\int (x^3 + 2x - 11)\, dx$
3. $\int \frac{6}{x+5}\, dx$
4. $\int \frac{x^2-3x+8}{x}\, dx$
5. $\int 3^{x+6}\, dx$
6. $\int 11^x dx$
6. $\int e^{3x+4}\, dx$
7. $\int (x^3 + \sin x\,)\, dx$
8. $\int (x+2)(x-2)\, dx$
9. $\int (x^2+x)^2 \cdot (2x+1)\, dx$
10. $\int (-x^5 + 4x)dx$
11. $\int \frac{x+3}{x+1} dx$
12. $\int (\sqrt{x})\, dx$
13. $\int (x - 5 + \frac{4}{x})\, dx$
14. $\int \frac{1}{1+x^2} dx.$

FƏSİL III. MÜƏYYƏN İNTEQRALLAR

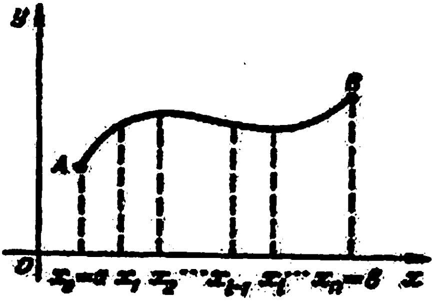
3.1. Müəyyən inteqralın tərifi

Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$, $a < b$ parçasını hər hansı qayda ilə n hissəyə bölür:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

hər bir $[x_{i-1}, x_i]$ parçasında ixtiyari ξ_i nöqtəsi götürək:

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i; \qquad 0 \le i \le n$$



Aşağıdakı kimi bir cəm düzəldək:

$$\sigma = f(\xi_i)\Delta x_1 + f(\xi_i)\Delta x_2 + \cdots f(\xi_i)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_1$$

Bu cəmə $y = f(x)$ funksiyasının [a,b] parçasında inteqral cəmi deyilir. σ kəmiyyətinin həndəsi mənası (şəkil 1)-də verilib.

Tərif 1: σ inteqral cəminin $\lambda \to 0$ şərtində sonlu limiti varsa, bu limitə $y = f(x)$ funksiyasının [a,b] parçasında müəyyən inteqralı deyilir.

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında müəyyən inteqralı

$\int_a^b f(x)\, dx$ kimi yazılır. (1)

Burada a və b uyğun olaraq inteqrallamanın aşağı və yuxarı sərhədləri, x-ə isə inteqrallanma dəyişənidir.

Teorem 1. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda onun həmin parçada müəyyən inteqralı var.

Teorem 2. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş mühdud funksiyadırsa və həmin parçada sonlu sayda kəsilmə çöqtəsi varsa, həmin funksiyanın $[a,b]$ parçasında müəyyən inteqralı var.

Teorem 3. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında monotondursa, onda həmin parçada funksiyanın müəyyən inteqralı var.

3.2. Müəyyən inteqralın xassələri

Fərz edək ki, baxılan bütün funksiyalar uyğun parcada inteqrallanandır.

1. Müəyyən inteqralın qiyməti inteqrallama dəyişənindən asılı deyil,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

2. Müəyyən inteqralda İnteqrallama sərhədləri eyni olarsa inteqral 0–a bərabərdir.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. İnteqrallama sərhədlərinin yerini dəyişdikdə inteqral işarəsini dəyişir.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. İxtiyari a, b, c ədədləri üçün $f(x)$ funksiyası $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

doğrudur.

5. Sabit vurğu müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \ (A = cons).$$

6. Sonlu sayda funksiyaların cəbri cəminin müəyyən inteqralı, həmin funksiyaların baxılan parçada müəyyən inteqralının uyğun cəbri cəminə bərabərdir.

$$\int_a^b (f(x) + \varphi(x) - g(x))d(x) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

7. Tək funksiyanın sıfra nəzarən simmetrik parça üzrə inteqralı sıfıra bərabərdir. Yəni $f(x)$ funksiyası tək funksiya olarsa onda,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

olar.

8. $f(x)$ funksiyası cüt funksiya olarsa isə onda,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

olar.

3.3. Nyuton-Leybnis düsturu.

Əgər, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz və $F(x)$ funksiyası isə $f(x)$ –in [a,b] parçasında ibtidai funksiyasıdırsa onda,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

düsturu doğrudur.

(2) düsturuna **Nyuton-Leybnis düsturu deyilir**.

Misal 1: $\int_0^1 (x^2 + 2x + 5)\,dx$ inteqralını hesablayaq:

Həlli:

$\int_0^1 (x^2+2x+5)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x) \mid_0^1 = \frac{1}{3} + 1 + 5 = \frac{19}{3}.$

3.4. Müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi və hissə - hissə inteqrallanma üsulları:

Teorem: Fərz edək ki,

1) $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir.
2) $\varphi(t)$ funksiyası $[\alpha,\beta]$ parçasında diferensiallanandır, belə ki,

$\varphi(t)$ funksiyası $[\alpha,\beta]$ parçasında kəsilməzdir və $\varphi(t)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu $[a,b]$ parçasıdır.

3) $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$. Onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

düsturu doğrudur.

Bu düstura müəyyən inteqralda **dəyişənin əvəz olunması** düsturu deyilir.

Misal 2: $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2}$ inteqralını hesablayaq:

Həlli: $1 + x^2 = t$ əvəzləməsi edək. Onda $2xdx = dt$ olur. Yeni inteqralın sərhədlərini tapaq.

$x = 0$ üçün $t = 1$, $x = 1$ üçün isə $t = 2$ alınır. $x = \sqrt{1-t}$ funksiyası $[1,2]$ parçasında kəsilməzdir. Yeni alınan funksiya da kəsilməzdir. Onda (3) düsturunu tətbiq etsək

$$\int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t} = \ln t \mid_1^2 = \ln 2$$

olar.

Müəyyən inteqralda hissə-hissə inteqrallama düsturu

Teorem: Fərz edək ki, $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarının $[a,b]$ parçasında kəsilməz törəmələri vardır. Onda

$$\int_a^b udv = uv\,|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (4)$$

düsturu doğrudur.

Bu düstur müəyyən inteqralda **hissə-hissə inteqrallama** düsturudur.

Misal 3: $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ inteqralını hesablayaq:

Həlli.

$u = x;\quad du = dx;\quad \sin x\, dx = dv \leftrightarrow v = -\cos x.$

Bunları (4) düsturunda nəzərə alsaq,

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\int_0^{\pi} x d(\cos x) =$$

$$= -x\cos x\,|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$$

olar.

Müəyyən inteqralların hesablanmasına aid bəzi misalların izahlı həlli

1. $\int_a^b (2x+2)dx = 9$ və $a + b = 5$ olduğunu bilərək $b - a$ fərqini hesablayaq.

$\int_a^b (2x+2)\,dx = \left(\frac{2x^2}{2} + 2x\right)|_a^b = b^2 + 2b - a^2 - 2a = 9.$

$a = 5 - b$ olduğundan

$b^2 + 2b - (25 - 10b + b^2) - 2(5 - b) = 9$

$14b - 35 = 9$

$b = \frac{44}{14} = 3\frac{1}{7}$

$a = 5 - b = 1\frac{6}{7}$

$b - a = 1\frac{2}{7}$

2. a –nın hansı qiymətində $\int_0^1 (6x^5 + a)dx = 7$ bərabərliyi doğrudur?

$\int_0^1 (6x^5 + a)dx = (x^6 + ax)\,|_0^1 = 1 + a = 7$

buradan alarıq ki, a = 6 qiymətində bərabərlik doğrudur.

3. $\int_1^3 (x^3 + 1)dx$ inteqralını hesablayaq:

$\int_1^3 (x^3 + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\,|_1^3 = \frac{81}{4} + 3 - \left(\frac{1}{4} + 1\right) = 22$

4. $\int_2^5 (3x^2 + 2)dx$ inteqralını hesablayaq:

$\int_2^5 (3x^2 + 2)dx = \left(\frac{3x^3}{3} + 2x\right)\,|_2^5 = 125 + 10 - 8 - 4 = 123$

5. $\int_0^1 x^{\sqrt{5}}dx$ inteqralını hesablayaq:

$\int_0^1 x^{\sqrt{5}}dx = \frac{x^{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{5}-1}\,|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}-1}.$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\, dx$ inteqralını hesablayaq:

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\, dx = \frac{\sin 3x}{3}\,|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}(\sin\frac{3\pi}{6} - \sin 0) = \frac{1}{3} \quad \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}$

7. a – nın hansı qiymətində $\int_0^1 (6x^5 + a)dx = 7$ bərabərliyi doğrudur?

$\int_0^1 (6x^5 + a)dx = (x^6 + ax)\,|_0^1 = 1 + a = 7$, buradan alarıq ki, $a = 6$.

8. $\int_2^7 \frac{dx}{x^2}$ inteqralını hesablayaq:

$\int_2^7 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\,|_2^7 = -\frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

9. $\int_2^5 (3x^2 + 2)dx$ inteqralını hesablayaq:

$\int_2^5 (3x^2 + 2)dx = \left(\frac{3x^3}{3} + 2x\right)\,|_2^5 = 125 + 10 - 8 - 4 = 123$

10. $\int_0^1 x^{\sqrt{5}}dx$ inteqralını hesablayaq:

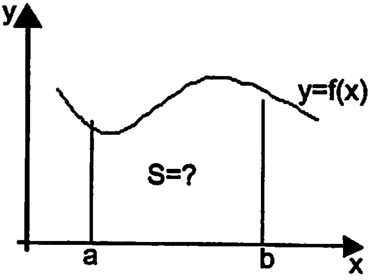
$\int_0^1 x^{\sqrt{5}}dx = \frac{x^{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{5}-1}\,|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}-1}.$

FƏSİL IV. MÜƏYYƏN İNTEQRALIN TƏTBİQLƏRİ

4.1. Müstəvi fiqurun sahəsinin hesablanması

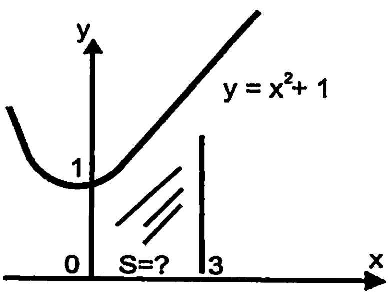
Fərz edək ki, y = f(x) funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdir. Onda x = a; x = b düz xətləri və absis oxu ilə hüdudlanmış müstəvi fiqurun sahəsi

$S = \int_a^b f(x)\, dx$ düsturu ilə hesablanır



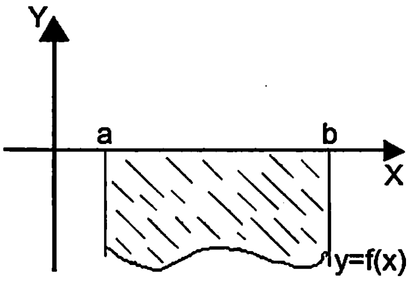
Əgər, y = f(x) və y = g(x) əyriləri və $x = a;$ $x = b$ duz xətləri ilə hüdudlanan müstəvi fiqurun sahəsi soruşularsa onda sahə $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ düsturu ilə hesablanır.

Misal 1. f(x) = $x^2 + 1$ əyrisi ilə $x = 0$; $x = 3$ düz xətlərinin hüdüdlanmış müstəvi fiqurun sahəsini tapaq:



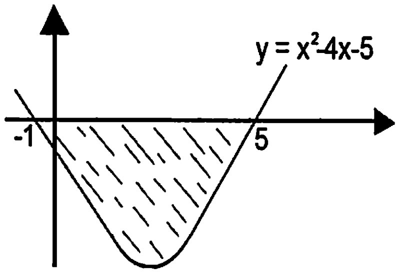
$$S = \int_0^3 (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^3 = (9 + 3) - (0) = 12$$

Əgər, qrafikdə hüdudlanan sahə aşağıdakı şəkildə verilərsə (mənfi hissədə)



onda sahə $S = -\int_a^b f(x)\,dx$ düsturu ilə hesablanır

Misal 2. Verilir: $y = x^2 - 4x - 5$, $x = -1$, $x = 5$ hüdudlanan sahəni tapaq:



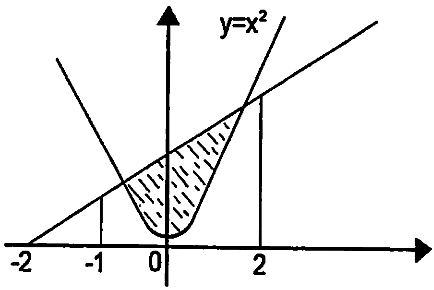
$$S = -\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{-1}^{5} (x^2 - 4x - 5)\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x \,\Big|_{-1}^{5} = -36$$

İnteqral işarəsinin qarşısında mənfi işarəsi olduğu üçün $S = -(-36) = 36$ olar.

Sahənin hesablanmasına aid misalların həlli

Misal 3. $y = x + 2$ və $y = x^2$ qrafiklərinin kəsişməsindən alınan sahəni tapaq:

Həlli:



$$S = \int_{-1}^{2}(x+2)\,dx - \int_{-1}^{2}x^2\,dx = \int_{-1}^{2}(x + 2 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Misal 4: $f(x) = x^2 - x$ və $f(x) = -x^2 + 5x$ -nın qrafiklərinin kəsişməsindən alınan sahəni tapaq:

Həlli:

İlk öncə, inteqralın sərhədlərini tapaq: yəni,

$-x^2 + 5x = x^2 - x$ tənliyini həll edək.

$-2x^2 + 6x = 0$

$x(x+3) = 0; \quad x = 0, \ x = 3.$

İnteqralın sərhədləri məlum oldu. (0 və 3)

$S = \int_0^3(-2x^2 + 6x)dx = -2\frac{x^3}{3} + 3x^2\Big|_0^3 = -18 + 27 - 0 = 9.$

Tapşırıq 5: Verilmiş şərtlərə uyğun hüdudlanan sahəni hesablayın:

1. $f(x) = -x^2 + 4x$ və $x = 0, \ x = 23$
2. $y = x^2 - 4x - 5$ və $x = -1, \ x = 3$

3. $y = 2x + 3$ və $y = x^2$
4. $f(x) = x^2 - 2x$ və $f(x) = -x^2 + 7x$
5. $y^2 = x^2 - 2x + 3;\ x = 0;\ x = 3$;
6. $y = 6 - 2x$ və $y = 6 + x - x^2$
7. $y = 9x^2 - 4$ və $y = x^2 + 8x + 12$
8. $2y = 2 - x^2$ və $y = -x$
9. $1y = 1 - x^2$ və $y = x^2 - 1$
10. $y = x^2 + 1$ və $3y = 3 - x$
11. $y = x^2 - 2x + 2$ və $y = 2 + 4x - x^2$
12. $y = 3x - x^2$ və $y = 0$
13. $y = x^2 + 2x$ və $y = 0;\ x = 3$
14. $y = (x - 3)^2$ və $x = 0;\ y = 0$
15. $y = \frac{3}{x}$ və $y = 4 - x$

FƏSİL V. EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ

5.1. Ehtimal nəzəriyyəsi haqqında məlumat. Təsadüfi hadisə

Ehtimal nəzəriyyəsi - nəzəri və tətbiqi əhəmiyyət kəsb edən riyazi elmdir. İndi elm və texnikanın elə bir sahəsi yoxdur ki, orada ehtimal-statistika üsullarından bu və ya başqa dərəcədə istifadə edilməsin. Ümumiyyətlə ehtimal nəzəriyyəsi müasir aləmdə, yəni hazırda riyazi təhsilin ən mühüm sahələrindən biridir.

Təbiət hadisələri bir-biri ilə qarşılıqlı əlaqədədirlər və bir-birilərini şərtləndirirlər. Onların birinin dəyişilməsi digərinin dəyişilməsinə səbəb olur. Təsadüfü hadisənin qanunauyğunluğunu ancaq onu eyni bir şəraitdə təkrarən coxlu sayda müşahidə etdikdə görmək olar. Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, ancaq praktiki olaraq qeyri-məhdud sayda müşahidə edilə bilən hadisələri öyrənmək olar. Belə hadisələrə kütləvi hadisələr deyilir. Buna görə də ehtimal nəzəriyyəsində əsasən kütləvi hadisələr, yəni praktiki olaraq eyni şəraitdə istənilən sayda təkrar oluna bilən hadisələr öyrənilir. Bu cür təsadüfi hadisələri öyrənmək ehtimal nəzəriyyəsində öz əksini tapır.

Təbiətdə əksər hadisələr təsadüfi hadisələrdir.İnsan fəaliyyətinin bütün sahələrində nəticəsi təsadüfdən asılı olan, yəni nəticəsini əvvəlcədən söyləmək mümkün olmayan hadisələrə tez-tez rast gəlinir. Məsələn, sığorta edilmiş əmlakın təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxması təsadüfün nəticəsidir.

Real gerçəklikdə baş verən hər bir hadisəni öyrənmək üçün insanlar müəyyən müşahidələr, təcrübələr, ölçmə işləri – sınaqlar aparırlar.Mümkün qədər çox aparıla bilən, praktiki olaraq qeyri-məhdud sayda təkrar edilə bilən sınaqların nəticəsinə əsasən həmin hadisənin xassələri və qanuna uyğunluğu aşkar edilir. İnsanlar bu qanunauyğunluğu öyrənməklə müəyyən dərəcədə təsadüfü hadisələri idarə etməyi, onların təsirinin nəticələrini əvvəlcədən söyləməyə və aradan qaldırmağa, hətta onlardan öz praktiki fəaliyyət sahələrində məqsədyönlü şəkildə istifadə etmək imkanı əldə edirlər. Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsi tezlikləri dayanıqlı olan təsadüfü hadisələri öyrənir və bu hadisələrin kütləvi təkrarında onların qanunauyğunluqlarını aşkar edir.

Qanunauyğun hadisə dedikdə münasib şəraitdə hökmən baş verən hadisə başa düşülür. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, elə hadisələr də vardır ki, onların baş verib-verməməsi təsadüfü xarakter daşıyır. Məsələn, bir atəş zamanı atılan güllə hədəfə dəyədə bilər, dəyməyədə bilər, sığorta edilmiş əmlak təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxada bilər çıxmayada bilər. Belə hadisələrin qanunauyğunluğunu qabaqcadan söyləməkdə seçilən riyazi model böyük rol oynayır, yəni ehtimal nəzəriyyəsi əslində təsadüfü proseslərin riyazi modelini öyrənən riyazi elmdir.Başqa sözlə, ehtimal nəzəriyyəsi riyazi modellərdə təsadüfü hadisələrin ehtimalları arasında elə əlaqə təyin edir ki, bu əlaqələr mürəkkəb hadisələrin ehtimallarını daha sadə hadisələrin ehtimalları vasitəsilə hesablamaq imkanı verir.

Ən sadə hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənənib və bunun əsasında müvafiq nəzəriyyəni quraraq daha mürəkkəb hadisələrin, hətta praktiki olaraq bilavasitə müşahidə edilə bilməyən, lakin prinsip etibarı ilə xəyalən coxlu sayda müşahidə edilə bilən hadisələri nəzəri olaraq öyrənmək olar.Məsələn bir uçuş üçün nəzərdə tutulmuş kosmik gəminin layihələndirilməsi prosesində bütün vasitələrin saz işləməsinə və üçuşun müvəffəqqiyyətlə həyata keçməsinə əmin olmaq üçün üçüşü təmin edən vasitələrin etibarlılığını tədqiq etmək olar. Elmin gücü ondadır ki, bilavasitə müşahidələrdən alınan sadə müddəalara əsaslanaraq bilavasitə müşahidə aparmadan nəzəri üsullarla yeni faktları aşkara cıxarmaq olar.

5.2. Təsadüfü hadisə

Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biri təsadüfü sınaq anlayışıdır.Sınaq anlayışının çox geniş mənası vardır. Metal pulun döşəmə üzərinə atılması, müəyyən hədəfə atəş açılması, hər hansı fiziki kəmiyyətin ölçülməsi, nərd oyunu zərinin taxta üzərinə atılması və s. sınağa misaldır.

Hər bir sınaq müəyyən şərtlər və ya şərtlər kompleksi daxilində yerinə yetirilir.Sınağın aparılma şərtləri əvvəcədən məlum olur və yalnız bu şərtlər ödənildikdə sınaq aparılır.Təkrarən aparılan sınaq zamanı bu şərtlər dəyişilməz qalır. Hər bir sınaq öz aparılma şərtləri və nəticələri ilə xarakterizə olunur.

Tərif 1: Tutaq ki, S, təkrarən aparılan bilən sınaqdır. S sınağının hər bir icrası zamanıalınan nəticəyə **hadisə deyilir.**

Məsələn: Atıcı 2 hissəyə bölünmüş hədəfə atəş açır.Bu zaman atəş sınaqdır, hədəfin müəyyən hissəsinə düşməsi isə hadisədir.

Qutuda ağ və qara rəngdə şarlar vardır.Qutudan təsadüfü qaydada hər hansı şar çıxarılır.Şarın çıxarılması sınaq, cıxarılan şarın rənginin qara olması isə hadisədir.

Aparılan sınaq zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilər, verməyə də bilər.

Tərif 2: Sınağın hər bir icrasında hökmən baş verən hadisəyə **yəqin hadisə** deyilir.

Tərif 3: Sınağın heç bir icrasında baş verməyən hadisəyə **mümkün olmayan** hadisə deyilir

Tərif 4: Sınağın icrası zamanı nəzərdə tutulan hadisəbaş verə də bilirsə, verməyə də bilirsə, yəni sınaq zamanıhəmin hadisənin baş verib – verməməsi haqqında qabaqcadanheç nə demək mümkün deyilsə, onda həmin hadisəyə**təsadüfi hadisə** deyilir.

Tərif 5: Verilmiş sınaq nəticəsində eyni zamanda (birgə) baş verə bilməyən hadisələrə **uyuşmayan hadisələr** deyilir (müstəsna hadisələr deyilir).

Başqa sözlə: - Ortaq nəticələri olmayan hadisələrə **uyuşmayan hadisələr** deyilir. Ehtimal nəzəriyyəsində hadisələri latın əlifbasının ilk böyük hərfləri ilə işarə edirlər. Məsələn: A, B, C, və.s.

Aparılan sınaq nəticəsində hadisələrin baş verib – verməməsi həmin sınağı keyfiyyətcə xarakterizə edir.

5.3. Təsadüfü hadisələr üzərində əməllər

Əgər S sınağının hər-bir icrasında $\omega_i(i = 1,2,)$ hadisələrindən yalnız biri hökmən baş verirsə, onda ω_i nəticələrindən hər birinə S sınağının elementar hadisəsi, bütün belə elementar hadisələr çoxluğuna isə S sınağının elementar hadisələr fəzası deyilir və $\Omega = \{\omega_{1,}\omega_{2,...}\}$ kimi işarə olunur.

Elementar hadisələr fəzasının hər bir altçoxluğuna təsadüfi hadisə deyilir.

Ω - yəqin hadisədir, (Ø) (boş çoxluq) isə mümkün olmayan hadisədir.

Təsadüfi hadisələr elementar fəzanın altçoxluqları olduqları üçün çoxluqların üzərindəki əməllərə uyğun olaraq təsadüfi hadisələr üzərində aşağıdakı əməllərin təyin edirlər.(analoji olaraq ehtimal nəzəriyyəsində sınaq zamanı baş verən hadisəni latın əlifbasının böyük hərfləri ilə işarə edirlər).

1. Hadisələr arasında eynigüclülük (daxilolma) münasibətləri:

A hadisəsi baş verdikdə B hadisəsi də baş verirsə, deyirlər ki, A hadisəsi B hadisəsini doğurur və $A \subset B$ kimi yazırlar.

Məsələn: Bir dəfə atılan zərdə 1,3,5 xallarına uyğun üzlərdən hər hansı birinin düşməsi hadisəsi düşən üzdə tək rəqəmin olması hadisəsini doğurur.

Əgər $A \subset B$ və $B \subset A$ münasibətləri hər ikisi eyni zamanda ödənilərsə, A və B-yə eynigüclü və ya bərabər hadisələr deyilir və $A = B$ kimi yazılır.

Tərifə görə $B = A <=> A \subset B \wedge B \subset A$ yazmaq olar.

2. Hadisələrin hasili.

A və B hadisələrinin hər ikisi birlikdə baş verdikdə baş verən hadisəyə bu hadisələrin hasili (kəsişməsi) deyilir və $A \cdot B$ və ya $A \cap B$ kimi işarə olunur. Vurma əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. $AB = BA$
2. $(AB).C = A(BC) = ABC$
3. $A.A = A$
4. $A\Omega = A, \ A\emptyset = \emptyset$.

3. Hadisələrin birləşməsi.

A və B hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəyə bu hadisələrin birləşməsi deyilir və $A \cup B$ kimi işarə olunur.

Birləşmə əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $(A \cup B) \cup C = A(C \cup B)$
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup \emptyset = A, \ A \cup \Omega$

4. Hadisələrin fərqi və tamamlama əməli.

A hadisəsi baş verib, B hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisəyə A ilə B-nin fərqi deyilir və $A - B$ və yaxud $(A\backslash B)$ kimi işarə olunur.

A hadisəsinin baş verməməsi hadisəsi A-nın tamamlayanı (əksi) adlanır və $\bar{A}$ kimi işarə olunur.

Aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

1. $(A \cup B).C = AC \cup CB$
2. $(AB)C = (A \cup C)(C \cup B)$
3. $A \cup (AB) = A$

5.4. Ehtimalın klassik tərifi

İlk dəfə ehtimalın klassik tərifini 1812-ci ildə fransız alimi Laplas vermişdir.

Ehtimal – qeyri-müəyyən hadisənin baş verməsi halıdır və hər zaman 0 və 1 arasında qiymət alır.

Tərif 1. Əgər A hadisəsi m xüsusui hallara ayrılarsa və hər bir xüsusi hal cüt-cüt uyuşmayan eyni imkanlı tam qrup əmələ gətirən hadisələrin n sayda sisteminə daxil olarsa onda $\frac{m}{n}$ ə A hadisəsinin ehtimalı deyilir və $P(A)$ ilə işarə edilir. Yəni

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Bir çox hallarda hadisənin xüsusi hallara ayrılması sözlərini hadisə üçün əlverişli halların sayı sözləri ilə əvəz edirlər və onda ehtimalın klassik tərifi aşagıdakı kimi verilir.

Tərif 2: Əlverişli variantların bütün mümkün variantlara nisbəti hadisənin ehtimalı adlanır və $P(A) = \frac{m}{n}$ **ilə işarə edilir.**

Bu, ehtimalın **klassik tərifi** adlanır. Buradakı m hadisənin baş verməsi üçün əlverişli halar sayı n isə bütün mümkün halların sayıdır.

Ehtimalın klassik tərifinin tətbiq dairəsi məhduddur. Bu tərifin bir çox çatışmayan cəhətləri vardır. Çünkü, bir çox hallarda elementar hadisələrin eyni ehtimallıolmasını təyin etmək çətin olur. Eyni imkanlılıgın özü eyni ehtimallılıqdır. Deməli ehtimala ehtimal vasitəsi ilə tərif verilir. Digər tərəfdən də sınaqların sayının sonlu olması məsələsi də tərifin tətbiq sahəsini məhdudlaşdırır. Bunlara baxmayaraq klassik tərifin böyük praktik əhəmiyyəti vardır.

İndi klassik tərifə əsasən hadisənin ehtimalını hesablamağa aid misasllara nəzər salaq.

Misal 1. İki zəri atdıqda düşən xalların cəmi bizə lazım olan dəyişən olsun və x ilə işarə edək. Bu təsadüfi x dəyişəni 2-dən 12-yə qədər qiymətlər ala bilər. 36 mümkün variant vardır və hər bir variantın baş verme ehtimalı 1/36 –ə bərabərdir. Tərifə əsasən əlverişli variantların bütün mümkün variantlara nisbəti ehtimal adlanır. Təsadüfi dəyişənin ehtimalını p ilə işarə edilir.

$$P(X) = 1/36.$$

Misal 2. Bir zəri bir dəfə atdıqda onun yuxarı düşənüzündə tək sayda xalın olması hadisəsinin ehtimalınıtapmalı.

Həlli: Buradan aydındır ki, göstərilən A hadisəsi üçün

$m = 1,3,5$ (əlverişli olan hallar sayı)

$n = 6$ (mümkün halların sayı)

Onda düsturu əsasən.

$P(A) = 3/6 = 1/2$ olar.

Misal 3. Hamar lövhə üzərinə iki nərd zəri atılmışdır. Yuxarı üzlərdə düşən xallar cəminin 6 -ya bərabər olması hadisəsinin ehtimalını tapın:

Həlli: Ehtimalın klassik tərifindən istifadə edək. İki zər atılarkən mümkün hadisələr sayı $6 \times 6 = 36$ götürülməlidir. Belə ki, birinci zərin yuxarı üzündə düşən, hər-bir xal ikincinin yuxarı üzündə düşə bilən 6 xaldan hər-biri ilə qruplaşa bilər. Yuxarı üzlərdəki xallar cəminin 6-ya bərabər olması hadisəsini A ilə işarə edək. A üçün əlverişli hallar (1;5), (5;1), (3;3), (4,2), (2,4) olar. Burada mötərizə daxilindəki rəqəmlər uyğun olaraq birinci və ikinci zərin yuxarı üzündə düşən xalları göstərir. Beləliklə, mümkün hallar sayı 36, əlverişli hallar sayı 5 olduğu üçün $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$ olar.

Misal 4. İki zəri birgə atdıqda yuxarı düşən üzlərdəkixallar cəminin uyğun olaraq 2, 10, 12 olmasındanibarət olan A, B, C hadisələrinin ehtimalını tapın:

Həlli.

İki zəri birgə atdıqda birinci zərin hər bir üzü ilə ikinci zərin hər bir üzü düşə bildiyindən mümkün halların sayı $6 \times 6 = 36$ olar. A, B və C hadisələri üçün əlverişli hallar isə aşağıda göstərilmişdir

$P(A) = (1 + 1);\quad m = 1,$

$P(A) = (4+6), (5+5), (6+4); \quad m = 3,$
$P(C) = (6+6); \quad m = 1,$

Onda klassik tərifə əsasən,

$P(A) = \frac{1}{36}; \quad P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}; \; P(C) = \frac{1}{36}$ olar.

Qeyd: Bir oyun zərinin atılmasındakı mümkün halların sayı $n = 6$ iki oyun zərinin atılmasındakı mümkün halların sayı: $n = 6^2$, üç oyun zərinin atılmasındakı mümkün halların sayı $n = 6^3$ və nəhayət k sayda atılmış zərin mümkün hallarının sayı $n = 6^k$ olar. Metal pulda isə $n = 2^k$ olar (metal pulun 2 üzü olduğu üçün).

5.5. Ehtimal haqqında teoremlər və ehtimalın sadə xassələri

Teorem 1. (ehtimalın toplama teoremi) Uyuşmayan ixtiyari iki A və B hadisələrinin cəminin ehtimalı üçün aşağıdakıdüstur doğrudur:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Teorem 2. (ehtimalın vurma teoremi). Əgər A və B asılı olmayan hadisələrdirsə onda $P(A/B) = P(A)$ olar. Bu halda A və B hadisələrinin hasilinin ehtimalı üçün $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ düsturu doğrudur.

Teorem 3. $A \subset B$ olduqda $P(A-B) = P(A) - P(B)$ doğrudur.

Teorem 4. İstənilən A və B hadisələri üçün
$(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ doğrudur.

Teorem 5. Fərz edək ki, C, A və B hadisələrindən yalnız birinin baş verməsi mümkündür.
Onda $P(C) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$ P(C) bərabərliyi doğrudur.

Ehtimalın xassələri:

Nəticə 1: A və B uyuşmayan hadisələr olduqda
$P(A+B) = P(B) + P(B)$ olar.

Xassə 2. İstənilən A hadisəsi üçün $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ doğrudur.

Xassə 3. Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfırdır

$$P(\emptyset) = 0.$$

Nəticə 4. $A \subset B$ olduqda $P(A) \le P(B)$ doğrudur.

Nəticə 5. İstənilən A hadisəsi üçün $0 \le P(A) \le 1$ bərabərsizliyi doğrudur.

5.6. Həndəsi ehtimal

Hadisə üçün əlverişli və mümkün hallar sayından biri və ya hər ikisi sonlu olmadıqla ehtimalın klassik tərifindən istifadə etmək mümkün deyil. Bəzi belə ehtımalları hesablamaq üçün ehtimalın aşağıdakı həndəsi tərifindən istifadə olunur.

Fərz edək ki, l düz xətt parçası L düz xətt parçasının daxilində yerləşir. L parçasından təsadüfi olaraq götürülən nöqtənin l parçasından olması ehtimalını tapmaq tələb olunur.Götürülən nöqtənin l parçasından olması ehtimalı L parçasının uzunluğu ilə mütənasib olub, l-in L parçası daxilində necə yerləşməsindən asılı olmamasını qəbul etdikdə bu ehtimal

$P = \frac{l\ (uzunluq)}{L\ (uzunluq}$ düsturu ilə hesablanılır.

Ehtimalın bu həndəsi tərifi müstəvi fiqurlar və fəza cisimləri üçün də ümumiləşdirilir.Belə ki, g müstəvi fiquru G müstəvi fiqurunun daxilində yerləşmişdirsə, G -dən təsadüfən götürülmüş nöqtənin g-dən olması ehtimalı yuxarıdakı fərziyyələr qəbul edilməklə $GP = \frac{sahəg}{sahəG}$ üsturu üzrə, müstəvi fiqurlar əvəzinə v, V fəza cisimləri olduqda isə $P = \frac{həcm\ v}{həcm\ V}$ düsturu üzrə hesablanır.

Misal 5. Uzunluğu 20 m, eni 10 m olan sahə verilib. Paraşütlə eniş edən idmançının uzunluq 7 m, eni 4m olan sahəyə düşmə ehtimalı neçədir.

Həlli:

$$P = \frac{sahəg}{sahəG} = \frac{4.7}{20.10} = \frac{28}{200} = 0,14.$$

5.7. Şərti ehtimal

Şərti ehtimal anlayışı. Aydındır ki, A hadisəsinin $P(A)$ ehtimalı haqqında ancaq müəyyən şərtlər kompleksi yerinə yetirildikdə, yəni sınaq aparıldıqdan sonra danışmaq olar.Sınağın aparılma şərtləri dyişildikdə həmin sınaq dəyişir, başqa sınaq alınır və nəticədə hadisənin ehtimalı da dəyişir.

Məsələn, A hadisəsinin ehtimalının hesablanmasında aparılan sınağın şərtlərinə yeni bir şərti A hadisəsinin başverməsi şərtinidə əlavə etsək, onda başqa bir ehtimal B hadisəsinin başverməsi şərtinidə yəni, A hadisəsinin şərti ehtimalını alırıq.

Beləliklə, təcrübədə bir çox hallarda A hadisəsinin ehtimalını başqa bir B hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində hesablamaq lazım gəlir. Bu cür ehtimala şərti ehtimal deyillir. B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin şərti ehtimalı $P(A/B)$ kimi işarə edilir.

Tərif. A hadisəsinin, B hadisəsinin baş verməsi şərtində $P(A/B)$ şərti ehtimalı həmin hadisələrin hasilinin ehtimalının B hadisəsinin ehtimalına olan nisbətinə deyilir və $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ kimi hesablanılır (1).

Bu tərifin $P(B) > 0$ olduqda mənası var.

Ehtimalı sıfır olan hadisəyə yəni $P(B) = 0$ olan B hadisəsinə nəzərən hadisələrin şərti ehtimalına baxılmır.

Misal 6. Bir zəri bir dəfə ardıqda, onun yuxarı düşən üzündəki xallar sayının cüt olması hadisəsini B ilə, 6 olması hadisəsini isə A

ilə işarə edək. A hadisəsinin şərtsiz ehtimalını və B – nin baş verməsi şərtində şərti ehtimalını tapmalı.

Həlli. Burada ümumi halların sayı $n = 6$; A hadisəsi üçün əlverişli halların sayı $m = 1$;. Onda $P(A) = \frac{1}{6}$ olar.

İndi tutaq ki, B hadisəsi baş vermişdir, yəni zəri atdıqda ancaq 2, 4, 6 olan üzləri düşür. Onda bu üç haldan ancaq biri A hadisəsi üçün əlverişli olar.

Deməli, $P(A/B) = \frac{1}{3}$ olar.

Bu ehtimalın qiyməti **(1)** düsturuna əsasən alındı.

Yəni, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(AB) = \frac{1}{2}$ olduğu üçün

Misal 7. 818 nəfərdən 276 –sı qrip xəstəliyinə qarşı peyvənd edilmişdir.

Cəmi 69 nəfəri qrip xəstəliyinə tutulmuşdur. Bunlardan üçü peyvənd edilərkən xəstəliyə tutulmuşdur. Təsadüfi götürülən bir şəxsin peyvənd edildiyi məlum olur. Bu peyvənd edilmiş şəxsin xəstə olması ehtimalını tapın.

Həlli.

Fərz edək ki, Q - təsadüfi götürülən bir şəxsin peyvənd edilməsi, A isə onun xəstə olması hadisəsidir. Məsələnin şərtinə görə yaza bilərik:

$$P(A) = \frac{69}{818};\ P(Q) = \frac{276}{818};\ P(AQ) = \frac{3}{818}$$

Axtarılan şərti ehtimal $P(A/Q) = \left(\frac{3}{818} : \frac{276}{818}\right) = \frac{3}{276} = \frac{1}{92}$ olar.

5.8. Ehtimalın vurma düsturu

Məlumdur ki, hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin şərti ehtimalı $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ kimi hesablanılır. Buradan, B hadisəsinin $P(B) > 0$ şərtsiz ehtimalı məlum olduqda, A və B

hadisələrinin eyni zamanda baş verməsinin ehtimalını təyin etmək olar.

Fərz edək ki, $A_1 \dots, A_n$ hadisələri aşağıdakı şərtlərini ödəyir

$$P(A_1P(A_1A_2 \dots A_n)) > 0,$$

$$P(A_1A_2) >, \dots \dots \dots \dots, P(A_1A_2 \dots A_n) > 0.$$

Onda aşağıdakı düstur doğrudur:

$$P(A_1 \dots A_n) =$$

$$= P(A_1)P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1\, A_2), \dots, P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) \quad (1)$$

düsturu doğrudur.

5.9.Tam ehtimal düsturu.

Fərz edək ki, $A_1 \dots \dots A_n$ hadisələri tam sistem təşkil edir.Onda ixtiyari A hadisəsi üçün

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i) \quad (2)$$

düsturu doğrudur.

Misal 8: İki qutudan birincidə 5 ağ, 10 qara, ikincldə 3 ağ, 7 qara kürə vardır. İkinci qutudan təsadüfi olaraq bir kürə götörülüb birinci qutuya qoyulduqdan sonra, birinci qutudan təsadüfi şəkildə bir kürə çıxarılır. Çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalını tapaq:

Həlli:

İkinci qutudan birinci qutuya bir kürə qoyduqdan sonra birinci qutudan bir kürə çıxardıqda aşağıdakı iki hadisədən biri baş verə bilər:

B_1 - çıxarılan kürə birinci qutuda əvvəl olan kürələrdən biridir.

B_2 - çıxarılan kürə sonradan ikinci qutudan blrinci qutuya qoyulan kürədir.

Aydındır ki,

$$P(B_1) = \frac{15}{16}; \quad (P(B_2) = \frac{1}{16};$$

A ilə çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsini işarə etsək, onda $P(A/B_1)$ şərti ehtimalı çıxarılan ağ kürənin birinci qutuda əvvəldən olan ağ kürələrdən birinin olması ehtimalıdır. Ona görə $P(A/B_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. $P(A/B_2)$ şərti ehtimalı isə çıxarılan ağ kürənin, sonradan ikinci qutudakı ağ kürələrdən birinin birinci qutuya qoyulanın olması ehtimalıdır:

$$P(A/B_2) = \frac{3}{10}.$$

Tam ehtimal düsturuna görə

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) =$$
$$= 5/15\cdot 1/3 + 1/6\cdot 3/10 = 159/480 = 53/160.$$

Bayes düsturu

Beyes dusturu B hadisəsi başverdikdən sonra $A_k(k = 1,2,\dots,n)$ hadisələrinin başverməsi haqında fərziyyələrin ehtimallarını yenidən qiymətləndirməyə imkan verir.

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)\,P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_k)\,P(B/A_k)} \quad (k = 1,2,\dots,n) \qquad (3)$$

Misal 9: Müəssisədə məmulat üç xəttə istehsal edilir.Bütün məmülatın 20 %-i birinci, 30 % - iknci və 50 % –i üçüncü xəttə istehsal edilir. Bu xətlərdə istehsal edilən məmulatların uyğun olaraq 95%, 98% və 97 % -i keyfiyyətli olur.Təsadüfən götürülən hər hansı məmulatın birinci, ikinci və üçüncü xəttə istehsal edilməsi ehtimalını hesablayaq.

Həlli:

$$P(A_1/A) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{0{,}05\times 0{,}2}{0{,}031} = \frac{10}{31}$$

$$P(A_2/A) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{0{,}02\times 0{,}3}{0{,}031} = \frac{6}{31}$$

$$P(A_3/A) = \frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(B)} = \frac{0{,}03\times 0{,}5}{0{,}031} = \frac{15}{31}$$

5.10. Bernulli düsturu

Əlverişli kombinasiyalar cüt-cüt uyuşmayan hadisələrdir və onların sayı C_n^m ədədinə bərabərdir. Buna görə də n sınaq nəticəsində A hadisəsinin düz m dəfə baş verməsi (bütün əlverşli kombinasiyalardan ibarət olan hadisələrin cəmi) hadisəsinin ehtimalı, ehtimalların toplanma teoreminə əsasən bütün əlverişli kombinasiyaların ehtimalları cəminə bərabər olar:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq m \qquad (1)$$

düsturu Bernulli düsturu adlanır.

Misal 7: Qutuda 20 ağ, 10 qara kürə vardır. Çıxarılan hər kürə geri qaytarılıb qarışdırılmaqla qutudan dalbadal 4 kürə çıxarılır. Çıxarılan 4 kürədən ikisinin ağ olması ehtimalını tapın.

Həlli: Hər dəfə qutudan çıxarılan kürənin ağ olma ehtimalı

$$P = 20/20 = 2/3.$$

Çıxarılan 4 kürədən ikisinin ağ olması (1) Bernulli düsturu üzrə tapıla bilər.

$(q = 1 - p)$olduğundan$q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $n = 4$, $k = 2$ olduğu üçün

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4.3}{1.2} \cdot (2/3)^2 \cdot (1/3)^2 = \frac{8}{27}.$$

Birləşmələr nəzəriyyəsinin elementləri
Mümkün halların sayılması qaydaları

Qayda 1: Hər hansı bir k hadisəsinin n dəfə sınaqdan keçirilməsi zamanı mümkün halların sayı k^n – düsturla hesablanır:

Misal 1: zərin 3 dəfə atılması halında neçə mümükün hal vardır?

Zərin 6 üzü olduğundan $k^n = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ mümkün hal vardır.

Qayda 2: Əgər birinci sınaqda k_1 hadisəsi, ikinci sınaqda k_2 hadisəsi və üçüncü sınaqda k_n hadisəsi varsa, mümkün halların sayı belə hesablanır:

$$(k_1)\cdot(k_2)\cdot(k_n).$$

Misal 2: Siz həftə sonu alışveriş mağazasına getmək istəyirsiz, restoranda yemek yəmək istəyirsiz və kinoya baxmaq istəyirsiz. Deyək ki, seçimlərimiz arasında 3 alışveriş mağazası, 4 restoran və 6 kino var. Bunları nəzərə alaraq, həftə sonu neçə cür mümkün hal kombinasiyası var?

$(3)\cdot(4)\cdot(6) = 72$ mümkün hal vardır

Qayda 3: n ədədin sıralanmasında mümkün halların sayı belədir:

$$n! = (n)\cdot(n-1)\cdots\cdots$$

Misal 3: tutaq ki, kitab rəfinə qoymaq üçün sizin 5 ədəd kitabnız var. Bu kitablar rəfə nəçə cür qoyula bilər?
$5! = (5)\,(4)\,(3)\,(2)\,(1) = 120$ mümkün hal vardır.

Qayda 4 : Permutasyon - Bir-birindən elementlərinin sırası ilə fərqlənən belə nizamlanmış çoxluqlara **permutasyon birləşmələr deyilir**. Verilən n-elementli nizamlanmış çoxluqların sayı Pn (fransızca "permutation"sözünün baş hərfi) ilə işarə olunur.

$$P_n = \frac{n!}{(n-X)!}.$$

Sıfırdan fərqli dörd müxtəlif rəqəmlə neçə dördrəqəmli ədəd yazmaq olar?

$$P_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

Misal 4: Tutaq ki, siz 5 kitabınızdan 3-nün rəfdə yerini dəyişmək istəyirsiz. Bu kitablar rəfdə nəçə cür düzülə bilər?

$$P_n = \frac{n!}{(n-X)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = \frac{120}{2} = 60$$

mümkün hal vardır.

Qayda 5: Kombinezon: Verilmiş n- elementli çoxluğun, nizamlanmamış m - elementli altçoxluqları, n elementdən m -

elementli kombinezonlar adlanır və $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$. düsturu ilə hesablanır və yaxud n ədədin içindən X ədədin seçilməsində mümkün halların sayı

$$C_n^x = \frac{n!}{X!\,(n-X)!}.$$

Misal 5(1): Tutaq ki, kitab rəfində sizin 5 kitabınız var. Bu kitablardan oxumaq üçün 3-nü təsadüfən seçmək istəyirsiniz. Kitabların seçilməsində neçə cür mümkün hal kombinasiyası var?

$$C_n^x = \frac{n!}{X!(n-X)!.} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6.2} = 10$$

mümkün hal var.

Misal 5(2): Qutuda 10 ağ və 5 qara kürə vardır. Bu qutudan təsadüfən 5 kürə çıxarılır. Çıxarılan kürələrin 3-nün ağ və 2-nin qara olması (A hadisəsi) ehtimalını tapmalı.

Həlli.

Qutuda olan 15 kürədən hər birində 5 kürə olmaqla sayda C_{15}^5 altçoxluq düzəltmək olar.

$$C_{15}^5 = \frac{15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5} = 3003$$

Qayda 6: (Aranjeman): Tutaq ki, n –elementli $M = \{a, b, c, \dots, k\}$ çoxluğu verilmişdir.

Bu çoxluğun bir, iki, üç və s. elementli nizamlanmış altçoxluqları, uyğun olaraq n elementdən bir, iki, üç və s. **elementli aranjemanlar adlanır.**

Bu altçoxluqlar bir-birindən həm elementlərinin müxtəlifliyi və həm də elementlərinin sırası ilə fərqlənir.Verilmiş n elementdən düzəldilən m elementli aranjemanların sayı A_n^m ilə işarə olunur.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ və yaxud } A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} \text{ olar.}$$

Misal 6: Beş kitabı hər dəfə üçünü götürməklə, kitab rəfində neçə üsulla düzmək olar?

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

5.11. Asılı olmayan hadisələr

İki hadisənin asılı olmaması:

Hadisələrin asılı olmaması ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir.

Tərif. A və B hadisələri üçün $P(AB) = P(A)P(B)$ bərabərliyi ödənildikdə onlara **asılı olmayan hadisələr** deyilir. $P(A) \neq 0$ və $P(B) \neq 0$ olduqda uyğun olaraq $P(B/A) = P(B)$ və $P(A/B) = P(A)$ bərabərliyi alınır.

Yəni, Əgər A hadisəsinin baş verməsi B hadisəsinin baş verməsi ehtimalına təsir etmirsə onda deyirlər ki, B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildir, onda

$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ bərabərliyi doğrudur.

Tərif. Asılı A və B hadisələri üçün $P(A/B) \neq P(B)$ və $P(A/B) \neq P(A)$ olar. Onda uyuşmayan A və B hadisələri asılı hadisələrdir. Doğrudan da, bu halda A və B hadisələrinin birinin baş verməsi digərinin baş verməməsi deməkdir, yəni

$$P(B/A) = P(A/B) = 0.$$

Teorem: (asılı olmayan hadisələr üçün ehtimallarınvurma teoremi).

Asılı olmayan hadisələrininhasilinin ehtimalı onalrın ehtimalları hasilinə bərabərdir:

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots\cdots P(A_n).$$

Sınaqların asılı olmaması o deməkdir ki, hər bir sınaq nəticəsində A hadisəsinin baş verməsinin ehtimalı, digər sınaqların nəticələrindən asılı deyildir.

Misal 8: Metal pul iki dəfə atılır. A ilə qerb üzünün birinci, B ilə isə qerb üzünün ikinci dəfə düşməsi hadisəsini işarə edək. A və B hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərin:

Həlli.

Metal pul iki dəfə atıldıqda elementar hadisələr fəzası (ümumu sınaq sayı)

$n = (GG, GR, RG, RR)$; $(n = 4)$

$A = (GG, GR)$; $(m = 2)$

$B = (GG, GR)$ $(m = 2)$

$AB = (G, G)$ $(m = 2)$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ olar

Buradan da aydın oldu ki, A və B hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

Ehtimalın hesablanmasına aid bəzi misalların həlli:

Misal 1. Bir sinifdə 6 qız, 9 oğlan şagird oxuyur. İki şagird növbə ilə cıxarılır. Çıxarılan şagirdlərin oğlan olma ehtimalı neçədir?

Həlli: cəmi şagird 6+9 = 15 , (9-oğlan 6- qız)

1) $P(A) = 9/15$

2) $P(B) = 8/14$

$P(A) = \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} = \frac{9.8}{15.14} = \frac{12}{35} = 0{,}34$

Misal 2. Tələbə proqramda olan 25 sualdan 20-ni bilir. Tələbəyə imtahan götürən müəllim tərəfindən verilən hər üç sualı tələbənin bilməsi ehtimalını tapın.

Həlli: $P(A) = \frac{20}{25}$; $P(A_2) = \frac{19}{24}$; $P(A_3) = \frac{18}{23}$ olduğundan

$P(A) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}$ olar.

Misal 3. Bazarda 40, 41, 42 və 42 və daha böyük ölçülü ayaqqabının satılma ehtimalları uyğun olaraq 0.15; 0.12 və 0.09-a bərabərdir.

40 ölçüdən kiçik olmayan ölçülü ayaqqabının satılma ehtimalını hesablayın.

Həlli.

Axtarılan hadisəni D ilə işarə edək. Bu hadisə 40 ölçülü (A), 41 ölçülü (B), 42 və daha böyük ölçülü(C) ayaqqabılar satıldıqda baş verir.

Onda $D = A + B + C$ hadisələri uyuşmayan hadisələr olduqları üçün $P(D) = 0{,}15 + 0{,}12 + 0{,}09 = 0{,}366$ olar.

Misal 4. Qutuda 3 standart və 7 qeyri-standart detal vardır. Təsadüfi olaraq iki detal götürülmüşdür.

A = (birinci götürülən detal standartdır) ;

B = (ikinci götürülən detal standartdır) ;

C= (götürülən detallardan heç olmasa biri standartdır).

$P(A/B)$; $P(B/A)$ və $P(A/C)$ ehtimallarını hesablayın.

Həlli:

$P(A) = \frac{3}{10}$; $P(B) = \frac{3}{10}$; olduğundan

$P(AB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$

Şərti ehtimalın düsturuna əsasən (1) düsturuna əsasən

$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{10}$; $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{10}$

$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$

$P(AC) = P(A) = \frac{3}{10}$

$P\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{P(AC)}{P(C)} = 1$ olar.

Misal 5. Bir dayanacaqda 200 avtomobildən 120- sinin işıqlandırma sistemində, digər dayanacaqda isə 150 avtomobildən 80-nin mühərrikində nasazlıq var. Qalan avtomobillərdə nasazlıq yoxdur. Dayanacaqların hərəsindən 1 avtomobil seçilir. Seçilmiş avtomobillərdən birinin mühərrikində, digərinin isə işıqlandırma sistemində nasazlıq olma ehtimalı nə qədərdir?

Həlli:

$P(A) = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{80}{150} = \frac{8}{15}$

Deməli, $P = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{25} = 0{,}32$

Misal 6. Mağazaya daxil olan hər 1000 soyuducudan orta hesabla 3-ü nasaz vəziyyətdə olur. Alınan soyuducunun saz vəziyyətdə olması ehtimalını tapın.

Həlli: Nasaz vəziyyətin ehtimalını A, saz vəziyyətin ehtimalını B ilə işarə etsək, onda

$P(A) = \frac{3}{1000} = 0{,}003$

$P(A) + P(B) = 1$ olduğundan

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}003 = 0{,}997$olar.

Misal 7. Əlinin universitetə qəbul olma ehtimalı $\frac{2}{3}$; Zəhranın qəbul olma ehtimalı $\frac{1}{5}$; Səidin qəbul olma ehtimalı isə $\frac{2}{5}$ olarsa, tək Zəhranın universitetə qəbul olma ehtimalı nə qədərdir?

Həlli:

$p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{5}$, $p_3 = \frac{2}{5}$ olarsa onda,

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ olar.

Bu zaman $P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{25}$ olar.

Misal 8. Iki atıcı hədəfə güllə atır. Birinci atıcının hədəfə dəymə ehtimalı 0,9 ikinci atıcının hədəfə dəymə ehtimalı 0,8 olarsa, hər iki atıcının hədəfə dəymə ehtimalını tapın?

Həlli: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$

Misal 9. 4 atıcı hədəfə atəş açır. Atıcıların hədəfi vurma ehtimalları uyğun olaraq, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{6}$ - ə bərabərdir. Atıcılardan heç olmasa birinin hədəfi vurma ehtimalını tapın?

Həlli:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$
$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$
$$P = 1 - q_1q_2q_3q_4 = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$$

Misal 10. Bir zər və bir dəmir pul eyni zamanda atılır. Zərin cüt nömrəli və ya 5 dən kiçik nömrəli üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın?

Həlli:

$$A = \{2,4,6\}; \quad B = \{1,2,3,4\}; \quad A \cap B = \{2,4\},$$
$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \quad P(C) = \frac{1}{2};$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$
$$P(A \cup B) \cdot P(C) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

Aşağıdakı məsələlərə uyğun ehtimalları hesablayın:

Məsələ 1. Qutuda 8 ağ və 5 qara kürə vardır.Qutudan bir kürə çıxarılır və rəngini qeyd etdikdən sonra yenidən qutuya qaytarılır. Sonra isə qutudan yeni bir kürə çıxarılır. Hər iki dəfə qutudan qara kürə çıxarılmasının ehtimalını hesablayın:

(cav $= \frac{25}{169}$)

Məsələ 2. Üç nəfər atıcı bir-birindən asılı olmayaraq eyni hədəfə atəş açır. Birinci atıcının hədəfi vurması hadisəsinin ehtimalı $P(A1) = 0{,}3$; ikinici atıcının hədəfi vurmasının hadisəsinin ehtimalı $P(A2) = 0{,}2$ və üçüncü atıcının hədəfi vurması hadisəsinin ehtimalı is. $P(A3) = 0{,}5$ olduğunu bilərək, atıcıların üçünün də atdığı güllələrin eyni zamanda hədəfə dəyməsinin ehtimalını tapın:

(cav = 0.03)

Məsələ 3. Qutuda 1 №-li zavodda hazırlanmış 12detal, 2 №-li zavodda hazırlanmış 20 detal, 3 №-li zavoddahazırlanmış 18 detal vardır. 1, 2, 3 №-li zavodlardahazırlanmış detalların əla keyfiyyətli olma ehtimallarıuyğun olaraq 0,9; 0,6; 0,9-a bərabərdir.

Qutudantəsadüfi olaraq götürülmüş detalın əla keyfiyyətliolması ehtimalini tapın.

(cav: 0,78)

Məsələ 4. Qutuda 20 ağ, 10 qara kürə vardır. Çıxarılan hər kürə geri qaytarılıb qarışdırılmaqla qutudan dalbadal 4 kürə çıxarılır. Çıxarılan 4 kürədən ikisinin ağ olması ehtimalını tapın:

(cav: 8/27)

Məsələ 5. Bir qutuda 3 ağ və 4 qara kürə vardır.Qutudan hər dəfə bir kürə götürməklə, iki dəfə ardıcıl kürə çıxarılır (çıxarılan kürələr qutuya qaytarılmır).Çıxarılan birinci kürənin ağ olduğunu (B hadisəsi) bilərək, sonra çıxarılan kürənin qara olması (A hadisəsi) ehtimalını tapın:

(cav: 2/3)

Məsələ 6. Qutuda 8 dənə ağ, 5 dənə qara və 7 dənə qırmızı kürə vardır. Qutudan hər dəfə bir kürə götürməklə,üç dəfə ardıcıl kürə çıxarılır və çıxarılan kürələr qutuya qaytarılmır. Çıxarılan birinci kürənin ağ (A hadisəsi),ikinci kürənin qara (B hadisəsi) və üçüncü kürənin qırmızı (C hadisəsi) olması hadisəsinin ehtimalını tapın: (cav: 7/171)

Məsələ 7. Qrupda 30 tələbə var. Onların 16-sı qızıdır. Təsadüfi seçilmiş bir tələbənin oğlan olması ehtimalını tapın:

(cav: $\frac{7}{15}$)

Məsələ 8. Şirə istehsal edən şirkət keçirdiyi reklam – şouda şirə qutularının etiketində pul və ya hədiyə uduşları yerləşdirmişdir. Pul uduşu ehtimalı $\frac{3}{10}$ – dür. Uduşa 9 ədəd pul uduşlu şirə qoyulmuşdursa, şouya cəmi neçə uduşlu şirə qutusu şıxarılmışdır?

(cav: $\frac{3}{10}$)

Məsələ 9. Metal pul və zər birlikdə atılır. Metal pulun xəritə üzünün, zərin isə cüt ədəd yazılan üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın: (cav: $\frac{1}{4}$)

Məsələ 10. Qutuda ölçülərieyni olan 5 yaşıl və 4 qırmızı kürəcik vardır. Qutudan təsadüfi olaraq götürülmüş üç kürəciyin eyni rəngli olması ehtimalını tapın:

(cav: $\frac{1}{6}$)

Məsələ 11. Bir qrupda 12 oğlan və 8 qız vardır. Sinifdən bir – birinin ardınca iki tələbə çıxır. Çıxan tələbələrin birincisinin oğlan, ikincisinin qız olaması hadisəsinin ehtimalını tapın:

(cav: 0,25)

Məsələ 12. 230 tələbə olan qrupda 8 nəfər eynəkli, 22 nəfər eynəksizdir. Həm eynəkli, həm də eynəksiz tələbələrin yarısının gözləri qəhvəyi rəngdədir.

Qrupdan təsadüfi olaraq seçilmiş tələbənin eynəkli və ya qəhvəyi gözlü olması ehtimalını tapın :

(cav: $\frac{19}{30}$)

FƏSİL VI. TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT PAYLANMA FUNKSİYASININ XASSƏLƏRİ

6.1. Təsadüfi kəmiyyət anlayışı

Hadisə və onun ehtimalı anlayışları kimi təsadüfi kəmiyyət anlayışı da ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir. Təsadüfi kəmiyyət, baxılan hadisəni kəmiyyətcə xarakterizə edən və təsadüfi amillərin təsiri ilə bu və ya digər şəkildə müxtəlif qiymətlər ala bilən kəmiyyətdir. Təsadüfi kəmiyyətin hansı qiyməti alacağınıqabaqcadan qəti demək mümkün deyildir. Onun hər bir sınaqda aldığı qiymətlər müxtəlif səbəb və təsadüflərdən asılı olaraq dəyişir.

Təsadüfi kəmiyyətləri latın əlifbasının son böyük $X, Y, Z, \ldots$ hərfləri ilə, onların ala biləcəyi qiymətləri isə yuyğun olaraq kiçik $x, y, \ldots z$ hərfləri ilə işarə edirlər.

Misal 1. Bir zəri bir dəfə atmaqdan ibarət olan sınaqda düşən üzdəki xallar sayını X ilə işarə edək. X – təsadüfi kəmiyyətdir. Bu kəmiyyət 1, 2, 3, 4, 5,6 qiymətlərinin birini ala bilər, lakin qiyməti alacağını qabaqcadan demək mümkün deyildir.

Misal 2. İstənilən bir tələbənin boyunun uzunluğu təsadüfi X kəmiyyətidir. Bu kəmiyyət hər hansı sonlu (a, b) intervalındakı bütün qiymətləri ala bilər.

Misallardan da göründüyü kimi, sınaqları kəmiyyətcə xarakterizə edən təsadüfi X kəmiyyətlərinin qabaqcadan hansı qiyməti alacağını qəti demək mümkün deyildir.Təsadüfi kəmiyyətlərin ancaq ala bildiyi qiymətlərçoxluğu göstərilə bilir. Bu qiymətlər sonlu, hesabi vəqeyri – hesabi çoxluq təşkil edə bilər.

Tərif 1: Sınaq nəticəsində mümkün qiymətlərdən birini təsadüfi olaraq alan kəmiyyətə **təsadüfi kəmiyyət (dəyişən) deyilir.**

Ümumiyyətlə təsadüfi kəmiyyət verilmişdir dedikdə aşağıdakılar nəzərdə tutulur.

1. təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər verilmişdir.

2. təsadüfi kəmiyyətin bu qiyməti hansı ehtimalla ala biləcəyi məlumdur.

Əsasən 2 növ təsadüfi kəmiyyətdən danışmaq olar.

1. Diskret təsadüfi kəmiyyət

2. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyət

Tərif 2:Əgər təsadüfi kəmiyyət, sonlu və ya hesabi sayda izolə edilmiş $x_1, x_2, .. x_n$ qiymətlərini ala bilirsə, ona **diskret təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

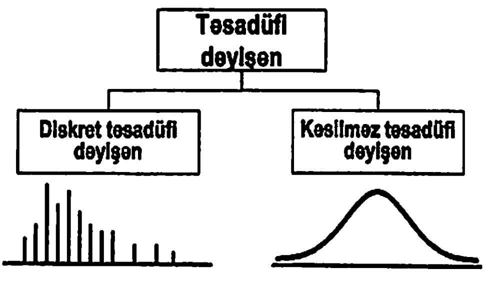
Yəni, diskret təsadüfi kəmiyyətlər sonlu qiymət alır və hər zaman tam rəqəmlərlə qeyd olunurlar.

Məsələn: Otaqdakı şagirdlərin sayı. Stolun üstündəki əşyaların sayı. Qapıya vurulan topların sayı və.s.

Tərif 3: Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlər hər hansı sonlu və ya sonsuz intervalı təşkil edirsə, ona **kəsilməz təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

Yəni, Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər - sonsuz qiymət alar və hər zaman ölçüləndir. Kəsilməz kəmiyyətləri hesablamaq mümkündür.

Məsələn: idmançının boyu, çəkisi, və temperaturu və.s



6.2. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası və xassələri

Təsadüfü kəmiyyətləri ancaq onların ala bildiyi qiymətlər çoxluğunu göstərməklə təyin etmək mümkün deyildir. Belə ki, qiymətlər çoxluğu eyni olan, lakin bu qiymətləri müxtəlif ehtimallarla alan müxtəlif təsadüfü kəmiyyətlər vardır. Buna görə də, təsadüfü kəmiyyətin verilməsi üçün onun ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu və həm də bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığı göstərilməlidir. Bu məqsədlə təsadüfü kəmiyyətin paylanma funksiyasına baxılır.

Istənilən həqiqi x üçün Ω_x çoxluğu σ -cəbr olan F sisteminə daxil olduğundan, onun ehtimalı təyin olunmuşdur.

Tərif:- X təsadüfi kəmiyyətinin x -dən kiçik qiymət alması hadisəsinin ehtimalına həmin kəmiyyətin paylanma funksiyası deyilir və $F(X) = P(X < x)$□□ kimi işarə edilir.

Paylanma fuksiyasının xassələri:

1. Paylanma fuksiyasının qiymətlər oblastı $[0,1]$ parçasıdır: $0 \leq F(X) \leq 1$

2. $X = X(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin $[x_1, x_2)$ yarım intervalında qiymət alması hadisəsinin ehtimalı paylanma funksiyasının x_2 və x_1 nöqtələrindəki qiymətləri fərqinə bərabərdir:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

3. Paylanma fuksiyası azalmayandır.

$$F(x_2) - F(x_1) \geq 0\ ,\ F(x_2) \geq F(x_1)$$

4. $P(X \geq x) = 1 - F(X)$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

7. Paylanma funksiyaı istənilən nöqtədə soldan kəsilməyəndir, yəni istənilən x nöqtəsində

$F(x - \Delta) \to F(x - 0) = F(x), x \to +\Delta$ bərabərliyi ödənilir.

Nəticə: Həqiqi dəyişənli f(x) funksiyası $f(x) \geq 0$ olarsa,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ şərtini ödədikdə $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ funksiyası paylanma funksiyasıdır.

Hər bir təsadüfü kəmiyyət öz paylanma funksiyasını birqiymətli təyin edir.

Lakin, paylanma funksiyasının verilməsi ilə təsadüfü kəmiyyət birqiymətli təyin edilmir. Hər təsadüfi kəmiyyətin ancaq bir paylanma funksiyası olduğu halda, bir funsiya müxtəlif təsadüfiü kəmiyyətlərin paylanma funksiyası ola bilər.

6.3. Diskret və kəsilməz paylanmalar

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onlara uyğun ehtimallar arasında əlaqə yaradan hər bir münasibətə təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu deyilir. Təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları müxtəlif formalarda olsa da,onların hamısndan paylanma funksiyasını almaq həmişə mümkün olmalıdır. Təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanunu bir sıra hallarda daha aydın və əlverişli şəkillərdə verilir. Bunların iki əsas növü ilə tanış olaq.

Diskret paylanmalar:

Tutaq ki, təsadüfiü X kəmiyyətinin aldığı sonlu və ya hesabi sayda $x_1, x_2, .. x_n$ qiymətləri və bu qiymətləri alma ehtimalları $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, .., n...$, verilmişdir.

Cüt-cüt uyuşmayan $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, $\{X = x_n\}$, ..., hadisələri tam sistem təşkil etdiyindən $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$ şərti ödənilir.

Diskret təsadüfü X kəmiyyətinin aldığı $x_1, x_2, .. x_n$, qiymətlərinin və bu qiymətləri almasının $P(X = x_i) = p_i$ ehtimallarının göstərilməsi onun paylanma qanununu təyin edir. Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu cədvəl şəklində verilir: $x_1, x_2, .. x_n$, kəmiyyətinin ala bildiyi tam (konkret) ədədi qiymətlərdir.

X_i	x_1	x_2	x_3	....	x_n
P_i	p_1	p_2	p_3	....	p_n

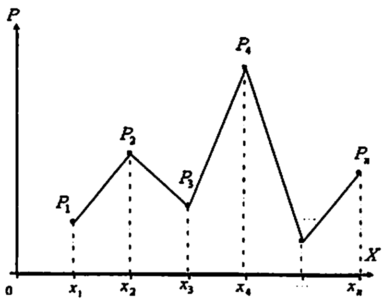
Burada $\sum_{i=0}^{n} P_i = 1$ şərti ödənilməlidir.

Cədvəldə verilən X_i-lər təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri, P_i-lər isə bu qiymətlərin alınma ehtimallarıdır.

Bu cədvələ diskret təsadüfü kəmiyyətin ehtimallarının paylanma cədvəli deyilir.

Diskret təsadüfü kəmiyyətin paylanma qanunu cədvəl şəklində verildikdə onun paylanma funksiyası $F(X) = P(X < x) = \sum_{x_i<x} p_i$ kimi tapılır.

Diskret təsadüfü kəmiyyətin paylanma qanununu qrafiki şəkildə də təsvir etmək olar. Bunun üçün, düzbucaqlı koordinat sistemində $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)$, nöqtələri qurulur və qurulan nöqtələr düz xətt parçaları ilə birləşdirilir. Alınmış fiqura paylanma çoxbucaqlısı deyilir (şəkil 1).



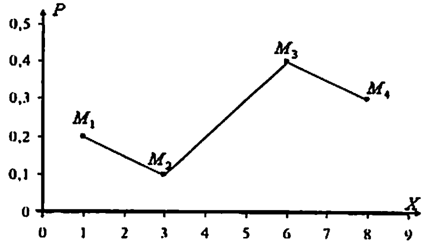
Diskret təsadüfü kəmiyyətin paylanma qanunu cədvəl şəklində verildikdə onun paylanma funksiyası

$$F(X) = P(X < x) = \sum_{x_i<x} p_i$$

kimi tapılır.

Misal 1: X diskret təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylanma qanunu ilə berilib. Buna uyğun paylanma coxbucaqlısını qurun:

Həlli.



Misal 2. Verilmiş seçmənin paylanmasına görə empirik paylanma funksiyasını tapın:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Həlli.

Seçmənin həcmini tapaq: $n = 10 + 15 + 25 = 50$

1. Ən kiçik variant $x_1 = 1$, deməli, $x \leq 1$ olduqda $F(X) = 0$ olar.

$x < 4$ yəni, $x_1 = 1$ qiyməti 10 dəfə müşahidə olunmuşdur, deməli,

2. $1 < x \leq 4$ olduqda $F(X) = 10/50 = 0{,}2$ olar

   $x < 6$ yəni, $x_1 = 1$ və $x_2 = 4$ qiymətləri 10+15=25 dəfə müşahidə olunmuşdur deməli,

3. $4 < x \leq 6$ olduqda $F(X) = 25/50 = 0{,}5$ olar

$x = 6$ ən böyük variant olduğuna görə $x \geq 6$ olduqda $F(X) = 1$ olar.

Beləliklə, axtarılan empirik funksiyanı yazaq:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0{,}2 & 1 < x \leq 4 \\ 0{,}5 & 4 < x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Misal 3: X diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

şəklində verilmişdir.

X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını tapın.

Həlli:

X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını $F(X)$ ilə işarə edək. Paylanma funksiyasının tərifinə görə $F(X) = P(X < x)$

X təsadüfi kəmiyyəti 3, 4, 7, 10 qiymətlərini alır. Bu təsadüfi kəmiyyət 3-dən kiçik qiymət almadığı üçün $x \leq 3$ olduqda $X < x$ mümkün olmayan hadisədir. Ona görə də $x \leq 3$ olduqda $P(X < x)$ buradan isə alınır ki, $x \leq 3$ olduqda $F(x) = 0$

$3 < x \leq 4$ olduqda $X < x$ hadisəsi X-in 3-ə bərabər qiymət alması deməkdir.

Ona görə $3 < x \leq 4$ olarsa, $X < x$, $F(x) = P(X < x) = 2$ olar $3 < x \leq 4$ olduqda $X < x$ hadisəsi X-in $P = 0{,}2$ ehtimalı ilə 3-ə bərabər qiymət alması və X-in $P=0{,}1$ ehtimalı ilə 4-ə bərabər qiymət alması hadisələrinin cəmidir. Ona görə $4 < x \leq 7$ olarsa,

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$$

olar.

$7 < x \leq 10$ olarsa,

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 7)$$
$$= 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}7$$

olar.

Nəhayət, $x > 10$ olarsa, $F(x) = P(X < x) = 1$, $X < x$ yəqin hadisə olduğundan

$$F(x) = P(X < x) =$$
$$= (X = 3) + P(X = 4) + P(X = 7) + (X = 10) =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1$$

Beləliklə, verilmiş X təsadüfi kəmiyyətinin $F(x)$ paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}2 & 3 < x \leq 4 \\ 0{,}3 & 4 < x \leq 7 \\ 0{,}7 & 7 < x \leq 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$

şəklindədir.

6.5. Sıxlıq funksiyası və onun xassələri

Kəsilməz təsadüfü kəmiyyətin ehtimalının paylanması paylanma funksiyası vasitəsilə təyin edilir.Paylanma funksiyalarının quruluşu isə əsasən mürəkkəb və müxtəlifdir. Lakin elə kəsilməz təsadüfü kəmiyyətlər vardır ki, onların paylanma funksiyası, müəyyən xassəsi olan başqa bir $P(t) \geq (-\infty < t < \infty)$ funksiyası $F(x)= \int_{-\infty}^{x} P(t)dt$ kimi sadə şəkildə verilir.

Ehtimalın paylanması ilə əlaqədar olan məsələləri belə tasadüfü kəmiyyətlər vasitəsilə öyrənmək daha əlverişlədir.

Tərif: Paylanma funksiyası $F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(t)dt$ şəklində olan X təsadüfi kəmiyyətinə, mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət, $p(t) = px(t)$ funksiyasına isə onunehtimalının paylanma sıxlığı və ya sadəcə olaraq **sıxlıq funksiyası deyilir**.

Praktikada təsadüf olunan kəsilməz paylanma funksiyaları bir qayda olaraq $F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(t)dt$ şəklində göstərilə bilir, yəni mütləq kəsilməz funksiyalardır. Buna görə də mütləq kəsilməz təsadüfü kəmiyyətləri sadəcə olaraq kəsilməz təsadüfü kəmiyyətlər adlandırırlar.

Qayda: Paylanmanın sıxlığı paylanma funksiyasının törəməsidir.

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı kimi xassələri vardır:

1. $P(t) \geq 0, \quad -\infty \leq t \leq \infty.$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1$. Bu xassə $F(+\infty) = 1$ bərabərliyinin ödənilməsindən alınır.

3. $p(t)$ funksiyası $t = x$ nöqtəsində kəsilməz olduqda $F'(x) = p(t)$ bərabərliyi doğrudur. Əgər $x_1 < x_2$ olarsa onda

$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(t)dt$ olar. Doğrudanda

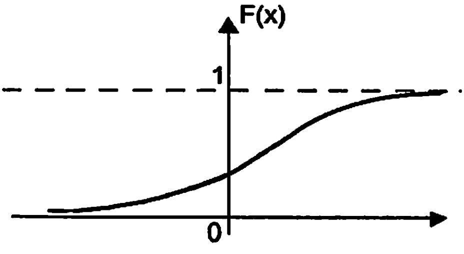
$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ olduğunda

$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} P(t)dt$ doğrudur.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyası verildikdə onun paylanma funksiyası $F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(t)dt$ bərabərliyi ilə tapılır.

Paylanma funksiyası isə təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanununu təyin edir. Buradan aydındır ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin ehtimalının paylanma qanunu onun sıxlıq funksiyasının verilməsi ilə tamamilə təyin olunur.

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(t)dt$ bərabərliyi ilə təyin olunan paylanma funksiyasının qrafiki aşağıdakı şəkildə göstərilən əyrilər şəklində olur.



Misal 4. Aşaıdakı sıxlıq funksiyası ilə verilmiş X kəmiyətinin $F(x)$ paylanma funksiyasını tapın:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ x - \dfrac{1}{3}, & 2 < x \leq 2 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

şəklində olduqda onun paylanma funksiyasını tapın.

Həlli:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

$x \le 21$ olduqda, $f(x) = 0$ olar yəni,

$\int_{-\infty}^{2} 0\, dx = 0$

$2 < x \le 3$ olduqda,

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{x} \left(t - \frac{1}{3}\right) dt = 0 + (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x) = = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}$

$x > 3$ olduqda

$F(x) = \int_{-\infty}^{2} 0\, dx + \int_{2}^{3} \left(t - \frac{1}{3}\right) dt + \int_{3}^{x} 0\, dx = 12{,}5 - \frac{3}{4} = \frac{47}{4} = 11\frac{3}{4}$

Onda axtarılan paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{3}x, & 2 < x \le 3 \\ 11\dfrac{3}{4}, & x > 3 \end{cases}$$

olar.

Misal 5. Aşağıdakı sıxlıq funksiyası ilə verilmiş X kəmiyyətinin $F(x)$ paylanma funksiyasını tapın:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ cosx, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Həlli:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -sinx, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

olar.

Misal 6. $W(x) = \frac{1}{4}\sin 2x$ ilə ifadə olunan X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$ intervalına düşmə ehtimalını tapın:

Həlli:

$$P = \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x d(2x) = \frac{1}{8}(cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{16}$$

6.6. Diskret təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları

Paylanma qanunu $P(X = x_i) = p_i$ düsturu ilə ifadə olunan X diskret təsadüfi kəmiyyətlərin ala bildiyi qiymətlərin necə paylandığını xarakterizə etmək üçün, bu kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarından istifadə olunur.

Diskret təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları aşagıdakılardır: **riyazi gözləmə, dispersiya, orta kvadratik meyl.**

1. Riyazi gözləmə:

Təsadüfi kəmiyyətlərin ən mühüm ədədi xarakteristikalarından biri **riyazi gözləmədir.** Diskret və kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün riyazi gözləmənin tərifi daha sadə şəkildə verilir.

Tutaq ki, diskret təsadüfi X kəmiyyətinin ala bildiyi x_1, x_2, ..., x_n, qiymətləri və bu qiymətlərə uyğun olan alınan P_1, P_2, ..., P_n, ehtimallar verilmişdir.

Tərif 1. x_1, x_2, ..., x_n, ... qiymətlərini uyğun olaraq $P_1, P_2, \dots, P_n$, ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi X kəmiyyəti üçün $\sum_{k=1}^{\infty} X_k P_k$ (1) ədədi sırası mütləq yığılan olduqda, onun cəminə X-in riyazi gözləməsi deyilir və $M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} X_k P_k$ kimi işarə olunur və yaxud $M(X) = x_1p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_np_n$.

Əgər, (1) sırası mütləq yığılan olmadıqda, deyirlər ki, X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi yoxdur.

Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinə onun **orta qiyməti** deyilir. Riyazi gözləmə təsadüfi kəmiyyətin elə orta qiymətini göstərir ki, onun ala bildiyi qiymətlər bunun ətrafında yerləşir.

Riyazi gözləmənin aşağıdakı xassələri vardır:

Xassə 1. Sabitin riyazi gözləməsi özünə bərabərdir:

$M[C] = C$; (C-ixtiyari sabitdir)

Xassə 2. Sabit vuruğu riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$M[CX] = CM[X]$;

Xassə 3. İki təsadüfi kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir: (x və y asılı olmayan təs. kəmiyyətdir)

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y].$$

Xassə 4. Iki təsadüfi kəmiyyətin fərqinin riyazi gözləməsi, onların riyazi gözləmələrinin fərqinə bərabərdir:

$$M[X-Y] = M[X] - M[Y]$$

Xassə 4. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin hasilinin riyazi gözləməsi, onların riyazi gözləmələrinin hasilinə bərabərdir:

$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$

Xassə 5. İstənilən X təsadüfi kəmiyyəti üçün

$|M[(X)]| \leq M[|X|]$

Misal 7: Aşağıdakı paylanma qanununa əsaən verilmiş X diskret təsadüfi kəmiyyətinriyazi gözləməsini tapın:

X	-4	6	10
П	0,2	0,3	0,5

Həlli: Tərifə əsasən:

$$M(X) = (-4 \cdot 0,2) + (6 \cdot 0,3) + (10 \cdot 0,5) = 6$$

Misal 8: X və Y təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmələri məlumdursa, onda Z təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapın: $Z = X + 2Y$; M(x)=5; M(Y)=3.

Həlli: (xassələrə uyğun)

$$M(Z) = M(X + Y) = M(X) + M(Y) =$$
$$= M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11$$

Binominal paylanmanın riyazi gözləməsi, sınaqların sayının bir sınaqda hadisənin baş verməsi ehtimalı hasilinə bərabərdir:

$$M[X] = np.$$

Təsadüfi kəmiyyətin bütün qiymətləri onun riyazi gözləməsi ətrafında yerləşir. Təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında necə səpələnməsi təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası adlanan kəmiyyətlə xarakterizə olunur.

2. Dispersiya

Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi, onun qiymətlərinin ədəd oxu üzərində yerləşmə xarakteristikalarından biridir. Yuxarıda dediyimiz kimi, təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri onun riyazi gözləməsi ətrafında qruplaşır. Lakin bu qiymətlərin riyazi gözləmə ətrafında necə paylanmasını və ya səpələnməsini çox zaman bilmək tələb olunur. Burada təsadüfi kəmiyyətin dispersiya və orta kvadratik meyl adlanan səpələnmə xarakteristikalarına baxılır. Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə bu kəmiyyətin **səpələnmə xarakteristikası** deyilir.

Tərif 2. X təsadüfi kəmiyyətinin $M[X]$ riyazi gözləməsi sonlu ədəd olduqda, $M = [(X - M(x)^2]$ ifadəsinə həmin X kəmiyyətinin dispersiyası deyilir və $D(X) = M[(X - M(x)^2]$ kimi yazılır (2).

Tərifdən aydındır ki, istənilən təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası mənfi olmayan ədəddir: $D(X) \geq 0$

Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək (2) ifadəsini aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$D(X) = M(X^2) - (M(x)^2)$

Dispersiyanın aşağıdakı xassələri vardır:

Xassə 1. $D[C] = 0$;

Xassə 2. $D[CX] = C^2 D[X]$;

Xassə 3. $D[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
$= D[X_1] + D[X_2] + \cdots + D[X_n]$;

Xassə 4. $D[X - Y] = D[X] + D[Y]$;

Xassə 5. $D[XY] = M[X^2]M[Y^2] - (M[X])^2(M[Y])^2$;

(X və U asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir).

Binominal paylanmanın dispersiyası sınaqların sayı ilə bir sınaqda hadisənin baş verməsi və verməməsi hasilinə bərabərdir:

$D[X] = n \cdot p \cdot q$

3. Orta kvadratik meyl:

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin riyazi gözləmə ətrafında səpələnməsinin xarakteristikalarından biri də **orta kvadratik** meyldir.

Tərif: X təsadüfi kəmiyyəti dispersiyasının kvadrat kökünə həmin kəmiyyətin orta kvadratik meyli deyilir və $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$ işarə edilir

Misal 9: X təsadüfi kəmiyyəti

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

paylanma qanunu ilə verilmişdir. X -in dispersiyasını tapın.

Həlli:

Dispersiyanı tapmaq üçün düsturdan istifadə edək:

$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$

Məlumdur ki,

$M[X] = (-5) \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$

İndi isə $M[X^2]$ -in tapaq. Bunun üçün X^2 -nın paylanma qanununu yazaq.

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Buradan riyazi gözləmənin tərifinə görə

$M[X^2] = 25 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3$

alırıq. Yuxarıda yazdığımız (2) düstura əsasən axtarılan dispersiyanı tapaq:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 =$$
$$= 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}3 - 0{,}09 = 15{,}21.$$

6.7. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalari

1. Riyazi gözləmə. $m_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xW[X]dx$
2. Dispersiya. $D_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2\, W[X]dx$
3. Orta kvadratik meyl (yayınma) $\sigma_x = \sqrt{D_x}$
4. Paylanma sıxlığının maksimum nöqtəsi kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin modasına uyğun gəlir.
5. KTK –in medianı: $\int_{-\infty}^{M_e} W(x)dx = \frac{1}{2}$

$P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}$

Misal 10: X kəsilməz təsadüfi kəmiyyəti $W(x)$ $2x - 1$ sıxlıq funksiyası ilə (0,1) intervalında verilmişdir. Bu kəmiyyətin riyazi gğzləməsini tapın: $M(x) =?$

həlli:

$$M = \int_a^b W(x)dx = \int_0^1 x \cdot (2x - 1)dx = \int_0^1 (2x^2 - x)dx =$$

$$= \frac{2x^2}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Misal 11: X kəsilməz təsadüfi kəmiyyəti $W(x) = 3x$ intervalında verilmişdir sıxlıq funksiyası ilə (1;2) intervalında verilmişdir. Bu kəmiyyətin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapın: $M(x) =?$; $D(X) =?$

Həlli:

$$M = \int_a^b x\, W(x)dx = \int_1^2 x \cdot 3xdx = \frac{3x^3}{3} \Big|_1^2 = 7$$

$$D(x) = \int_a^b [x - M(x)]^2\, W(x)dx =$$

$$= \int_1^2 [x - 7)]^2 3xdx = \int_1^2 (x^2 - 14x + 49)3xdx =$$

$$= \int_1^2 (x^2 - 14x + 49)3xdx = \int_1^2 (3x^2 - 42x^2 + 147x)dx =$$

$$= \frac{3x^3}{3} \Big|_1^2 - \frac{14x^3}{3} \Big|_1^2 + \frac{147x^2}{2} \Big|_1^2 = 133{,}75.$$

6.8. Normal paylanma

Normal paylanma terminini ehtimal nəzəriyyəsinə K. Pirson daxil etmihdir. X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2a^2}}, \ (-\infty < x < \infty) \quad \sigma > 0 \qquad (1)$$

şəklində olduqda, ona **normal qanunla və ya Qauss qanunu ilə paylanmış kəsilməz təsadüfi kəmiyyət** deyilir. α və σ ədədləri normal paylanmanın parametrləri adlanır.

Uyğun paylanma funksiyasına isə normal paylanma funksiyası deyilir və $F(x, \alpha\, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-a)^2}{2a^2}} dt$ olur.

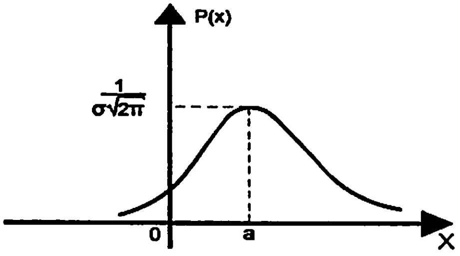
Burada $\alpha = 0$ və $\sigma = 1$ olarsa $F(x, 0; 1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} -\frac{t^2}{2} dt$ olar.

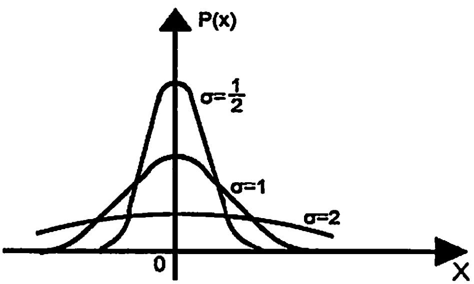
Bu funksiyalara uyğun olaraq standart normal sıxlıq və standart normal paylanma funksiyaları deyilir.

Normal paylanmanın aşağıdakı xassələri vardır:

1. normal paylanma əyrisi $x = \bar{x}$ nöqtəsinə nəzərən simmetrik olur;
2. normal paylanma $\bar{x}$ və σ parametrləri ilə tam təyin olunur;
3. normal paylanmanın moda və medianı eyni göstəricidir və riyazi gözləməyə bərabərdir.

Normal əyrinin forması σ parametrindən asılıdır. Normal əyri σ -nın azalması ilə ordinat oxuna sıxılaraq, onun boyunca yuxarı dartılır; σ -nın artması ilə isə absis oxuna sıxılaraq, onun boyunca genəlir.



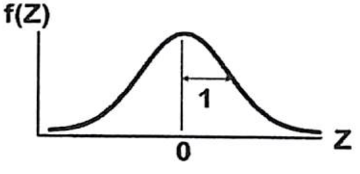


6.9. Standart Normal Paylanma

Hər hansı bir normal paylanmanı, **standart normal paylanmaya** çevirmək mümkündür (Z **paylanma**). Bunun üçün X dəyişəni üzrə Z dəyərini tapmaq lazımdır və X -ı Z ilə əvəz etməliyik.

Standart normal paylanmanın (Z) orta qiymәti 0-a, standart kәnarlaşması isә 1-ә bәrabәrdir. Normal paylanmanın standartlaşdırılması üçün X dәyişәni ilә orta qiymәtin fәrqini standart kәnarlaşmaya bölmәk lazımdır:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

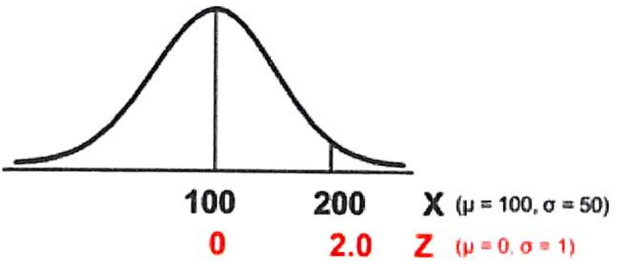


Şәkildәn dә gördüyümüz kimi, Z paylanmanın orta qiymәti 0-a, standart kәnarlaşması isә 1-ә bәrabәrdir. Orta qiymәtdәn yuxarıda (sağ) olan Z qiymәtlәri müsbәt, aşağıda (sol) olanlar isә mәnfidir.

Misal: orta qiymәti 100 manata, standart kәnarlaşması isә 50 manata bәrabәr olan normal paylanmada, X=200 manat üçün Z-nin qiymәti neçәdir?

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{200 - 100}{50} = 2.$$

Bu o demәkdir ki, x = 200 manat orta qiymәtdәn (100 manat) 2 standart kәnarlaşma sağdadır. Indi isә X vә Z – ni qiymәtlәrini paylanma üzәrindәn müqayisә edәk:



Gördüyümüz kimi, X və Z üzrə paylanma eynidir, sadəcə ölçü sistemləri fərqlidir. Yəni, biz paylanmada ölçüləri məsələdə verilmiş orta qiymət (100 man) və dəyişənlə (200) də verə bilərik, yaxud da bu göstəricilərin sandartlaşdırılmış Z qiymətini verə bilərik. Deməli,orta qiymət (0) bərabərdir, dəyişən isə (2) bərabərdir.

6.10. Empirik paylanmanın normallığının yoxlanması

Empirik paylanma sıxlığının qrafikini qurduqda, qurulan əyrini tədqiq etmək lazımdır, yəni aydınlaşdırmalıyıq ki, alınan paylanma Qaussun normal paylanma qanununa nə dərəcədə uyğundur.

Bu məqsədlə empirik paylanmanın assimetriya A və E əmsallarını hesablayaq.

Assimetriya əmsalı aşağıdakı düsturla hesablanır.

$A = \frac{\mu_3}{s^3}$ burada $\mu_3 = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{n}$ üç tərkibli mərkəzi empirik momentdir.

Bu əmsal göstərir ki, empirik paylanma orta qiymətdən nə qədər sola və ya sağa əyilib. Əgər $A = 0$, onda empirik paylanma orta qiymətə nisbətən simmetrikdir. Əgər $A \neq 0$ olarsa, onda $A < 0$ və ya $A > 0$ ola bilər.

$A < 0$ göstərirki, paylanma əyrisi sağ tərəfli simmetrikdir;

$A < 0$ isə göstərir ki, əyri sol tərəfli simmetrikdir.

Təsadüfi kəmiyyətin eksesası aşağıdakı düsturla təyin edilir.

$E = \frac{\mu_4}{S_x{}^4} - 3,$ burada $\mu_4 = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{n}$ dörd tərtibli mərkəzi empirik momentdir.

Əgər $E \neq 0$, onda $E < 0$ və ya $E > 0$ olar.

$E < 0$ olduqda , paylanma düztəpəli;

$E > 0$ olduqda, paylanma iti təpəli alınır

Əgər

$$\begin{cases} |A| \le \sigma_A \\ \left|E - \dfrac{6}{n+1}\right| \le 1{,}5\sigma_E \end{cases}$$

şərtləri yerinə yetirilirsə, onda seçmə paylanmanı təqribən normal hesab etmək olar. Burada σ_A və σ_A -assimetriya və eksesa əmsallarının orta kvadratik xətasıdır.
Onlar aşağıdakı düsturla hesablanırlar.

$$S_A = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}},\ S_E = \sqrt{\frac{24n\cdot(n-2)(n-3)}{(n+1)^2\cdot(n+3)(n+5)}}.$$

Əgər aşağıdakı bərabərsizliklərdən heç olmasa biri yerinə yetirilərsə:

$$|A| \ge 2\sigma_A \text{ və ya } \left|E - \frac{6}{n+1}\right| \ge 2\sigma_E.$$

Bu zaman paylanma heç vaxt normal ola bilməz.

Aşağıdakı tapşırıqları həll edin:

1. Riyazi gözləməni tapın.

X	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

2. X diskret təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylama qanunu ilə verilib. Dispersiyanı hesablayın.

X	-4	1	2	3	5
P	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

3. Aşağıdakı paylama qanunu ilə verilmiş X diskret təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləmə, dispersiya və ortakvadratik meylini hesablayın:

X	1	2	3	4	5	6	7
P	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7

4. $X[M] = 3,\ M[Y] = 4,\ Z = 2x + 5Y;\ X$ və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri məlumdursa, onda Z təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapın:

5. X təsadüfi kəmiyyəti $W(X) = x^2 + 1$ sıxlıq funksiyası ilə (1;2) intervalında verilmişdir. Bu kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapın:

6. X diskret təsadüfi kəmiyyəti paylanma qanunu ilə verilmişdir. $F(X)$ paylanma funksiyasını tapın

X	2	3	4	5	6
P	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

7. Torbada olan 6 kürədən 4-ü ağ rəngdədir. Təsadüfi olaraq 3 kürə götürülür. Götürülmüş 3 kürədən ağ olanların sayını göstərən X diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu yazın.

8. Qutuda 5 ağ, 3 qara kürəcik var. Təsadüfi olaraq bir kürəcik çıxarılır. X təsadüfi kəmiyyəti ağ kürəciyin sayını göstərirsə, X -in paylanma qanununu və paylanma funksiyasını qurun:

FƏSİL VII. RİYAZİ STATİSTİKANIN ELEMENTLƏRİ

7.1. Statistika haqqında ümumi anlayış

Ümumiyyətlə qeyd etmək olar ki, riyazi statistika məsələləri, ehtimal nəzəriyyəsi ilə bir vaxtda yaranaraq inkişaf etməyə başlamışdır.

Statistika termini latın sözü olan «status» - dan əmələ gəlmişdir ki, hərfi tərcüməsi hadisələrin vəziyyəti deməkdir.

Statistika terminindən ilk dəfə alman alimi, fəlsəfə və hüquq professoru Qotfrid Axenval (1719-1772) istifadə etmişdir. Hazırda statistika termini üç mənada işlədilir.

İlk növbədə statistika dedikdə adamların xüsusi praktiki fəaliyyət sahəsi başa düşülür. Hansı ki, bu fəaliyyət sosial-iqtisadi inkişaf səviyyəsini əks etdirən məlumatların toplanması, işlənməsi və təhlilinə istiqamətlənmişdir.

İkincisi, statistika təcrübəsində istifadə olunan nəzəri fikirlərin və metodların işlənməsi ilə məşğul olan elm sahəsi statistika adlandırılır.

Nəhayət, bəzən müxtəlif hesabatlarda əks etdirilən, dövri mətbuatda və külliyyatlarda (toplularda) dərc edilən statistik məlumatlar da statistika adlandırılır.

Statistika elmi ilə statistika təcrübəsi arasında sıx əlaqə mövcuddur. İstənilən statistik iş elmi cəhətdən təşkil olunmalıdır. Bunsuz düzgün nəticələr əldə etmək olmaz. Ona görə də statistika təcrübəsi elmə əsaslanmalıdır. Eyni zamanda statistika elmi özü də təcrübəyə əsaslanır, praktiki iş təcrübəsini ümumiləşdirir və aparılmış ümumiləşdirmələr əsasında yeni ideyalar irəli sürür. Öz növbəsində statistika elminin yeni nəzəri nəticələrinin təcrübədə tətbiqi onun inkişafına təkan verir.

Statistikanı öyrənməklə - nə qədər, nə zaman, necə, nə kimi və.s.suallarına cavab verilir. **Nə üçün statistikanı öyrənməliyik?**

Birincisi, statistika bizə dünya haqqında fikir formalaşdırılmasında kömək edir. Biz öz işlərimizdə statistik biliklərə malik olaraq daha effektli qərar verə bilərik.

İkincisi, statistika bizə ən uyğun biznes qərarlarının verilməsində kömək edir. Hər kəs qərar verə bilər. Lakin, verilən qərarlar doğru olmalıdır. Verilən qərarların da doğru olması üçün məlumatların toplanması, təhlili və nəticələrin cıxarılması üsulu və metodları öyrənilməlidir.

Qərar qəbul etmək üçün bizə ilk növbədə məlumatlar lazımdır. Əgər bizim əlimizdə kifayət qədər dəqiqi məlumat yoxdursa onda, biz doğru qərar verə bilmərik. Məlumatlar isə məlumat mənbələrdən toplanır.

Məsələn: Fərz edək ki, A- liseyində oxuyanlardan 120 şagird, B-Liseyində oxuyanlardan 100 şagird, C-liseyində oxuyanlardan isə 60 nəfər şagird arzu etdikləri Universitetə daxil olublar. Hansı Lisey daha etibarlıdır (başarılıdır) sualına cavab tapaq?.

Bizə verilən göstəricilərə görə A -Liseyi daha etibarlı (başarılıdır) sayılır.

Çünkü, A -Liseyində Universitetə daxil olanların sayı 120–dir. Bu göstərici digərlərinə görə coxdur. İndi isə əlavə statistik məlumat əldə edərək, imtahanda iştirak edən şagirdlərin sayını da göstərək:

Əldə edilən statistik məlumata görə, A -liseyində oxuyan 240 şagirddən 120-i, B -Liseyində oxuyan 160 şagirddən 100-ü və nəhayət C-liseyində oxuyan 80 şagirddən 60 nəfəri arzu etdikləri Universitetə daxil olublar. Statitik təhlili daha aydın görmək üçün aşağıdakı cədvələ nəzər salaq.

Liseylərin adı	imtahanda iştirak edənlər	qəbul olanlar	faiz %
A	240	120	50%
B	160	100	62,5%
C	80	60	75%

Statistik məlumatdan sonra məlum olur ki, C -liseyi daha etibarlıdır. Deməli, statistik biliklərə malik olaraq daha effektli qərar verə bilərik.

7.2. Riyazi statistika

Riyazi statistika - statistik müşahidələrin aparılması, statistik məlumatların toplanması, toplanmış məlumatların statistik təhlil edilməsi və məlumatların təhlili üsullarını öyrənən riyazi elmdir.

Deməli, kütləvi təsadüfi hadisələr üzərində aparılan müşahidələrin nəticəsini qeyd etmək ,onları qruplaşdırmaq və analiz etmək üsulları riyazi statistika elmində müəyyən edilir. Statistik rəqəmlərin ilkin işlənib nəticə çıxarıla bilən vəziyyətə gətirilməsinə statistik məlumat deyilir.

Statistik məlumatlar məlumat mənbələrindən toplanır.

Statistikada 4 əsas məlumat mənbəyi vardır.

1. Şəxs və təşkilat tərəfindən yayılan məlumatlar (informasiyalar).

Məsələn; televiziya, qəzetlər, jurnallar və.s.

2. Əvvelcədən qurulmuş plana əsasən aparılan eksperiment yolu ilə əldə edilən məlumatlar.

Məsələn: Hər hansı ölçmə apararaq müəyyən bir məlumata malik olmaq olar. (keyfiyyət haqqında və.s.)

3. Sorğu yolu ilə əldə edilən məlumatlar .

Məsələn: Hər hansı bir hadisə haqqında müəyyən bir fikirə sahib olmaq üçün insanlar arasında sorğu aparılır.

4. Müşahidə edərək toplanan məlumatlar. Bu prosesdə müşahidəçi yəni tədqiqatçı müşahidə əsasında qiymətləndirmə aparır.

Tərif: İctimai hadisələr haqqında kütləvi məlumatların toplanması prosesinə statistik müşahidə deyilir.

Statistik müşahidə, statistikanın mühüm metodlarından biridir.

Statistik müşahidə zamanı ölçmə əməliyyatı aparılır. Bu prosesdə müşahidəçi və tədqiqatçı müşahidə əsasında qiymətləndirmə aparır. Statistik tədqiqatın birinci mərhələsi statistik müşahidədir.

Tərif: Bir-birindən fərqlənən eyni keyfiyyət göstəricilərinin bir yerə toplanmasına statistik yığım (toplum) deyilir. Məsələn, ölkəmizdə eyni vaxtda doğulmuş uşaqları statistik yığımdır.

Tərif: Şəxsi müşahidələr əsasında toplanan yığıma empirik statistik yığımdeyilir.

Tərif: Statistik yığımların hər bir elementinə variant, variantların sayına isə statistik yığımın həcmi deyilir.

7.3. Statistikanın əsas məqsədi və vəzifəsi

Ümumiyyətlə eyni növlü obyektlərin yığımını keyfiyyət və kəmiyyət göstəricilərinə görə öyrənirlər. Hər hansı bir detalın keyfiyyət göstəricisi onun standartlığı, kəmiyyət göstəricisi isə detalın ölçüsüdür. Deməli hər hansı bir prosesi öyrənmək üçün, onu analiz etmək yəni təhlil etmək lazımdır.

Biz baş cəmi araşdırmaqla düzgün qərar verə bilərik. Lakin kifayət qədər böyük saylı yığım üzərində araşdırma aparmaq çətin olur, vaxt itgisinə səbəb olur. Bu cür problemi aradan qaldırmaq üçün, baş yığımdan nümunə olaraq seşmə bir yığım yaradılır. Numunədən alınan nəticələrdən faydalanaraq baş cəmin xüsusiyyətlərinə dair qiymətləndirmə aparılır.Bu seçmə cəm üzərində təhlil apararaq baş cəm haqqında bir fikir söyləmək olur.

Statistika, seçilmiş nümunə məlumatlardan istifadə edərək baş cəm və seçmə cəm haqqinda fikir söyləmək, ümumiləşdirmə aparma və təxmin irəli sürmə elmidir. Seçməni elə aparmaq lazımdır ki, ümumi yığım (baş cəm) haqqında çıxarılan nəticə düz olsun.(səhv olmasın)

Tərif: Seçmə üsulunda buraxılan səhvə **reprezentiv səhv** deyilir.

Statistikada əsasən 7 vacib termindən istifadə edilir.

1. Baş cəm(Ümumi Toplu): Qərar verə biləcəy iprosesla bağli bütün elementləri daxilində saxlayır. Nəticə əldə etmək istədiyimiz bütün çevrəni əhatə edir. Baş cəm böyük bir qrupdur.

Misal: Azərbaycanda sagirdlərin İQ səviyyəsi. Burada Azərbaycanda oxuyan bütün sağirdlər (şəhər, rayon, qəsəbə, kənd) baş cəmdir.(ümumi topludur)

2. Seçməcəm: təhlil üçün baş cəmdən (ümumi yığımdan) seçilmiş bir hissədir. Statıstıkada baş cəmi N, seçmə cəmi isə n - hərfi ilə işarəedirlər.

3. Dəyişən: əşyaların və şəxslərin xüsusiyyətini göstərir.

Məsələn: sinifdəki sağirdlərin yaşı, adı, cinsi, boy ölçüsü, çəkisi dəyişənlərdir.

4. Verilən: dəyişənlərin aldığı müxtəlif qiymətlərdir.

Məsələn: bir öncəki misalda şagirdlərin çəkisini götürək. Fərz edək ki, sağirdlərin çəkilıri 36; 34.5; 40; 41,5; 35; 39. (kq) və.s.-dir. Bu rəqəmlər verilənlər adlanır. Gördüyümüz kimi, bir dəyişən birdən çox qimət alır.

5. İstifadə mənası: əgər, dəyişənin istifadə mənası yoxdursa dəyişənlərin aldığı bütün qiymətlər mənasızdır.

Misal: sagirdlərin çəkisi dedikdə əgər, bir təhlilçi bunu məktəbin bütün sağirdlərinin çəkisi olaraq, digər bir təhlilçi isə yalnız məktəbdə olan 7-ci sinif şagirdlərinin çəkisi olaraq düşünərsə deməli dəyişənin istifadə mənası düz deyildir. Dəyişənin adı eləolmalıdırki, hər bir təhlilçi tərəfindən aydın başa düşülən olsun.

6. Parametrlər: Baş cəmin təhlili nəticəsində əldə edilən göstəricilərdir.

7. **Statistiklər:** seçmənin təhlili nəticəsində əldə edilən göstəricilərdir.

Misal:Məsələn hər hansı bir regyondakı bütün seçicilərdən danışılarsa bu **baş cəmdir** (populyasiya), seçicilərin sayı **parametrlər,** bu seçicilərin içərisindən seçilən 30 – 40 yaşlı seçicilərin sayı isə **seçmədir** (nümunə).

Statistik təhlil 2 növə ayrılır

1.Təsviri statistik üsul

2.Təhlili statistik üsul

Təsviri statistik üsul: verilən məlumatların toplanması, cədvəl və qrafiklə təsvir olunması, bu məlumatlar üçün orta və dağılma (variasiya) ölçülərin hesablanaraq yekun qərar verilməsindən ibarətdir.

Məqsədi – Qrafik və ədədi üsullarla məlumatı təsvir etməkdir.

Təhlili statistik üsul:(ümumiləşdirici statistika): Baş cəmdən (Ümumi yığım) seçilən nümunədən yəni, seçmə cəmdən alınan nəticələr əsasında baş cəm haqqında müəyyən qənaətə gəlmək üçün istifadə olunan

FƏSİL VIII. Təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi xarakteristikaları

8.1.Yerləşmə xarakteristikaları

Ədədi orta kəmiyyət (orta qiymət), moda, median

Təsadüfü kəmiyyətlərin ehtimalının paylanma qanunu onun tam xarakteristikası olduğu məlumdur.Lakin bəzən ehtimalın paylanma qanunu məlum olmur. Təsadüfükəmiyyətin müəyyən ehtimal xassələrini nisbətən sadə məlumatlar vasitəsi iləöyrənmək lazım gəlir.Təsadüfü kəmiyyətin belə sadə xassələri, onun ədədi xarakteristikaları adlanır. Təsadüfü kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları onu müəyyən dəqiqliklə kəmiyyətcə xarakterizə edir.Təsadüfü kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərin ədəd oxunda necə paylandığını xarakterizə etmək üçün müxtəlif ədədi xarakteristikalardan ədədi orta ,orta kvadratikmeyl, dispersiya , moda, median və s. istifadə olunur. Ədədi xarakteristikaları iki növə ayırırlar.

Yerləşmə və səpələnmə xarakteristikalar.

Tərif 1. Təsadüfü kəmiyyətin yerləşmə xarakteristikası elə sabitə deyilir ki, bu kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri həmin sabit ətrafında qruplaşmış olsun. ədədi orta, moda və median ən çox istifadə olunan yerləşmə xarakteristikalarıdır.

Yerləşmə xarakteristikaları aşağıdakılardır

1. **ədədi orta kəmiyyət(orta qiymət),**
2. **moda**
3. **median**

I. Ədədi orta kəmiyyət

Qeyd edək ki, yerləşmə xarakteristikaların içərisində ən cox istifadə edilənəni ədədi ortadır. Ədədi ortanı - $\bar{X}$ işarə edirlər. Fərz edək ki, bir -birilərindən fərqli olan $x_1, x_1, x_{2,\dots,} x_n,$ variantları verilmişdir. Variantların ədədi ortasını (orta qiymətini) aşağıdakı düstürla hesablayırlar. Yəni, verilən varianların cəmini $(\sum)$ variantların sayına bölmək lazımdır.

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad (1)$$

Tərif 2: Verilən variantların cəminin həmin variantların sayına bölünməsi ədədi orta adlanır(orta qiymət).

Misal 1: Fərz edək ki,ölçmə zaman aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

X: 5, 7, 9, 11, 13, və 15 bu nəticələrin ədədi ortasını tapaq: (n = 6) (1) düsturuna əsasən $\bar{X} = \frac{5+7+9+11+13+15}{6} = \frac{60}{6} = 10$ olar.

Tərif 3: Əgərvariantların qiyməti tezliklərlə verilərsə (n_1) onda təyin olunan ədədi orta kəmiyyət qruplaşdırılmış (nizamlanmış) orta kəmiyyət adlanır.

Qruplaşdırılmış göstəricilər üçün isə orta kəmiyyət aşagıdakı düsturla hesablanılır.

$$\bar{X} = \frac{n_1 . x_1 + n_2 . x_2 + \cdots n_i . x_i}{n} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n} \quad (2)$$

Burada i-qruplaşdırılan variantların sayı, n_i intervalların mütləq tezliyidir.

Misal 2: Aşağıdakı cədvəldə verilən göstəricilırin ədədi ortasını tapaq: $n = 60$

X_i: 1, 3, 6, 26

n_i 8, 40, 10, 2

$n = 8 + 40 + 10 + 2 = 60$

Həlli:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n} = \frac{(1 \cdot 8) + (3 \cdot 40) + (6 \cdot 10) + (26 \cdot 2)}{60} = \frac{240}{60} = 4$$

2. Moda

Tərif: Öyrənilən hadisədə ən çox təsadüf edilən varianta ***moda*** deyilir və M_0 ilə işarə edilir. Başqa sözlə, **moda** verilənlər çoxluğunda ən çox təkrarlanan veriləndir. Moda həm kəmiyyət həm də keyfiyyət verilənləri üzrə olur.Verilənlər çoxluğunda moda heç olmaya bilər və əksinə, bir yığımda birdən çox mod ola bilər.

Təcrübə zamanı məlum olur ki, modanın qiyməti təxminən orta qiymətə bərabərdir.

Misal 3: X_i: 7, 8, 9, 13, 15, 15, 15, 16, 43 verilir.

Mo = 15

İntervallı variasiya sırası üçün Moda aşağıdaki düsturla hesaplanır.

$$M_0 = m_0 + K\frac{m_2 - m_1}{(m_2 - m_1)(m_2 - m_3)} \quad (3)$$

Burada m_0 – moda intervalınınqarşısındakı ilk rəqəm, K - intervalın uzunluğu, m_2-intervalın modası (tezlikdəkimoda), m_1 - moda intervalından bir interval yuxarıdakı tezliyi, m_3 isə moda intervalından bir interval aşağıdaki tezliyi göstəriri.

Misal 4: Fərz edək ki sınaqdan keçirilənlər aşağıdaki cədvəldəverilib.

Intervallar - K	nəticənin tezliyi m_i	tezliklərin cəmi $\sum m_i$
5-----6	30	30
6------7	70	100
7------8	80	180
8------9	85	265
9-----10	65	330
10----11	60	390
11----12	10	400

Burada moda intervalı 9 – 8 =1

(ən çox təkrarlanan sınaq 85-dir,onu qarşısındakı interval 8-9 dur)

$m = 8$ (modanın intervalındakı ilk rəqəm)

$k = 1, \ m_1 = 80, \ m_2 = 85, \ m_3 = 65$ (85-dən aşagıdakı sınaq) olduğundan

$M_0 = 8 + 1\left(\frac{85-80}{(85-80)(85-65)}\right) = 8{,}2$ olar.

Modanı

$$M_0 = 1_a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \cdot h \qquad (4)$$

düsturunun köməyi ilə də hesablamaq olar.

(1_a – modanın intervalındakı ilk rəqəmdir)

Misal 5: Aşağıdakı cədvələ uyğun modanın intervalının (sinifinin) qiymətini tapın:

intervallar - K	nəticənin tezliyi m_i
10----20	10
20----30	30
30----40	50
40----50	20
50----60	20
60----70	20
70----80	10

Həlli:

Ən çox təkrarlanan interval 3-cü sırada duran 30-40 =50-dir

1) $\Delta_1 = 50-30 = 20$
2) $\Delta_2 = 50-20 = 30$
3) $M_0 = 1_a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \cdot h = 30 + \frac{20}{20+30} \cdot 10 = 34$
4) $M_0 = 34$

3. Median

Median latın sözü olub ***medius*** sözündən götürülmüş və ortadakı kəmiyyət deməkdir.

Tərif: Median statistikada elə bir orta kəmiyyətin qiymətinə deyilir ki, variasiya sırasının tən ortasında yerləşərək, sıranı artan və azalan istiqamətdə iki bərabər hissəyə bölsün.

Median - M_e kimi işarə olunur.

Başqa sözlə, **Median** -kiçikdən böyüyə doğru düzülmüş sırada ortada duran rəqəmdir (rəqəmlərin 50%-i mediandan sağda, 50%-i isə solda olur).

Əgər sıralanmış rəqəmlərin sayı təkdirsə median ortada duran tək rəqəmdir. Yox əgər, sıralanmış rəqəmlərin sayı cütdürsə onda, median ortada duran iki rəqəmlərin cəminin yarısına bərabərdir.

Medianın tutduğu mövqe yalnız medianın sırada neçənci rəqəm olduğunu göstərir. Bu medianın yalnız sıra nömrəsidir, onun aldığı qiymət deyil.

Misal 6: X_i: 11; 13; 15; 15; 25; ($n = 5$)

$M_e = 15$

Misal 7: X_i: 10; 13 ; 15 ; 19; 25; 30 (n = 6)

$$M_o = \frac{15+19}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Əgər intervallı variasiya sırasında medianı tapmaq tələb olinarsa, onda bu medianın daxil olduğu intervalı tapılır və medianlı intervalın aşağı sərhəddi olan $X_{\min}$ və yuxarı sərhəddi olan $X_{\max}$ qeyd edilərək intervallı medianın uzunluğu tapılır

$$K = X_{med.max} - X_{med.min} \qquad M_e = X_{med...min} + K \cdot \frac{0{,}5\,\Sigma mi}{mMe} - S_{me+1}$$

Bunları aydınlaşdırmaq üçün aşagıdakı misala nəzər yetirək.

Misal 8: Cədvəldə verilmiş variasiya sırasındakı medianı tapın:

(misal 4-ə nəzər sal)

Intervallar **K**	nəticələrin tezliyi **m**$_i$	nəticələrin cəmi $\sum$ **mi**
5------6	30	30
6------7	70	100
7------8	80	180
8------9	85	265
9-----10	65	330
10----11	60	390
11----12	10	400

$k = 1$

$X_{\text{med...min}} = 8$

$\sum m_i = 400;$

$S_{me+1} = 80$ (80 rəqəmi 85-dən yuxarıda duran ilk ədəddir),

$mMe = 85$ olduğundan, intervallı median düsturundan

$M_e = X_{med.min} + K\frac{0{,}5\,\Sigma mi}{mMe} - S_{me+1}$

$M_e = 8 + 1\frac{0{,}5.400}{85} - 80 = 9{,}41$ alarıq.

Qeyd: Həndəsi orta kəmiyyət.

$\overline{X} = (x_1.x_2 \dots .x_n)^{\frac{1}{n}}$ və yaxud

$\bar{X}_{h\cdot o} = \sqrt[n]{(x_1.x_2 \dots .x_n)}$ əgər variantlar tezliklərlə verilərsə onda,

$\bar{X}_{h\cdot o} = \sqrt[n]{(x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots x_k^{n_k})}$ olar.

8.2. Səpələnmə xarakteristikaları

Qeyd etdiyimiz kimi, təsadüfü kəmiyyətin mümkün qiymətləri onun orta kəmiyyəti (qiyməti) ətrafında qruplaşır. Lakin bu qiymətlərin orta qiymət ətrafında necə paylanmasını və ya səpələnməsini çox zaman bilmək tələb olunur. Bunun üşün səpələnmə xarakteristikalarından istifadə olunur.

Tərif 1: Təsadüfü kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun orta kəmiyyəti ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə bu kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikası deyilir.

Bu xarakteristikalara paylanmanın genişliyi, dispersiya, orta kvadratik meyl və variasiya əmsalı aiddir.

Səpələnmə xarakteristikaları aşağıdakılardır:

1. Paylanma genişliyi (variasiy genişliyi)
2. Dispersiya
3. Standart meyl (kənarlaşma)
4. Variasiya əmsalı (kənarlaşma əmsalı)

Paylanma genişliyi: (variasiya genişliyi)

Tərif: Seçmənin ən böyük elementi ilə ən kiçik elementi arasındakı fərqə seçmənin variasiya genişliyi (paylanma genişliyi) deyilir.

Paylanma genişliyini (R) ilə işarə etsək, aşagıdakı düsturla hesablanır.

$$R = X_{\max} - X_{\min} \tag{1}$$

Misal : X_i: 5, 7, 12, 15, 19, 28, 40 verilir. Paylanma genişliyini tapaq:

Həlli:

$R = X_{\max} - X_{\min} = 40 - 5 = 35$ olar.

Dispersiya: Dəyişənin onun orta qiymətindən dağılma (səpələnmə, kənarlaşma) ölçüsüdür. Dispersiya yunan hərfinin kiçik siqma kvadratı σ^2 və yaxud D ilə işarə olunur və variantlar təkrara malik olmadıqda aşağıdakı düsturla hesablanır:

(baş cəm üçün)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} \text{ və yaxud } D = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} \tag{2}$$

Qruplaşdırılmış göstəricilər üçün isə $D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$ olar.

Əgər verilmiş variantların sayı 30 –dan kicik olarsa onda dispersiyanı

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} \text{ və yaxud } D = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1} \tag{3}$$

düsturu ilə hesablayırlar (3).

Yəni, seçmə cəm üçün dispersiya (3) düsturu ilə baş cəm üçün isə (2) düsturu ilə hesablanır.

Standart meyl (kənarlaşma): Dispersiyanın kvadrat kökü dəyişənin standart meylinə (kənarlaşmasına) bərabərdir və siqma ilə işarə olunur.

$$\sigma = \sqrt{D} \quad \text{və yaxud} \quad \sigma = \sqrt{D^2} = \sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n}} \tag{4}$$

Seçmənin standart meyli aşağıda qeyd edilmiş 5 addımı izləməklə hesablanır.

1. Hər verilənlə seçmənin orta qiyməti arasındakı fərqlər hesablanır
2. Alınmış fərqlər kvadrata yüksəldilir
3. Kvadrata yüksəldilmiş fərqlər toplanılır
4. Alınmış cəm "$n-1$"- ə bölünərək seçmə dispersiyası tapılır. Buradakı "n" seçmə sayıdır.
5. Dispersiyanın kvadrat kökü alınaraq standart yayınma tapılır.

Statistik təhlilə görə standar meylin kiçikliyi daha məqsədə uyğundur.

Variasiya əmsalı (kənarlaşma əmsalı) :

Eyni paylanmaya sahib olan çoxluqlar arasında müqayisə aparmaqda istifadə edilən ən effektiv vasitədir və V hərfi ilə işarə edilir.

Variasiya əmsalı nisbi kəmiyyətdir, orta kvadratik meylin orta qiymətə olan nisbəti kimi ifadə edilir və aşagıdakı düsturla hesablanır.

$$V = \frac{\sigma}{\overline{X}} \cdot 100\% \qquad (5)$$

Başqa sözlə, variasiya əmsalı orta kvadratik meyl ilə hesabı orta kəmiyyət arasındakı nisbəti göstərir və faizlə ifadə edilir.

Bu faiz nə qədər kiçik olarsa, hesablanmış orta kəmiyyət yığımı, bir o qədər yaxşı xarakterizə edər. Variasiya əmsalın kiçikliyi öyrənilən yığımın (seçmənin) bircinsliyini (eyni cinsliyini) göstərir, böyüklüyü isə yığımın (seçmənin) müxtəlifliyini göstərir.

8.3. Verilənlərin paylanma formaları.

Verilənlərin orta qiymətə nəzərən hansı istiqamətdə yerləşdiklərini ölçmək üçün Z skordan (qiymətləndirmə şkalası) istifadə edilir. Z skorun -3 və +3 arasında qiymət alması verilənlərin normal paylanması mənasına gəlir. Aşağıdakı düstur ilə hesablanır:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$$

burada X -verilən, $\bar{X}$-seçmənin orta qiyməti, S isə standart meyldir.

Misal 10: Fərz edək ki, riyaziyyat dərsi üzrə ortalama imtahan balı 490, standart meyl isə 100-dür. Nəticəsi 620 olan testin Z qiymətini (skorunu) hesablayın.

Həlli:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} = \frac{620 - 490}{100} = \frac{130}{100} = 1{,}3$$

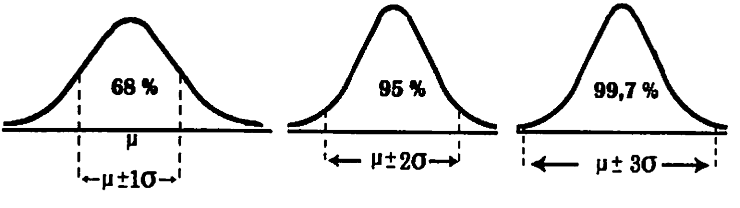
Nəticəsi 620 olan testin orta kəmiyyətdən yayınması 1.3- dür.

-3 0 1,3 +3

Buradakı 1,3 göstəricisi (-3; +3) arasında olduğu üçün 620 bal normal verilən gəbul edilir.

Qeyd: Empirik qanunauyğunluqlar təcrübə, müşahidə və sınaqlar əsasında özünü doğrultmuşdur. Empirik qanunauyğunluqlar zəng formada paylanmış verilənlərin yayınmasını təxmin edir. Empirik qanunauyğunluğa görə zəng formada paylanmış verilənlərin:

1) 68% verilən orta qiymətindən 1 standart kənarlaşma ilə yayınır.
2) 95% verilən orta qiymətindən 2 standart kənarlaşma ilə yayınır.
3) 99.7% verilən orta qiymətindən 3 standart kənarlaşma ilə yayınır.



Məsələn: riyaziyyat fənni üzrə keçirilmiş imtahan nəticələrinin orta qiyməti 500, standart kənarlaşması isə 90-a bərabərdir. Yuxarıdakı qanunauyğunluğa görə deyə bilərik ki tələbələrin:

68%-nin imtahan nəticəsi 410 və 590 arasındadır (500 ± 90).

95%-nin imtahan nəticəsi 320 və 680 arasındadır (500 ± 180).

99.7%-nin imtahan nəticəsi 230 və 770 arasındadır (500± 270).

Variasiya göstəricilərinin hesablanmasını misal əsasında izah edək:

Misal 1: Atletlər məşq zamanı 60 m məsafəni qaçaraq aşağıdakı nəticələri göstərmişlər:

X_i: 8,2; 8,5; 7.9; 7,8; 8,2; 8,1; 7,6; 8,3; 8,2; 7,8

Həlli:

Hesablamaları asanlaşdırmaq məqsədi ilə cədvəl quraq

№	x_i	$x_i - \bar{x}$	$x_i{}^2$
1.	8,2	0,14	0,0196
2.	8,5	0,44	0,1936
3.	7,9	–0,16	0,0256
4.	7,8	–0,26	0,0676
5.	8,2	0,14	0,0196
6.	8,1	0,04	0,0016
7.	7,6	0,46	0,2116
8.	8,3	0,24	0,0576
9.	8,2	0,14	0,0196
10.	7,8	0,26	0,0676
n-10	$\sum x_i = 80{,}6$	---	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0{,}684$

Həlli:

1. Verilən nəticələr üçün modanı tapaq: (Ən çox təkrarlanan)

$M_o = 8{,}2$

2. Medianı təyin edək: Medianı tapmaq üçün göstərilən nəticələri ən kiçikdən başlayaraq artma qaydasında düzək.

X_i: 7,6; 7,8; 7,8; 7,9; 8,1; 8,2; 8,2; 8,2; 8,3; 8,5

$$M_e = \frac{8,1 + 8,2}{2} = 8,15$$

3. Ədədi ortanı hesablayaq: $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{80,6}{10} = 8,10$

4. Paylanmanın genişliyini təyin edək: $R = 8,5 - 7,6 = 0,6$

5. Dispersiyanı hesablayaq: $D = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{0,684}{9} = 0,6$

6. Standart meyli (yayınma) tapaq; $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{0,076} = 0,27$

7. Variasiya əmsalını təyin edək: $V = \frac{\sigma}{\overline{X}} \cdot 100\% = \frac{0,27}{8,06} = 3,4\%$

Nəticə: Dispersiyanın kiçikliyi qaçış nəticələrinin sıxlığını və nəticələrin bir-birindən çox az fərqli olduğunu göstərir. Hesablamalar göstərir ki, yüngül atletlərin fiziki hazırlığı eyni səviyyəlidir.

Misal 2. Fərz edək ki, iki rayonun fermerləri tərəfindən kartof əkinlərinih hər hektarından aşağıdakı miqdarda kartof götürülmüşdür.

I-ci rayon Fermerlər	hektardan məhsuldarlıq (S)	II-ci rayon Fermerlər	hektardan məhsuldarlıq (S)
1	150	1	124
2	140	2	121
3	129	3	118
4	125	4	115
5	113	5	114
6	108	6	112
7	105	7	110
8	100	8	106
9	90	9	101
10	60	10	99

Buradan orta məhsuldarlıq: (məhsulun ədədi orta kəmiyyəti)

I rayon üçün (s) : $\bar{x} = 112$

II rayon üçün(s): $\bar{x} = 112$

Hər iki rayonda məhsuldarlığın eyni olmasına baxmayaraq, ayrı-ayrı fermer təsərrüfatlarında əlamətin tərəddüd dərəcəsi müxtəlifdir:

I rayonda: $R = 150 = 60 = 90$ s.

II rayonda: $R = 124 - 99 = 25$ s.

birinci rayon üçün: $D = \frac{6084}{9} = 676$

ikinci rayon üçün: $D = \frac{604}{9} = 67,1$

I rayonda: $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{676} = 26$ s

II rayonda: $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{67,1} = 8,19$ s

I rayonda: $V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{26}{112}.100 = 23,2\%$

II rayonda: $V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{8,19}{112}.100 = 7,3\%$

Hesablamalar göstərir ki, 1- ci rayona nisbətən 2- ci rayonda məhsuldarlıq səviyyəsi təsərrüfatlar üzrə bir – birindən az fərqlənir. (7,3% < 23,2%)

Yəni, II rayonun məhsuldarlıq səviyyəsi daha yüksəkdir. Çünkü, dispersiyanın və variasiyanın kiçikliyi daha məqsədə uyğundur.

Aşağıda verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi xarakteristikalarını hesablayın:

1. Minimal arterial təzyiqin ölçülməsi zamanı alınan nəticələr aşağıda verilmlşdir. Bu nəticələr ücün statistik xarakteristikaları hesablayın. Məşqdən əvvəl aparılan test nəticələri - X_i-lə işarə edilib.
X_i :72; 65 ; 60; 77; 79: 68; 82; 80; 64; 67

2. ÜDT-göstəricilərinin qiyməti məşqdən əvvəl qeydə alınmışdır. Bu göstəricilərə uyğun statistik xarakteristikaları hesablayın.
X_i: 159; 154; 165; 156; 158; 160; 163; 161; 158; 157

3. ÜDT-göstəricilərinin qiyməti məşqdən sonra qeydə alınmışdır. Bu nəticələrə görə statistik xarakteristikaları hesablayın.
X_i : 158; 156; 170; 174; 173; 169; 171; 172; 169; 175

4. Yüngül atletlər uzunluğa tullanmada aşağıdakı nəticələri göstəriblər:
X_i: 7,2; 7,3; 7,2; 6,9; 6,8; 7,8; 7,9; 7; 7,5; 8,5
Bu nəticələr üşün yerləşmə və səpələnmə xarakteristikaları hesablayın:

5. Yadro itələmədə idmançılar aşağıdakı nəticələri əldə etmişdilər:
X_i: 18,2; 18,1; 19; 17,9; 18,9; 19,5; 18; 19,5; 20; 17,8
Nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

6. İdmançının güc yükünün maksimal arterial təzyiqi məşqdən sonra ölçülmüşdür. Bu nəticələrə görə statistik xarakteristikaları hesablayın.
X_i : 140; 150; 125; 165; 140; 180; 168; 145; 148; 145

7. Eksperimental qrupda qumbaranın uzağa atma nəticələri verilib. Nəticələr məşqdən əvvəl qeyd olunub.
Bu nəticələrə görə statistik xarakteristikaları hesablayın.
X_i: 50; 43; 40; 41; 38; 39; 41; 44; 52; 50

8. Eksperimental qrupda qumbaranın uzağa atma nəticələri verilib. Nəticələr məşqdən sonra qeyd olunub. Statistik xarakteristikaları hesablayın.
X: 49; 42,3; 41; 37; 36,4; 35,7; 56; 40; 52; 52

FƏSİL IX. Empirik paylanma və onun həndəsi təsviri

9.1. Təcrübi göstəricilərin cədvəl şəklində təsviri

Böyük həcmli verilənlər bazası üzərində operativ şəkildə işləyərək nəticə əldə etmək istəyiriksə, bu mərhələləri izləməliyik:

Müəyyənləşdirmək – ilk olaraq təhlil üçün lazım olan dəyişənlər müəyyən edilməlidir.

Nəticələri toplamaq – təhlil üçün lazım olan verilənlər uyğun bazalardan toplanmalıdır.

Cədvəl və qrafiklərin hazırlanması – bu pillədə toplanmış verilənlərin daha asan təhlil edilməsi üçün cədvəllər və qrafiklər hazırlanır.

Təhlil etmək – hazırlanmış cədvəllər və qrafiklərdən istifadə edərək nəticə əldə edilir.

9.2. Statistik paylanma. Variasiya sırası

Statistikada müşahidə olunan variantlar və onların tezlikləri və yaxud variantlarla onların nisbi tezlikləri verildikdə statistik paylanma qanunu verilmiş olur. Statistik paylanmada müxtəlif qrafiki təsvirindən istifadə edilir. Həmin qrafiki təsvir üsullarına poliqon, histoqram və kumulyata auddir.

Tutaq ki, ümumi yığımdan seşmə aparılmışdır və bu seçmədə x_1 variantı n_1 dəfə, x_2 variantı n_2 dəfə, və.s. və x_k variantı isə n_k dəfə müşahidə olunmuşdur.

Ümumiyyətlə statistik paylanma aşağıdak ı şəklində yazılır:

X_i	x_1 , $x_{2,}$ ....,x_k
n_i	n_1 , $n_{2,}$ ....,n_k

Tərif: Variasiya sirasi ikiqat ədədlər sirasi olub, öyrənilən əlamətin ədədi qiymətləri ilə onlarin seçmədə təkrar olunma dərəcəsi arasindaki asıllığı əks etdirir.

Əsas variasiya sıraları 3 növdə olur.

a) sadə düzülmüş; b) diskret düzülüş; c) intervallı düzülüş.

I. Sadə sıra - hər varianta yalnız bir dəfə rast gəlinərsə, sıra sadə düzülmüş variasiya adlanır.

Məsələn: 6 atletlərdə start reaksiyasının qiyməti (san)

№	x_i	n_i
1	1,25	1
2	1,30	1
3	1,32	1
4	1,36	1
5	1,38	1
6	1,40	1

II. Diskret sıra: Burada hər variantdan bir neçə dəfə müşahidə oluna bilər.

Yəni variantlarda təkrarlanmalar mövcuddur.

Məsələn: 43 atletlərdə start reaksiyasının qiyməti (san)

№	x_i	n_i
1	1,25	3
2	1,30	5
3	1,32	6
4	1,36	9
5	1,38	8
6	1,40	5
7	1,42	4
8	1,45	3

III. İntervallı sıra – burada hər bir sətirdəki variantlar interval şəklində ifadə olunur. İntervalın ölçüsü könüllü seçilə bilər: interval nə qədər böyük olsa, ilkin məlumatı təqdim edən sıranın göstəriciləri daha az dəqiqdir. Bir qayda olaraq, interval sırası diskret və ya sadə düzlənmiş sıranın dəyişdirilməsi yolu ilə alınır. Yəni,

№	x_i	n_i
1	1,25..........1,30	8
2	1,30..........1,35	6
3	1,32...........1,40	22
4	1,40............1,45	7
Yekun	-	43

Bu cür düzülüş üçün birinci sətrə variantın ilk həddiniqeyd edib, 0,05 intervalını əlavə etmək lazımdır ki, intervalın yuxarı həddi 1,30 alınsın. Sonra alınmış rəqəmə ardıcıl olaraq intervalın qiyməti əlavə edilir. Bu proses o vaxta kimi davam edir ki, son varian tamamlansın.

Mütləq və nisbi tezliklər

Tərif 1: n- lərə x_i –lərin müşahidə tezliyi deyilir.

Tərif 2: $Wi = \frac{n_i}{n}$ nisbətinə nisbi tezlik deyilir.

Məsələ: Fərz edək ki, 60 əşyanın çəkisi verilib.

53, 57, 51, 52, 54, 49, 54, 50, 51, 52, 52, 50, 52, 50, 53, 54, 49, 49, 53, 52, 53, 55, 52, 57, 52, 50, 52, 52, 53, 50, 52, 55, 51 , 53, 52, 51, 55, 53, 49, 51, 55, 51, 54, 51, 52, 49, 49, 50, 56, 53, 55, 54, 56, 56, 54 , 53, 52, 51, 50, 53

Tezliyə görə paylanma qanunu yazaq.

X_i	49	50	51	52	53	54	55	56	57
n_i	6	7	8	13	10	6	5	3	2

$\sum n_i = 6+7+8+13+10+6+5+3+2 = 60$

Cədvəldən istifadə edərək nisbi tezlikləri hesablayaq.

$W_1 = 6/60 = 0{,}1$; $W_2 = 7/60 = 0{,}12$; $W_3 = 8/60 = 0{,}13$;
$W_4 = 13/60 = 0{,}21$; $W_5 = 10/60 = 0{,}17$; $W_6 = 6/60 = 0{,}1$;
$W_7 = 5/60 = 0{,}08$; $W_8 = 3/60 = 0{,}05$; $W_9 = 2/60 = 0{,}03$

Nisbi tezliyə uyğun paylanmanı qeyd edək:

X_i	49	50	51	52	53	54	55	56	57
W_i	0,1	0,12	0,13	0,21	0,17	0,1	0,08	0,05	0,03

$\sum W_i = 0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}13 + 0{,}21 + 0{,}17 + 0{,}1 + 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}03 = 1$
olar

9.3.Tezlik üzrə paylanma (qruplaşdırma)

Tezlik paylanması cədvəldir, bu cədvəldə sol sütunda intervallar sağ sütunda isə bu intervallara duşən ədədlərin tezliyi (sayı) gostərilir.

Tezlik paylanması məlumatın qaydaya salınması üçün bir üsuldur. Paylanma işlənməmiş formada olan məlumatı istifadəyə yararlı hala salır və məlumatın surətli vizual təqdim olunmasına imkan verir.

Tezlik üzrə qruplaşdırmaq üçün aşağıdakı mərhələlər yerinə yetirməlidir.

1. **Sıralama:** Burada verilənlər kiçikdən böyüyə doğru sıralanır.

2. **İntervallar və onların sərhədləri:** Burada verilənlər üzrə intervalların sayı müəyyənləşdirilir .İntervalların hüdudlarının üst-üstə düşməməsinə diqqət yetirmək lazımdır. İntervalların sayı verilənlərin həcmindən asılıdır. İntervalların sayı az secildikdə alınan təsvir də intervalları daha aydın muqayisə etmək mümkün olmur.Ona görə də məlumatın ölçüsündən asılı olaraq intervalların sayı düzgün secilməlidir. İntervalların sayı ən azı 5 olur, lakin, heç vaxt 15 intervaldan çox sayda verilmir.Ümumiyyətlə, intervalların sayını daha dəqiqi təyin etmək üçün və aşagıdakı düsturla hesablayırlar.

$K = 1 + 3{,}3\lg n$ buradakı k intervalın sayını, n isə seşmənin həcmini bildirir.

Ümumiyyətlə K –nın qiyməti 5 ilə 15 arasıda dəyişir.

3. **Paylanmanın genişliyi:** Variantlarda ən böyük göstərici ilə ən kiçik göstərici arasındakı fərqi göstərir və R hərfi iləişarə edilir.

$$R = X_{max} - X_{min}$$

4. **İntervalın uzunluğu** (genişliyi): İntervalın uzunluğu, paylanma genişliyinin intervalın sayına nisbətidir. Hər bir intervalın uzunluğu eynidir. İntervalların kənar noqtələrinin arzu olunan kimi olması üçün intervalın uzunluğu həmişə yuxarı yuvarlaqlaşdırılır. İntervalın uzunluğu (h) və yaxud (Δx) ilə işarə edilir və aşağıdakı düsturla hesablanır.

$$h = \frac{R}{K}$$

5. **İntervalın sərhədləri:** Hər birintervalın sərhədlərini müəyyənləşdirmək üçün, ən kiçik variant qeyd edilir və h –ın qiyməti ilə toplanır.

6. **İntervala düşən verilənlərin sayı:** Bunun üçün hər intervalın sərhədləri arasında qalan göstəricilərin sayı qeyd edilir.

7. Tezlik paylanması təyin edilir: Nisbi tezliklər hər bir tezliyin ümumi tezliklərin cəminə nisbəti kimi tapılır.

$$W = \frac{n_i}{n}.$$

Əgər hər bir interval üçün faiz tapılmalıdırsa onda nisbi tezlik sadəcə 100-ə vurulur.

8. Qrafiklər qurulur. Poliqin, histoqram və kumulyata.

Bütün bunları daha aydın öyrənmək üçün aşağıdakı misalın həllinə nəzər salaq.

Misal 1: Fərz edək ki, 20 idmançı 4 kiloqramlıq çəkici uzaq məsafəyə ataraq aşağıdakı nəticələri göstəriblər. (n=20)

24, 35, 17, 21, 24, 37, 26, 46, 58, 30, 32, 13, 12, 38, 41, 43, 44, 27, 53, 27

Bu nəticələr üçün tezlik paylanmasını qeyd edək və qrafiklərini quraq:

Həlli:

1. Verilənlər nizamla sıralanır:

   12, 13, 17, 21, 24, 24, 26, 27, 27, 30, 32, 35, 37, 38, 41, 43, 44, 46, 53, 58

4. Paylanmanın genişliyi tapılır:

   $R = 58 - 12 = 46$

5. İntervalların sayı seçilir:

   $K = 1 + 3{,}3 \lg 20 = 5$

6. Hər bir İntervalın uzunluğu (genişliyi) tapılır.

   $h = \frac{R}{K} = \frac{46}{5} = 9{,}2 \approx 10$

7. Hər intervala düşən verilənlərin sayı tapılır (n_i)
8. Nisbi tezlik təyin edilir ($W = \frac{n_i}{n}$)
9. Bütün bunları asanlaşdırmaq üçün cədvəl tərtib edilir.
10. Qrafiklər qurulur.

Ümumiyyətlə cədvəli bir neçə formada tərtib etmək olar.

(I üsul)

İnter-vallar K	Intervalın sərhəddi (ΔX)	Intervalın ortası ($\Delta\bar{X}$)	seçmə tezliyi (n_i)	nisbi tezlik $W = \frac{n_i}{n}$	tezliyin cəmi $F = \sum W$
1	12----------21,2	16,6	4	0,2	0,2
2	21,2 --------30,4	25,8	7	0.35	0,55
3	30,4-------- 39,6	35	3	0,15	0,70
4	39,6---------48,8	44,2	4	0,2	0,90
5	48,8----------58	53,4	2	0,1	1

(II üsul)

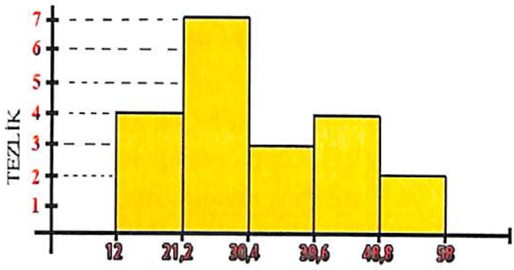
intervallar K	Intervalın sərhəddi (ΔX)	seçmə tezliyi n_i	kumulyativ tezlik	kumulyativ faiz (%)
1	12----------21,2	4	4	20%
2	21,2 --------30,4	7	11	55%
3	30,4-------- 39,6	3	14	70%
4	39,6---------48,8	4	18	90%
5	48,8 ----------58	2	20	100%

Qrapiklər qurulur.

Histoqram: Tezlik paylanması cədvəlinin qrafiki təsviri histoqram adlanır. İntervalın ucları üfüqi oxu üzərində gostərilir. Şaquli ox uzərində tezlik, nisbi tezlik və ya faiz gostərilir. Sütunların hündürlüyü hər bir sinterval üçün yuxarıda qeyd olunanlardan birini gostərir. İntervalların hüdudları üfüqi, tezlik isə şaquli oxda göstərilir. Düzbucaqlıların (barların) hündürlüyü tezliyin həcmini ifadə edir.

Başqa sözlə, hər hansı düzbucaqlı koordinat sistemində absis oxu üzərində intervalların hüdudlarını, ordinat oxu üzərində isə n_i - tezlikləri qeyd edərək onların şaquli barlar ilə göstərilməsi **histoqram adlanır.**

Intervalın sərhəddi (ΔX)	seçmə tezliyi n_i
12 dən - 21,2 qədər	4
21,2 dən - 30,4 qədər	7
30,4dən- 39,6 qədər	3
39,6 dan- 48,8 qədər	4
48,8 dən- 58 qədər	2

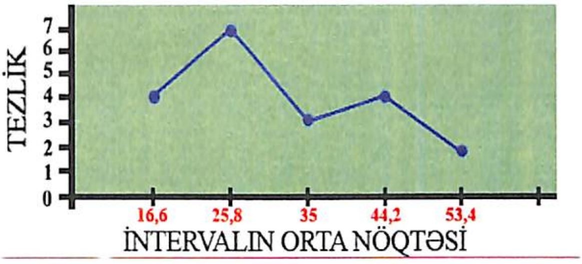


Poliqon: intervalın orta nöqtəsi ilə o intervala daxil olan tezliyi birləşdirən nöqtələrdən ibarətdir. İntervalın orta qiymətləri ilə mütləq tezliklər arasındakı asılılığı ifadə edir.

Yəni, hər hansı düzbucaqlı koordinat sistemində absis oxu üzərində variantların orta nöqtələrin , ordinat oxu üzərində isə $\boldsymbol{n_i}$ - tezliklərini qeyd edərək onları birləşdirən xətt **tezliklərin poliqonu** adlanır.

Intervalın sərhəddi (ΔX)	Intervalın orta nöqtəsi ($\Delta \bar{X}$)	seçmə tezliyi (n_i)
12-----21,2 arası	16,6	4
21,2 --30,4 arası	25,8	7
30,4---39,6 arası	35	3
39,6---48,8 arası	44,2	4
48,8---58 arası	53,4	2

POLİQON

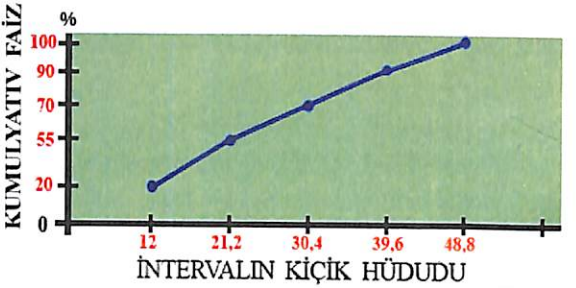


Kumulyativ Tezlik və Kumulyativ Faiz Paylanması

Kumulyativ əyri: Kumulyativ tezliklər hər bir intervalın yuxarı sərhəddindən kiçik olan ədədlərin sayını gostərir. Hər bir intervalda kumulyativ tezliyi hesablamaq üçün bu intervalın və ondan solda olan intervalların tezliklərini toplamaq lazımdır. Kumulyativ faizi hesablamaq üçün isə hər bir interval və ondansolda olan intervalların faizlərini toplamaq lazımdır.

Bu əyri bir növ poliqona bənzəyir, fərqi ondan ibarətdir ki, tezlikdə hər zaman kumulyativ rəqəm olur və üfüqi oxda intervalın kiçik hüdudu qeyd edilir. Kumulyativ əyri intervalın kiçik hüdudu ilə bu hüduddan aşağıda qalan bütün tezliklərin cəmini birləşdirən nöqtələr çoxluğudur.

Intervalın kiçik hüdudu	Kumulyativ faiz (%)
12	20%
21,2	55%
30,4	70%
39,6	90%
48,8	100%



Alınan təsvirdən demək olar ki, ən kiçik nəticə ümumi nəticənin 20%-ini təşkil edir. 21,2 –dən az olan nəticələr ümumi nəticənin 55%-ini təşkil edir, 30,4 –dən az oln nəticələr ümumi nəticənin 70%-ini təşkil edir, 39,6 –dan az oln nəticələr ümumi nəticənin 90% -ni təşkil edir və nəhayət 48,8 nəticədən az olan göstərici cəmi nəticənin 100%-ini təşkil edir.

Təcrübi göstəricilərin həndəsi təsvirinə aid tapşırıqları həll edin:

Tapşırıq 1: Aşağıdakı 20 tələbədən ibarət bir qurupun hündürlüyə tullanma nıticələri verilib. Bu nəticələr üçün variasiya sırasını tərtib edin və paylanma funksiyasının qrafiklərini qurun (poliqon,histoqram, kumulyata).

($k = 1+ 3{,}3\lg20 = 5$)

1,0 ; 1,25; 1,28; 1,33; 1,39; 1,4; 1,44; 1,45; 1,47; 1,48 ; 1,49; 1,52; 1,53; 1,55; 1,56; 1,65 ; 1,72 ; 1,78 ; 1,92 ; 2,0

Tapşırıq 2: 35 üzgüçünün 100 metr məsafəyə üzmə nəticələri verilib. Bu nəticələr üçün variasiya sırasını tərtib edin və paylanma funksiyasının qrafiklərini qurun.

(poliqon, histoqram, kumulyata) ($k = 1+3{,}3\lg3 = 7$) .

1,31; 1,27; 129; 1,38; 1,30; 1,44; 1,26; 1,43; 1,39; 1,40; 1,36; 1,30; 1,43; 1,42; 1,40; 1,34; 1,49; 1,35; 1,42; 1,23; 1,41; 1,31; 1,32; 1,49; 1,27; 1,28; 1,29; 1,30; 1,44; 1,41; 1,49; 1,50; 1,50; 1.41; 1,37

Tapşırıq 3: 25 şagirdin uzununa tullanma nəticəlıri verilib. Bu nəticələr üçün variasiya sırasını tərtib edin və paylanma funksiyasının qrafiklərini qurun.

(poliqon, histoqram, kumulyata) (k=1+3,3lg 25 = 4)

4,86; 4,78; 4; 4,92; 4,98; 5,2; 5,67; 6; 6; 5,98; 5; 5,2; 4,89; 4,78; 5,11; 5,87; 5,55; 5,23; 5,99; 5,91; 4,99; 3,98; 4,44; 4,98; 6.

Tapşırıq 4: Atletlər məşq zamanı 60 metr məsafəni qaçaraq aşagıdakı nəticələr göstərmişlər.Bu nəticələr üçün variasiya sırasını tərtib edin və paylanma funksiyasının qrafiklərini qurun. (k=1+3,3lg25= 6)

8,2; 8,5; 7,9; 7,8; 7,6; 8,8; 8,3; 7,1; 8,2; 9; 7,3; 7,9; 8,4; 7,9; 8,5; 8,2; 7; 8; 8,99; 9; 7,98; 6,99; 6,89; 7,7; 9.

Tapşırıq 5: Konkisürən idmançıların boy ölçüləri aşagıdakı verilənlərdir (sm).Bu nəticələr üçün variasiya sırasını tərtib edin və paylanma funksiyasının qrafiklərini qurun. (poliqon, histoqram, kumulyata) (n = 40,) (k = 8)

192, 170, 181, 170, 184, 180, 175, 185, 180, 162, 172, 180, 182, 176, 167, 170, 182, 172, 182, 184, 172, 177, 173, 173, 183, 179, 184, 175, 177, 169, 170, 168, 180, 176, 177, 173, 168, 169, 177, 180

Tapşırıq 6: Aşagıdakı cədvələ görə tezlik poliqonunu və histoqramı qurun:

№	x_i	n_i
1	35 - 40	2
2	40 - 45	1
3	45 - 50	8
4	50 - 55	10
5	55 - 60	5

Tapşırıq 7: Aşagıdakı cədvələ görə tezlik poliqonunu və histoqramı qurun:

№	x_i	n_i
1	9,5 - -- 10	5
2	10 -- - 10,5	7
3	10,5 - -- 11	8
4	11 --- 11,5	4
5	11,5 ---- 12	2

Tapşırıq 8: Tezliyə görə paylanma qanunu cədvəldə verilib. Nisbi tezliyə uyğun paylanmanı qeyd edin:

x_i : 48 , 50 , 52, 53 , 54, 58, 60, 65

n_i : 5, 6, 8, 10, 9, 4, 5, 3

Tapşırıq 9: Tezliyə görə paylanma qanunu cədvəldə verilib. Nisbi tezliyə uyğun paylanmanı qeyd edin:

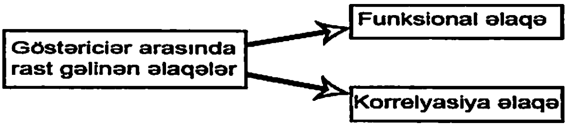
x_i	38	43	50	53	55	57	62	66
n_i	3	5	2	10	8	4	6	2

X FƏSİL: KORRELYASİYA ANALİZİ

10.1. Funksional və statistik əlaqə

Xarakterinə, istiqamətinə görə, analitik ifadəyə görə və s. əlaqələrin müxtəlif növləri və formaları mövcuddur.

Hadisələr və onların göstəriciləri arasındakı əlaqə və asılılıqlar xarakterinə görə **funksionaləlaqə** (tam) və **korrelyasiya əlaqəsinə** (tam olmayan) ayrılır.



Funksional əlaqə, dəqiq riyazi düsturla: $Y = f(x)$ ifadə olunur.

Başqa sözlə, nəticə əlamətinin dəyişilməsi tamamilə müəyyən amil əlamətinin və ya əlamətlərinin dəyişilməsindən asılıdır.

Məsələn, dairənin sahəsi radiusun kvadratı ilə düz mütənasibdir (S = πr^2).

Funksional əlaqədə bir dəyişənin hər bir qiymətinə digər dəyişənin yalnız bir qiyməti qarşı qoyulur (uyğungəlir). Funksional əlaqə ən çox təbii hadisələr arasında mövcuddur. Sosial-iqtisadi hadisələrdə funksional əlaqəyə nadir hallarda rast gəlmək olar. Yəni bir dəyişənin bir qiymətinə digər dəyişənin bir neçə qiyməti uyğun gələ bilər.

Məsələn, eyni iş stajına və yaxud eyni ixtisas səviyyəsinə malik olan fəhlələrin əmək məhsuldarlığı müxtəlif ola bilər.

Statistik əlaqədə isə göstəricinin bir qiymətinə digər göstəricinin bir neçə qiyməti uyğun gəlir. Məsələn: çəkinin boydan asılı olması.

Tərif: Əgər dəyişən X və Y kəmiyyətlərinin birinin hər bir qiymətinə digərinin qiymətlər coxluğu qarşı qoyularsa və bu qiymətlərin sayı sabit olmayıb müəyyən qanuna – uyğunluğa tabe deyilsə, onda bu kəmiyyətlər arasındak əlaqəyə statistik əlaqə deyilir.

Başqa sözlə, desək X kəmiyyətinin hər bir qiymətinin dəyişməsi ilə Y kəmiyyətinin dəyişən variantları və onların tezlikləri qarşı qoyulur.

Statistik əlaqələr arasında ən mühümü korrelyasiya əlaqəsidir. Korrelyasiya termini latın sözü "correlatio" sözündən olub mənaca "münasibət", "uyğunluq" və yaxud "qarşılıqlı əlaqə" əlaqə deməkdir.

Korrelyasiya əlaqə formasında bir çox amil əlamətinin dəyişməsinin təsiri nəticəsində nəticə əlamətinin orta qiyməti dəyişir. Lakin əlamətlərin dəyişməsi arasında möhkəm nisbət olmur. Məsələn, torpağa verilən gübrənin miqdarı ilə bitkinin məhsuldarlığı arasında korrelyasiya əlaqəsi vardır. Eyni miqdarda gübrə verilmiş müxtəlif sahələrdən müxtəlif miqdarda məhsuldarlıq götürülə bilər, təcrübədə elə hallara da rast gəlmək olar ki, az gübrə verilmiş sahədən çox məhsul götürülür. Deyilənlərdən belə nəticəyə gəlmək olar ki, nəticə əlaməti olan buğdanın məhsuldarlığına (y)-ə, amil əlaməti olan torpağa verilən gübrənin miqdarı olan (x) –dən başqa digər amillər də təsir göstərir. Məsələn, torpağın becərilməsi, yağıntının miqdarı, yığım müddəti və .s. Ona görə də korrelyasiya əlaqəsi az götürülmüş iki-üç əlamətin qiyməti əsasında deyil, çox götürülmüş müşahidə məlumatı əsasında özünü aydın büruzə verir.

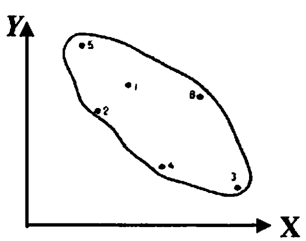
Onun əsas məqsədi təzyiq edilən göstəricilərin təyin olunmasından, sıxlığından və istiqamətlərdən ibarətdir. Korrelyasiya analizi yalnız statistik əlaqəni araşdırmağa imkan verir. O, onların etibarlılığını və informativliyini qiymətləndirmək üçün sınaq nəzəriyyəsində geniş istifadə olunur.

Korrelyasiya asılılığında tədqiq olunan dəyişənlər kəmiyyət xarakteristikalı olurlar, yəni kəmiyyətcə ifadə olunurlar.

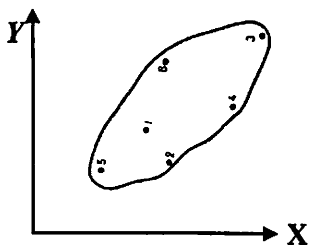
10.2. Korrelyasiya sahəsi

Korrelyasiya sahəsi elə nöqtələr sahəsidir ki, burada hər bir nöqtə külliyyatın bir vahidinə uyğun gəlir onu xarakterizə edir. Nöqtələrin koordinatları x və *y* əlamətlərinin göstəriciləri ilə müəyyən olunur. Korrelyasiya sahəsində nöqtələrin yerləşməsinə görə asılılıgın olub-olmaması, xarakteri haqda fikir söyləmək olar. Asılılığın xətti, qeyri xətti olması və olmadığı hallar ola bilər. Əgər asılılıq xəttidirsə, onda düz və tərs ola bilər. Şərti olaraq bu hallar aşagıdakı şəkillərdə təsvir olunmuşdur.

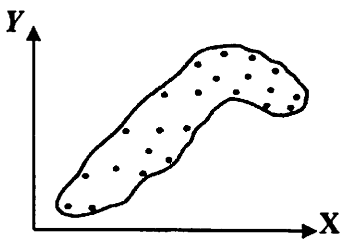
Fərz edək ki, 6 nəfər sınanılan şəxsin məşqin hazırlıq müddətinin başlanmasına qədər olan ölçülərinin nəticələrini nəticələri (*X*) və bitəndən sonrakı nəticələr (*Y*) –dir. Bu nəticələr üçün qrafik quraq, absis oxuna *X*-in nəticələrini, ordinat oxu üzərində isə Y-in nəticələrini qeyd edirik.Beləliklə, hər nəticə cütü koordinatın düzbucaqlı sistemində nöqtə ilə göstəriləcək.



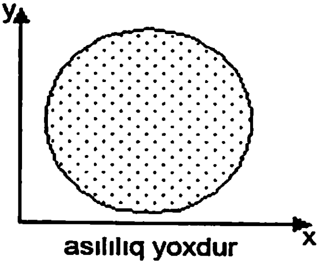
xətti, tərs asıllıq



xətti,düz asılılıq



qeyri xətti asılılıq asılılıq



Bu cür qrafiki asılılıqlar dolanma diaqramı və ya korrelyasiya sahəsi adlanır.

10.3.Əlaqənin sıxlığı və istiqaməti

Əlamətlər arasında asılılığı əyani olaraq daha aydın şəkildə görmək, anlamaq üçün qrafik metoddan istifadə olunur. Bunun üçün absis oxunda faktor əlamətinin göstəriciləri, ordinat oxunda nəticə əlamətinin qiymələri qeyd edilir. Faktor göstəricilərini X, nəticə göstəricilərini Y-lə işarə etsək (X,Y) cütlüklərinə görə korrelyasiya sahəsini qurmaq olar. Kəsişmə nöqtələrinin yerləşməsinə görə əlamətlər arasında asılılığın istiqaməti və sıxlığı haqqında qənaətə gəlmək olar. Əgər nöqtələr korrelyasiya sahəsində qaydasız şəkildə hər tərəfə səpələnibsə, onda bu əlamətlər arasında asılılığın olmamasından xəbər verir. Əgər nöqtələr kordinat oxunun OX ətrafında konsentrasiya olunaraq, aşağı sol küncdən yuxarı sağ küncə qədər yerləşirsə faktor və nəticə əlamətləri arasında düz asılılıq, yuxarı sol küncdən aşağı sağ küncə qədər cəmlənirsə tərs asılılıq mövcuddur.

Başqa sözlə, X -in qiyməti artdıqda Y -in qiyməti də artarsa onda faktor və nəticə arasında düz asılılıq, əksinə X -in qiyməti artdıqda Y-in qiyməti azalarsa onda faktor və nəticə arasında tərs asılılıq müşahidə olunur.

Korrelyasiya əmsalını hesablayaraq, əlaqələr arasıdakı asıllığın sıxlığını və istiqamətini daha aydın görmək olur.Statistika nəzəriyyəsində və praktikada bu əmsalın hesablanması düsturunun müxtəlif formalarına müraciət olunur:

Əgər əlaqə forması xətti olarsa, əlaqənin ölçülməsində **Brave-Pirson korrelyasiya əmsalı istifadə olunur.** korrelyasiya əmsalı latın hərfi " r " ilə qeyd olunur və aşagıdakı bu düsturla hesablanır.

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad (1)$$

Burada $\bar{X}$ və $\bar{Y}$ işarələri x və y göstəricilərinin orta qiyməti, σ_x və σ_y kvadrat kənarlaşma(standart meyl), n isə ölçülərin sayıdır.

Asılılığın sıxlığının qiymətləndirilməsi üçün kəmiyyət meyarları:

Kor. əmsalının həcmi	Asıllığın xarakteri	İstiqaməti
r = 0 olarsa	əlaqə yoxdur	Istiqamət yoxdur
r = 0,3-ə qədər olarsa	çox zəif	eyni istiqamətli
r = 0,3dən 0,5-ə qədər	zəif	eyni istiqamətli
r = 0,5-dən 0,7-ə qədər	orta	eyni istiqamətli
r =0,7-dən 1-ə qədər	yaxşı	eyni istiqamətli
r = – 0,3-ə qədər olarsa	çox zəif	əks istiqamətli
r = –0,3dən –0,5-ə qədər	zəif	əks istiqamətli
r = –0,5-dən –0,7-ə qədər	orta	əks istiqamətli
r =–0,7-dən –1-ə qədər	yaxşı	əks istiqamətli

Korrelyasiya əmsalını

$$r_{xy} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

düsturu ilə də hesablamaq mümkündür.

Korrelyasiya münasibətlərini aşağıdakı düsturlarla da ifadə edirlər

$$r_{y/x} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2-\Sigma(x_i-x')^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}} \qquad r_{y/x} = \sqrt{\frac{(y_i-y')^2}{\Sigma(y_i-y)^2}}$$

$$r_{y/x} = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2-\Sigma(y_i-y')^2}{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} \qquad r_{y/x} = \sqrt{\frac{(x_i-x')^2}{\Sigma(x_i-x)^2}}$$

10.4. Korrelyasiya əmsalı

Korrelyasiya əmsalının kvadratı determinasiya əmsalı adlanır və D kimi işarə olunur. Determinasiya əmsalı cüt korrelyasiya halında faktor əlamətinin və çoxölçtilü halda faktor əlamətlərinin dəyişməsinə görə nəticə əlamətinin hansı hissəsinin dəyişməsini izah edir. Determinasiya əmsalı $D = r^2 \cdot 100\%(2)$ düsturu ilə hesablanır.

Əlamətlər arasında asılılığı xarakterizə etmək üçün daha çox determinasiya əmsalına müraciət olunur. Çünki, bu əmsal həm xətti, həm də qeyri xətti asılılıqların qiymətləndirilməsi üçün yararlıdır. Mütləq və nisbi şəkildə ifadə oluna bilər. Determinasiya əmsalı mütləq ifadə olunursa [0;l] intervalında, nisbi ifadə olunursa O-dan 100-ə qədər qiymət alır. Əmsal vahidə nə qədər yaxın olarsa, asılılıq bir o qədər sıx, sıfra yaxınlaşarsa zəif qəbul edilir.

Məsələn, əgər hesablanmış korrelyasiya əmsalı $r = -0,282$ olarsa,

$$D = r^2 \cdot 100\% = (-0,282)^2 = 0,079 = 78\%.$$

Yəni, Y-ik X-də baş verən dəyişmələrin yalnız 7,9% -ni izah edir.

Misal 1. 10 nəfər atletika üzrə ixtisaslaşmış I kurs tələbələrinin 30 metr məsafəni qaçma və üçlük hoppanma nəticələri göstərilib. Qaçış nəticəlırini X (saniyə) ilə qeyd edilib, hoppanma nəticələrini Y (metr) ilə qeyd edilib.

Bu iki dəyişən arasındakı əlaqəni təyin edək:

Həlli:

Hesablamanı asanlaşdırmaq üçün korrelyasiya cədvəlindən istifadə edirik.

№	x	y	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
1	3,5	8,05	-0,2	0,72	-0,144	0,04	0,5184
2	3,6	7,34	-0,1	0,01	-0,001	0,01	0,0001
3	3,6	7,37	-0,1	0,04	-0,004	0,01	0,0006
4	3,6	7,77	-0,1	0,44	-0,044	0,01	0,1936
5	3,8	7,04	0,1	-0,29	-0,029	0,01	0,0841
6	3,7	7,17	0	-0,16	0	0	0,0256
7	3,9	6,50	0,2	-0,83	-0,166	0,04	0,6889
8	3,4	8,15	-0,3	0,82	-0,246	0,09	0,6724
9	3,6	6,98	-0,1	-0,35	0,035	0,01	0,1225
10	3,6	6,97	-0,1	-0,36	0,036	0,01	0,1296
Cəmi	**36,8**	**73,34**			**−0,563**	**0,23**	**2,4368**

Korrelyasiya əmsalını hesablamaq üçün aşağıdakı addımlardan (mərhələlərdən) istifadə edəcəyik.

Addım 1. Ilk növbədə $\bar{X}$ və $\bar{Y}$ hesablayaq.

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{36{,}8}{10} = 3{,}7$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{73{,}34}{10} = 7{,}33$$

Addım 2. Ardıcıllıqla (növbə ilə) bütün sütunları hesablayaq.. Hesablama apararkən sütunların yuxarısında yazılan formulalara diqqət etmək lazımdır.

Addım 3. Sütunlar tamamlandıqdan sonra cədvəldəki nəticələrə uyğun σ_x və σ_y hesablanılır. Yəni,

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}23}{9}} \approx 0{,}16$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2{,}43}{9}} \approx 0{,}52$$

$$\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = -0{,}563$$

Addım 4. Hesablanmış qiymətləri (1) düsturunda yerinə yazıb korrelyasiya əmsalı hesablanılır:

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y} = \frac{-0{,}563}{10\cdot 0{,}16\cdot 0{,}52} = -0{,}67$$

$$D = (-0{,}677)^2 \cdot 100\% = 45.8\%$$

Nəticə: 30 metr məsafəyə qaçışın və yerində üçlük hoppanmanın (öyrənilən ixtisaslaşma üçün) nəticələrinin arasında mənfi orta statistik əlaqə qeyd olundu. Bu o deməkdir ki, qaçışda nəticənin təkmilləşməsi (vaxtın azalması) üçlük hoppanma nəticələrinin təkmilləşməsi ilə (artması) bağlıdır.

Determinasiyanın qiymətinə görə, 30 metr məsafəyə qaçışda və üçlük hoppanmada idman nəticələrinin yalnız 45,8% əlaqəsi onların qarşılıqlı təsiri ilə izah edilir. Variasiyanın qalan 54,2% hissəsi (100% – 45,8% = 54,2%) digər təsadüfi faktların təsiri ilə izah olunur. (nəzərə alınmayan faktlar)

Misal 2. Korrelyasiya əmsalını hesablayın:.

X: 70; 65; 60; 75; 80

Y: 40; 60; 50; 40; 60

Həlli: Hesablamanı asanlaşdırmaq üçünli korrelyasiya cədvəlindən istifadə edək.

№	x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$
1	70	40	0	-10	0	0	100
2	65	60	-5	10	-50	25	100
3	60	50	-10	0	0	100	0
4	75	40	5	-10	-50	25	100
5	80	60	10	10	100	100	100
Σ	350	250	-	-	0	250	400

$$\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{350}{5}=70; \qquad \bar{Y}=\frac{\sum Y_i}{n}=\frac{250}{5}=50$$

$$\sum(x_i-\bar{x})^2=250; \qquad \sum(y_i-\bar{y})^2=400$$

$$\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=0;$$

$$r_{xy}=\frac{\sum(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{0}{\sqrt{250\cdot400}}=0$$

Nəticə: Kəmiyyətlər arasında heç bir əlaqə yoxdur.

10.5. Spirmenin ranqlı korrelyasiya əmsalı

Əgər seçilmiş göstəriciləriartma və azalma sırası ilə düzsək onda ranqlaşdırılmış sıçmə alarıq. Seçilmiş qiymətin sıra nömrəsi onun ranqı adlanır. Əgər seçmədə təkrarlanan qiymətlər yoxdursa onda ranq birqiymətli olaraq sıra nömrəsi ilə təyin olunur.Təkrar olunan qiymətlərin ranqı isə onların sıra nömrələrinin qiyməti ilə ifadə olunurlar.

Məsələn - Fərz edək ki $n=10$ həcmli seçmə ranqlaşdırıldıqdan sonra aşağıdakı kimi olmuşdur.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	12	14	15	15	15	16	18	19	19	22

Burada 3, 4, 5 və 8, 9 nömrəli qiymətlər təkrarlandığından, onların ranqları uyğun olaraq aşağıdakı kimi olar:

$$R = \frac{3+4+5}{3} = 4, \qquad R = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$$

Ranq tam ədəd olmaya da bilər. Seçmənin digər elementlərinin ranqları isə onların sıra nömrələrinə bərabərdir.

X_i	12	14	15	15	15	16	18	19	19	22
R_i	1	2	4	4	4	6	7	8,5	8,5	10

Ən böyük göstəriciyə **I ranq** mənimsədilir (verilir).

Ranq əmsalı göstərirki, əlaqə sıxlığı əlamətlərin özlərinin arasında deyil, onların sıra göstəriciləri arasında müəyyən edilir. Əlamətlərin arasındakı sıxlığı ranqların korrelyasiya əmsalı daha dəqiq xarakterizə edir.

Ranqların korrelyasiya əmsalı yunan hərfi (ρ) ilə işarə olunur və aşağıdakı düsturla hesablanır.

$$\rho = 1 - \frac{6\sum (x-y)^2}{n(n^2-1)} \qquad (2)$$

və yaxud $\rho = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$ hesablanır.

Misal 3: Fərz edək ki, x_i və y_i nəticələr verilib.Bu nəticələr üçün korrelyasiyanın ranq əmsalını tapın:

x_i: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

y_i: 2, 1, 3, 5, 6, 4, 7

Həlli: (Hesablamanı asanlaşdırmaq üçün cədvəl tərtib edək)

n	x_i	y_i	$x_i - y_i$	$(x_i - y_i)^2$
1	1	2	−1	1
2	2	1	1	1
3	3	3	0	0
4	4	5	−1	1
5	5	6	−1	1
6	6	4	2	4
7	7	7	0	0
				$\sum 8$

$n = 7$ olduğu üçün $n + 1 = 7 + 1 = 8$

$n - 1 = 6$ buradan da (2) düsturuna əsasən

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 8}{7(7-1)(7+1)} = \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 8} = 0{,}86$$

Alarıq.

Nəticə: $\rho = 0{,}86$ olar bu isə, x və y arasında sıx qarşılıqlı əlaqənin mövcud olmasını təsdiq edir.

Misal 4: Korrelyasiyanın ranq əmsalını tapın:

X: 70, 65, 68, 61, 60 $(n = 5)$

Y: 60, 55, 54, 58, 50

10.6. Korrelyasiyaəmsalının etibarlığının qiymətləndirilməsi

Hesablanmış həqiqi korrelyasiya əmsalı seçmə yığım üçün nəzərdə tutulub. Məlumdur ki, seçmə yığım baş yığımdan götürülür. Ona görədə hər bir hesablamada korrelyasiya əmsalının xətası mövcuddur. Bu xəta baş yığımın və seçmənin korrelyasiya əmsalları arasındakı fərqdir. Çox saylı müşahidələr üçün korrelyasiya əmsalının xətası (dəqiqliyi) aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$S_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

Burada S_r – korrelyasiya əmsalının dəqiqliyi; r–korrelyasiya əmsalı və

n–seçmənin həcmidir. Müşahidələrin sayı 30–dan kiçik olarsa, korrelyasiya əmsalının xətası (dəqiqliyi) aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$S_r = \frac{1-r^2}{n-2} \quad (4)$$

Korrelyasiya əmsalının etibarlığı Styüdentin t – kriteriyasının köməyi ilə təyin olunur:

$$t_{hes} = \frac{r}{S_r} = \frac{r\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (5)$$

Styüden t_{kr} kritik (böhran) qiyməti $(t_{\alpha \cdot k})$, burada α əhəmiyyət səviyyəsidir. $k = n - 2$ Styüdent cədvəlindən alınır. Əgər $t_{hes} > t_{kr}$, onda hesablanılan korrelyasiya əmsalı $(1-\alpha)$ ehtimallığı ilə sıfırdan fərqlidir.

İki yığımın korrelyasiya əmsallarının arasındakı fərqin dəqiqliyini və etibarlığını qiymətləndirmək üçün Fişerin α çevrilməsindən istifadə etmək daha rahatdır.

r-in Z - tə çevrilməsi aşağıdakı düsturla yerinə yetirilir.

$$Z = \frac{1}{2}\, ln\frac{1+r}{1-r} \quad \text{və ya} \quad Z = 1{,}151 \cdot lg\frac{1+r}{1-r}.$$

Bu göstəricinin üstünlüyü ondadır ki, o normal paylanmaya daha tez yaxınlaşır. Ona görə Z göstəricisi kiçik həcmli yığımlar üçün daha etibarlıdır. r-in Z-ə çevrilməsini cədvəl vasitəsi ilə təyin etmək mümkündür Z -in dəqiqliyi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$S_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

etibarlıq isə

$$t_{hes} = \frac{Z}{S_z}$$

hesablanır.

Tədqiqatlarda adətən iki korrelyasiya əmsalı müqayisə edilir. Müqayisənin məqsədi, iki korrelyasiya əmsalı arasındakı fərqin etibarlı və ya təsadüfi olmasını təyin etməkdir. İki seçmə yığımın korrelyasiya əmsalı arasındakı fərqin etibarlığı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 + 3}}}$$

Burada z_1 və z_2 korrelyasiya əmsalına münasib olan qiymətlər, hesablanmış t qiymətinə görə normal interval ehtimallar cədvəli ilə və yaxud $n = \infty$ üçün Styüdent cədvəlindən təyin olunur.

Misal 4: Fər edək ki, 13 atletin ştanqa təkanı və yerindən hündürlüyə tullanma nəticələri arasındakı korrelyasiya əmsalı hesablanıb və r = 0,855 alınıb. Korrelyasiya əmsalının etibarlığını qiymətləndirək.

Həlli. Korrelyasiya əmsalının dəqiqliyini (4) düsturuna əsasən hesablayaq:

$$S_z = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-(0{,}855)^2}{13-2}} = 0{,}156$$

$$t_{hes} = \frac{r}{S_z} = \frac{0.855}{0{,}156} = 5{,}48$$

Styüdent cədvəlindən t_{kr} $(\alpha = 0{,}001,\ k = 11) = 4{,}44$

$t_{hes} > t_{kr}$; yəni 5,48 > 4,44

Nəticə: Hesablanmaya görə korrelyasiya əmsalı $r = 0{,}855$ sıfırdan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir. Yəni hesablanmış korrelyasiya əmsalı etibarlı sayılır.

Misal 5: $r = 0{,}648$, $n = 19$ üçün olarsa korrelyasiya etibarlığını yoxlayaq:

Həlli:

Dəqiqlik hesablanır:

$$S_z = \frac{1}{\sqrt{19-3}} = 0{,}25 \text{ onda } t_{hes} = \frac{r}{S_z} = \frac{0.648}{0{,}25} = 2{,}592$$

cədvəldən $k = n - 2 = 19 - 2 = 17$ sərbəstlik dərəcəsi və $\alpha = 0{,}02$ əhəmiyyət səviyyəsi üçün (t) kriteri təyin olunur:

$$t = 2{,}567$$

2,592 > 2,567 yəni $t_{hes} > t_{kr}$ olduğundan hesablanmış korrelyasiya əmsalı etibarlı sayılır.

10.7. Konkordasiya əmsalı

(ranqların çoxsaylı korrelyasiya əmsalı)

Üç və daha çox əlamətlər arasındakı əlaqənin sıxlığını müəyyən etmək üçün konkordasiya əmsalı hesablana bilər. Konkordasiya əmsalı aşağıdakı düsturla müəyyən edilir:

$$W = \frac{12\,S}{m^2\,(n^3 - n)} \qquad (6)$$

burada, m aralarında asılılıq öyrənilən faktorların sayı, n ranqlaşdırılmış vahidlərin sayı S isə ranqların kənarlaşmalarının kvadratları cəmidir.

Konkordasiya əmsalı [0; 1] qiymətlərini ala bilər. Əmsal 0,5-i keçərsə, əlamətlərin variasiyaları arasındakı asılılıq haqqında danışmaq olar.

Korrelyasiya əmsalının hesablanmasına aid misallar:

Misal 1. Minimal arterial təzyiqin ölçülməsi zamanı alınan nəticələr aşağıda verilmlşdir. Bu nəticələr üciin korrelyasiya əmsalını hesablayın ($n = 10$).

Məşqdən əvvəl aparılan test nəticələri - X_i -lə işarə edilib.

Məşqdən sonra aparılan test nəticələri isə - Y_i-lə işarə edilib.

X_i : 72; 65 ; 60; 77; 79: 68; 82; 80; 64; 67

Y_i : 42; 40; 53; 55; 42; 52; 50; 51; 60; 60

Misal 2. Futbolçunun ayaqla topa vurduğu zərbə məşqdən əvvəl və məşqdən sonra qeydə alınmışdır. Bu nəticələr üçün korrelyasiya əmsalını hesablayın ($n = 10$).

məşqdən əvvəl: X_i: 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 3,6; 3,6; 3,7; 3,8; 3,5; 3,9

məşqdən sonra: Y_i : 3,1; 3,6; 3,3; 3,2; 3,5; 3,1; 3,7; 3,1; 3,3; 3,4

Misal 3. ÜDT-göstəricilərinin qiyməti məşqdən əvvəl və məşqdən sonra qeydə alınmışdır.Bu nəticələr üçün korrelyasiya əmsalını hesablayın ($n = 10$).

məşqdən əvvəl: X_i: 159; 154; 165; 156; 158; 160; 163; 161; 158; 157

məşqdən sonra: Y_i: 64; 166; 169; 170; 172; 174; 170; 179; 178; 167

Misal 4. İdmançının güc yükünün maksimal arterial təzyiqi məşqdən əvvəl və məşqdən sonra ölçülmüşdür. Bu nəticələr üçün korrelyasiya əmsalını hesablayın.

məşqdən əvvəl: X_i: 120; 110; 90; 120; 115; 100; 120; 95; 98; 100

məşqdən sonra: Y_i: 140; 150; 25; 165; 140; 180; 168; 145; 148; 145

Misal 5. İdmançıların sağ və sol biləklərinin dinamometriyası arasındakı korrelyasiya əlaqəsini təyin edin.

Sağ (X): 70, 65, 68, 61, 60, 63, 71, 60, 66, 64

Sol (Y): 60, 55, 54, 58, 50, 53, 61, 62, 51, 56

Misal 6. İdmançıların boy və çəkiləri ölçülüb. Bu nəticələr üşün korrelyasiya əlaqəsini təyin edin.

X (boy.sm): 178; 170; 180; 182; 179; 168; 169; 170

Y (çəki) 80; 67; 85; 83; 80; 79; 81; 75

Misal7. Beş idmançının sağ (X) və sol (Y) biləklərinin dinamometriyası arasındakı əlaqəni təyin edin:

X: 70, 65, 68, 61, 60

Y: 60, 55, 54, 58, 50

XI. FƏSİL. REQRESİYA ANALİZİ

11.1. Əsas anlayış. Reqressiya tənliyi

"Reqressiya" terminini elmə **F. Qalton** daxil etmişdir. Reqresiya latınca "regression" sözündən yaranıb, mənası geriyə hərəkət deməkdir. Dəyişənlə rarasındakı statistik asılılıqları korrelyasya və reqressiya təhlilinin üsulları ilə öyrənmək mümkündür. Bu üsulların köməyi ilə müxtəlif növ məsələlər həll edilir.

Reqressiya-korrelyasiya təhlili amil əlaməti əsasında analitik qruplaşdırmanın davamı və inkişafıdır. Reqressiya-korrelyasiya təhlilinin köməyilə amil əlamətinin nəticə əlamətinə təsir dərəcəsi ölçülür və nəticə əlamətinin dəyişməsində öyrənilən amilin rolu müəyyənləşdirilir. Reqressiya təhlilinin vasitəsilə amil və nəticə əlamətləri arasında konkret əlaqə növü müəyyənləşdirilir, sonra onun əsasında əlaqə tənliyi qurulur və qiymətləndirilir.

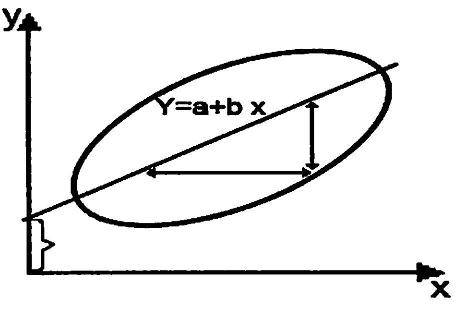
Korrelyasiya təhlilində əlamətlər arasındakı əlaqənin sıxlığı və nəticə əlamətinin ümumi dəyişməsində amil əlamətinin rolu müəyyən edilir. Reqressiya tənliyinin köməyilə amil və nəticə əlamətlərinin variasiyası arasındakı analitik əlaqə forması müəyyənləşdirilir.

Dəyişən göstəricilər arasındakı əlaqəni reqressiya qanunları aydınlaşdırır. Son zamanlarda idmanda reqressiya analizindən daha geniş miqyasda istifadə edilir. Sadə korrelyasiyanı öyrənən zaman x və y-in bir-birindən asılı olaraq dəyişməsi qarşıda dururdu, halbu ki reqressiyada əlavə olaraq bu əlaqənin növünü, məqsədini və səbəbini aydınlaşdırmaq düşünülür. Əgər dəyişən göstərici iki olarsa, reqressiya iki tərəfliolur. Beləki, əgər göstəricilər x və y olarsa, bir tərəfdən x-i y-ə görə digər tərəfdən də y-i x-ə görə təyin etmək lazımdır.

11.2. Reqressiya tənliyinin (əlaqə modelinin) qurulması

Reqresiya tənliyinin qurulmasının başlıca problemi nəticə əlaməti və amil əlamətinin əlaqə mexanizmini əks etdirən analitik funksiyanın növünü müəyyən etməkdir. Əlaqə formasının seçilməsi reqressiya tənliyinin qurulması üçün həlledici əhəmiyyətə malikdir. Buradan aydındır ki, əlaqənin forması düzgün seçilmədikdə aparılan hesablamalar istənilən nəticəni verə bilməz. Əlaqənin forması yuxarıda göstərildiyi kimi, hər şeydən əvvəl, öyrənilən hadisənin məzmununun keyfiyyət təhlili əsasında müəyyən edilməlidir. Əlaqənin formasının seçilməsində qrafik metodunun rolu böyükdür.

Praktiki tədqiqatlarda paylanma diaqramını (korrelyasiya sahəsini) riyazi tənliklə təsvir etməyə ehtiyac yaranır.Ən sadə xətti asılılıq halında korrelyasiy sahəsi düzxətlə əvəz edilə bilər.Xətti asılılıq üçün korrelyasiya ellips itənliklə ifadə olunur:



Qrafikdəki bu asılılıq, qaçışda və üçlük tullanmada nəticələr arasındakı asılılıqdır. Korrelyasiya asılılığının bu riyazi ifadəsi **reqressiya tənliyi** adlanır. Reqressiya analizində əsas mərhələ Y – təsadüfi kəmiyyət ilə X – sərbəst dəyişən arasındakı asılılığın qurulmasıdır.Burada a və b – reqressiya tənliyinin parametrləridir.

Tərif: Nəticə əlamətinin faktor əlamətindən asılı olaraq dəyişməsinin riyazi olaraq təsviri cüt reqressiya tənliyi adlanır.

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, sosial-iqtisadi hadisələr arasında əsasan düzxətli əlaqə forması baş verir . Amil əlaməti və nəticə əlaməti arasında düz əlaqə olduqda düzxətli əlaqə tənliyi qurulur. Tədqiqatlarda daha çox xətti cüt reqressiya tənliyindən istifadə olunur: Düzxətli əlaqə tənliyinin düsturu aşağıdakı kimi yazılır:

$$\bar{Y} = a \pm b\bar{X}$$

burada $\bar{X}$ və $\bar{Y}$ faktor əlamətinə uyğun nəticə əlamətinin orta qiymətidir.

a və ***b*** isə düx xəttin parametrləridir

x - amil əlamətidir,

bu tənlikdə amil əlamətinin (x) qiyməti həmişə məlumdur.

Deməli, nəticə əlamətinin orta kəmiyyətini ($\bar{Y}$) müəyyən etmək üçün a və b parametrlərini hesablamaq lazımdır.

a və b parametrlərinin tapılması ən kiçik kvadratlar üsulu ilə aparılır.

Bu da iki xətti tənlik sisteminə gətirib çıxarır:

$$an = b\sum X = \sum Y$$
$$a\sum X + b\sum X^2 = \sum XY$$

Sistem tənliyin həlli a və b parametrlərinin tapılmasına imkan verir.

Reqressiya əmsalı aid olduğu Y-in bir vahid dəyişməsi ilə X-in vahid dəyişməsini ifadə edir. Reqressiya əmsalının işarəsi asılılığın istiqamətini xarakterizə edir.

Əgər $b > 0$ olarsa, onda asılılq düz, $b < 0$ olarsa, tərs olur, x - in ilkin verilənləri arasında "0" qiyməti olan halda a sərbəst həddi y - in orta qiymətini ifadə edir.

Digər bütün hallarda $\bar{Y} = a + b\bar{X}$ ödənilir.

11.3. Xətti reqressiya tənliyinin parametrlərinin ən kiçik kvadratlar üsulu ilə təyin oluması

Reqresya tənliyinin parametrlərini təyin etmək üçün bir cox üsullardan istifadə edirlər .Onlardan biri ən kiçik kvadratlar üsulu ilə təyin edilməsidir.

Bu üsulla a və b parametrlərini hesablamaq üçün aşagıdakı formuladan istifadə edirlər.

$\bar{Y} = a + b\bar{X}$ tənliyindən

$a = \bar{Y} - b\bar{X}$

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum(x_i.y_i).\sum x_i}{n.\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{n\sum x_i.y_i - \sum x_i.\sum y_i}{n.\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$ və yaxud

$$b = \frac{\sum(x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

Misal 1.Aşagıda6 ailənin ayliq gəliri və ayda ödədiyi işıq pulunun məbləği verilib. Alələrin gəlirləri ilə ödədiyi işıq pulu arasındakı reqresiya tənliyini qurun: X –in qiymәti aylıq gəlirlərdir,y-in qiymətiı ödənilın məbləğdir (manat)

Hesablamanasanlaşdırmaq üçün cədvəl quraq.

№	X	Y	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	500	26	-308	94864	-15	4620
2	700	32	-108	11664	-9	972
3	750	40	-58	3364	-1	58
4	800	42	-8	64	1	-8
5	900	45	92	8464	4	368
6	1200	60	392	153664	19	7448

$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{4850}{6}=808{,}333\approx 808;$

$\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{245}{6}=40{,}833\approx 41$

$b=\frac{13458}{272084}=0{,}05$

$a = 41 - 0{,}05\cdot 808 = 0{,}6$ olarsa,

Axtarılan reqresiya tənliyi

$y = 0{,}6 + 0{,}05\,x$ şəklində olar.

Bu tənlikdə x-ə istənilən qiyməti verərək y-in qiymətini bilmək olar. Yəni, aylıq gəlirinə görə ödəniləcək məbləği təyin etmək olar.

Fərz edək ki, ayliq gəlir 1500 manatdır.Onda, qurulmuş reqresiya tənliyinə əsasən ödəniləcək məbləğ 75,6 olar.

Yəni,

$$y = 0{,}6 + 0{,}05\,x = 0{,}6 + 0{,}05.(1500) = 75{,}6.$$

11.4. Reqressiya tənliyinin statistik xarakteristikaların köməyi ilə qurulması

Düzxətli əlaqə tənliyinin düsturu olan $\bar{Y} = a + b\bar{X}$ tənliyindən $a = \bar{Y} - b\bar{X}$ $\quad b = r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ hesablanır.

Qetd: Əgər, r_{xy} məlim deyilsə onda, $b = \frac{\sum(x_i-\bar{x}).(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$ düsturu hesablanır.

(Bunun üçün korrelyasiya cədvəlindən istifadə etməliyik.)

Misal 2. Emal olunması üçün 6 obyektdən pamidor daşınır. Pamidorun 1 kq. qiyməti (qəpiklə) və daşınma yolunun uzunluğu (km) arasındakı asılılıq öyrənilir. Faktorlar (X və Y) arasındakı asılılığı xarakterizə edən reqresiya tənliyini qurun:

X (yolun uzunluğu –km):	5,	12,	10,	20,	18,	19
Y (1 kq- nın qiyməti):	35,	45,	52,	65,	58,	60

Həlli:

n	X-km	Y-qəpik	$X \cdot Y$	X^2
1	5	35	175	25
2	12	45	540	144
3	10	52	520	100
4	20	65	1300	400
5	18	58	1044	324
6	19	60	1140	361
n=6	$\sum 84$	$\sum 315$	$\sum 4719$	$\sum 1354$

I-ci üsul: Parametrləri ən kiçik kvadratlar üsulu ilə təyin edək:

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum(x_i . y_i) . \sum x_i}{n . \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2};$$

$$a = \frac{315 \cdot 1354 - 4719 \cdot 84}{6 \cdot 1354 - 84^2} = \frac{30114}{1068} = 28{,}19$$

$$b = \frac{n \sum x_i . y_i - \sum x_i . \sum y_i}{n . \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{6 \cdot 4719 - 84 \cdot 315}{6 \cdot 1354 - 84^2} = \frac{1854}{1068} = 1{,}735$$

Axtarılan tənlik $y = 28{,}19 + 1{,}735x$ şəklindədir

II-ci üsul: ***Statistik xarakteristikaların köməyi ilə təyin edək***:

X və Y –in qiymətləri üçün hesablanmış:

$\bar{x} = \frac{84}{6} = 14$; $\bar{y} = \frac{315}{6} = 52{,}5$; $\sigma_x = 5{,}44$; $\sigma_y = 10{,}04$; $r_{xy} = 0{,}941$

göstəricilərə uyğun reqresiya tənliyini quraq:

Həlli:

$\bar{Y} = a + b\bar{X}$ tənliyindən

$a = \bar{Y} - b\bar{X}$ *və* $b = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ hesablayaq

$b = 0{,}941 \cdot \frac{10{,}04}{5{,}44} = 1{,}735$

$a = 52{,}5 - 1{,}735 \cdot 14 = 52{,}5 - 24{,}29 = 28{,}21$

Deməli axtarılan tənlik tənlik

$y = 28{,}19 + 1{,}735x$ şəklində olar.

11.5. Reqressiya tənliyinin əmsallarının düz və tərs tənliklər üçün hesablanması

Reqressiya əmsalı $b_{x/y}$ və $b_{y/x}$ kimi işarə edilir.

Reqressiya əmsalını x-i y görə və y-i x görə aşağıdakı düsturlarla təyin edirlər:

$$b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \qquad b_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

burada r – korrelyasiya əmsalı, σ_x və σ_y orta kvadratik meyldir

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}; \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}}$$

Reqressiya əmsalının qiyməti $b_{y/x}$ x əlamətinin bir ölçü dəyişilməsinin x əlamətinin göstəricilərinə necə təsirini göstərir. Əgər reqressiya əmsalının $b_{y/x}$ işarəsi mənfidirsə, onda x əlamətinin bir ölçü qədər artması y-in bir ölçü qədər azalmasını göstərir. Əgər əlamətlər arasında korrelyasiya asılılığı xəttidirsə, yəni korrelyasiya sahəsi ellips şəklindədir, onda x-in y-dan y-ın isə x-dan asılılığını iki düzxətli tənliklərlə təsvir etmək olar. Bu tənliklər reqressiya tənlikləri adlanır.

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1 + b_{y/x} \cdot x \\ x &= a_2 + b_{x/y} \cdot y \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{– düz tənlik} \\ &\text{– tərs tənlik} \end{aligned}$$

burada x və y – təsadüfi dəyişənlər, $b_{y/x}$ və $b_{x/y}$; a_1 və a_2 – reqressiya tənliyinin əmsallarıdır. Buradanda

$$a_1 = \bar{Y} - b_{y/x} \cdot \bar{X}$$

$$a_2 = \bar{X} - b_{x/y} \cdot \bar{Y}$$

alınır,

$$b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \qquad b_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Reqressiya tənliyini aşağıdakı kimi təsvir etmək olar

$Y - \bar{Y} = b_{y/x}(X - \bar{Y})$

$X - \bar{X} = b_{x/y}(Y - \bar{X})$

Reqressiya tənliyinin keyfiyyətini qiymətləndirmək üçün qalıq orta kvadratik meyl hesablanır.

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \cdot \sqrt{1-r^2} \quad \text{və} \quad \sigma_{x/y} = \sigma_x \cdot \sqrt{1-r^2}$$

Bu qiymətlər mütləq olduğundan tənliklər bir-biri ilə müqaisə oluna bilməz. Ona görə tənliyin nisbi xəta qiyməti hesablanmalıdır:

$$\delta_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\bar{Y}} \cdot 100\%$$

$$\delta_{x/y} = \frac{\sigma_{x/y}}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

$r = \pm 1$ olarsa xətanın qiyməti sıfırdır (xəta yoxdur), $r = 0$ olarsa isə onda xətanın qiyməti böyük sayılır(maksimum) .

Misal 3: $\bar{x} = 3{,}70$; $\bar{y} = 7{,}33$; $\sigma_y = 0{,}52$; $\sigma_x = 0{,}16$; $r = -0{,}677$ olarsa, reqresiya tənliyinin əmsallarını hesablayaq:

Həlli:

$$y = a_1 + b_{y/x} \cdot \bar{x}$$

$$b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -0{,}677 \cdot \frac{0{,}52}{0{,}16} = -2{,}20$$

$$b_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0{,}677 \cdot \frac{0{,}16}{0{,}52} = -2{,}21$$

$$a_1 = \bar{Y} - b_{y/x} \cdot \bar{X} = 7{,}33 - (-2{,}20) \cdot 3{,}70 = 15{,}47$$

$$a_2 = \bar{X} - b_{x/y} \cdot \bar{Y} = 7{,}33 - (-2{,}21) \cdot 7{,}33 = 5{,}24$$

Hesablanılan a və b əmsalları ilə tənlik aşağıdakı kimi yazılır:

$$y = 15{,}47 - 2{,}20 \cdot x$$

$$x = 5{,}24 - 2{,}21 \cdot y$$

Qalıq orta kvadratik meyl hesablanılır:

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \cdot \sqrt{1-r^2} = 0{,}52 \cdot \sqrt{1-(-0{,}677)^2} = 0{,}38$$

$$\sigma_{x/y} = \sigma_x \cdot \sqrt{1-r^2} = 0{,}16 \cdot \sqrt{1-(-0{,}677)^2} = 0{,}18$$

Tənliyin xətasını hesablayaq:

$$\delta_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\bar{Y}} \cdot 100\ \% = \frac{0{,}38}{7{,}33} \cdot 100\ \% = 5{,}2\ \%$$

$$\delta_{x/y} = \frac{\sigma_{x/y}}{\bar{X}} \cdot 100\ \% = \frac{0{,}18}{3{,}7} \cdot 100\ \% = 4{,}9\ \%$$

Beləliklə, $x = 5{,}24 - 0{,}21\ y$ tənliyinin xətası kiçikdir, ona görə də idman nəticələrinin proqnozunda üstünlük bu tənliyə verilir.

11.6. Reqressiya əmsalının xətası

Reqressiya əmsalının xətası aşağıdakı düsturla hesablanılır:

$$S_{by/x} = \frac{b_{y/x}}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

Burada $S_{by/x}$ reqressiya əmsalının xətasıdır

$$b_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2 - \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}{n-2}}$$

$S_{by/x}$ üçün X və Y yerləri dəyişilir.

Etibarliliq Styüdentin t – kriteri vasitəsi ilə təyin olunur və $t = \frac{b_{y/x}}{S_{by/x}}$ düsturu ilə hesablanır.

Əgər reqressiya əmsalı σ_x, σ_y, vasitəsi ilə hesablanıbsa, onda reqressiya əmsalının xətası $S_{by/x} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$ bərabərdir.

b_1 və b_2 reqressiya əmsallarının fərqinin xətası

$$S_{d(b_1 - b_2)} = \sqrt{\frac{{S_1}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \frac{{S_2}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}.$$

Burada

$$S_{(1,2)} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2 - \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}{n-2}.$$

Müşahidələrin sayı nisbətən az olduqda ($n < 30$) reqresiya əmsallarının xətalarının fərqi düsturla hesablanır:

$$S_{d(b_1 - b_2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(n_1 - 2)S_1^2 + (n_2 - 2)S_2^2}{n_1 + n_2 - 4} \cdot \left(\frac{S_2^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \frac{S_2^2}{\sum (x_2 - \bar{x})^2}\right)}$$

Reqresiya əmsallarının fərqinin etibarlılığının (yəqinliyinin) təyini üçün Styüdentin (t) – kriteriyası hesablanır:

$$t = \frac{b_1 - b_2}{S_{d(b_1 - b_2)}}$$

Misal 4: Qiymətləri aşağıdakı cədvəldə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər üçün reqresiya tənliyini qurun.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1,2	1,9	3	5,1	6	4,2	0,9	4,9	7	6,1
Y	3,9	4,3	4	1,5	1,8	2,7	5	2	0,8	1,5

Həlli:

$\bar{x} = 4{,}03; \quad \bar{y} = 2{,}75$

$\sum x = 40{,}3; \qquad \sum y = 27{,}5$

$\sum x_i^2 = 204{,}73; \qquad \sum y_i^2 = 94{,}37$

$\sum x_i \cdot y_i = 83{,}69; \qquad \sum(x_i - \bar{x}) = 42{,}32$

$$b = \frac{n \sum x_i . y_i - \sum x_i . \sum y_i}{n . \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = -0{,}64$$

$\alpha = 5{,}33$ olduğu üçün reqresiya tənliyi

$Y = 5{,}33 - 0{,}64\,x$ şəklində olar.

Reqresiya tənliyinin hesablanmasına aid misallar :

1. İdmançıların boyu (x sm) və çəkisi (y kq) üçün reqresiya tənliyini qurun:

X	176	173	172	171	176	174	173	173	176	170
Y	66	63	63	61	67	65	63	66	66	63

2. Cədvəldə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər üçün reqresiya tənliyini qurun:

X	1,3	2	3	5,2	6,1	4,3	1	5	7,2	6,3
Y	3,9	4,4	4,1	1,6	1,9	2,8	5,2	2,1	1	1,7

3.Cədvəldə verilmiş statistik göstəricilər üçün reqresiya tənliyini qurun:

X	11	11,1	11,2	11,3	11,5
Y	18	18,1	18,3	18,4	18,9

Məlum ehtimal xarakteristikalarına əsasən reqresiya tənliyini qurun.

Misal 1. $\bar{x}$= 8,11; $\bar{y}$= 18,11; σ_x = 0,0128; σ_y = 0,3108; r_{xy}= 0,98

Misal 2. $\bar{x}$= 16,11; $\bar{y}$= 2,42; σ_x = 0,067; σ_y = 0, 234; r_{xy}= 0,67

Misal 3. $\bar{x}$= 3,02; $\bar{y}$=9,048; σ_x = 0,0232; σ_y = 0, 1176; r_{xy}= 0,8746

Misal 4. Faktorlar (X və Y) arasındakı asılılığı xarakterizə edən reqresiya tənliyini qurun:

X: 7; 11; 10; 19; 17; 21

Y: 25; 32; 55; 65; 54; 64

XII FƏSİL. PARAMETRLƏRİN QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

12.1. Orta qiymətin standart xətası.

Tərif: Baş parametrlərin həqiqi qiymətləri ilə seçmə qiymətləri arasında olan fərqə **statistik xəta deyilir.**

Statistik xəta adətən , orta və yaxud standart olur.

Eyni bir baş yığımdan coxlu sayda asılı olmayan n həcmli seçmələr götürək və onlardan hər biri üçün orta qiymət hesablayaq. Onda məlum olur ki, əldə edilmiş qiymətlər orta qiymət ətrafında – seçmənin ayrı-ayrı variantlarına nisbətən $\sqrt{n}$ dəfə az variasiya edəcək. Belə olan halda orta qiymətin standart xətasını aydınlaşdıraq. Orta qiymətin standart xətası aşagıdakı düsturun köməyi ilə hesablanır.

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Burada σ məlum olmadığı üçün onu seçmə S qiyməti ilə əvəz edirlər. Onda seçmə orta qiymətin standart xətasını qiymətləndirmək üçün

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

kəmiyyətindən istifadə edilir. Burada S -seçmənin standart meyli, $S_{\bar{x}}$ isə baş cəmin orta qiyməti seçmə cəmin orta qiyməti ilə əvəz edildikdə yol verilən xətadır. Ona görə də orta qiymətin dəqiqliyini qiymətləndirmək üçün onu, $\bar{X} \pm S_{\bar{x}}$ səklində ifadə edirlər.

Bəzən praktikada xətanı m hərfi ilə də işarə edirlər. Yəni

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$$

Burada σ- seçmənin standart meyli, n seçmədəki müşahidənin sayı, N isə baş cəmdəki müşahidələrin sayıdır.

Burada $N = \infty$ olanda,

$$\sqrt{1 - \frac{n}{\infty}} = \sqrt{1 - 0} \quad \text{olur.}$$

Əgər -seçmə yığım - n, baş yığımın - N -nin həcminin 5 - 10% təşkil edərsə, xəta aşağıdakı kimi hesablanır.

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Qeyd: Orta qiymətin xətası əlamətin dəyişməsi ilə düz mütənasib, seçmədəki müşahidələrin sayı ilə tərs mütənasibdir.

Misal 1: Fərz edək ki, 100 metr məsafəyə qaçış nəticələrinin orta kəmiyyəti və standart meyli hesablanılıb.

$\bar{x} = 15{,}4$; $\sigma = 0{,}89$; $n = 100$ verilir.

Orta qiymətin standart xətasını təyin edək:

Həlli

$S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ düsturundan istifadə edildiyi üçün

$$S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}89}{\sqrt{100}} = \frac{0{,}89}{10} = 0{,}089$$

Həqiqi nəticələr isə ($\bar{X} \pm S_{\bar{x}}$); $15{,}4 \pm 0{,}089$ intervalında yerləşir.

Qeyd: Baş yığımın variantları normal paylanarsa, onda bu kəmiyyət Styudent t– paylanma qanununa tabe olacaq.

Misal 2. Baş yığımın həcmi $N = 300$, seçmə cəmin həcmi isə $n = 30$ məlum olduqda, aşagıdakı nəticələr üçün seçmə orta qiymətin standart xətasını hesablayın:

x_i	4	4,2	4,3	4,5	4,6	4,7
n_i	5	6	8	4	4	3

Həlli:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n} = \frac{130{,}1}{30} = 4{,}33$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n} = \frac{1{,}51}{30} = 0{,}05$$

$$S = \sqrt{0{,}05} = 0{,}22$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}22}{\sqrt{30}} = 0{,}04$$

12.2. Qiymətləndirmənin mahiyyəti
Nöqtəvi qiymətləndirmə

Ümumiyyətlə seçmə yığımın qiymətləri vasitəsilə naməlum parametrlərin dəqiq qiymətlərini tapmaq mümkün deyildir. Bu yolla həmin parametrlərin yalnız təqribi qiymətlərini tapmaq olar.

Normal paylanmış baş cəmin riyazi gözləməsinitəxmin etmək üçün seçmənin orta qiymətindən (ədədi ortadan) istifadəedirik. Baş cəm üçün tapılmış təqribiqiymətlər bir ədəddənibarət olduğu üçün onlara nöqtəvi qiymətləndirmələr deyilir. Nöqtəvi qiymətləndirmələr baş cəmin parametrlərinin əsil qiymətlərindən xeyli fərqlənə bilərlər. Məhz bu səbəbə görə, parametrlər üçün tapılmış təqribi qiymətlərində dəqiqlik və etibarlılıq məsələləri intervallı qiymətləndirm əüsulu ilə, yəni etibarlılıq intervallarının qurulması vasitəsiilə həyata keçirilir.

Tərif 1. Parametrlər üçün orada tapılmış qiymətlər bir ədəddən ibarət olduğu üçün onlara **nöqtəvi qiymətləndirmələr** deyilir.

Tərif 2. Müəyyən intervalın uclarının ədədlərlə təyin olunaraq qiymətləndirilməsi **interval qiymətləndirməsi** adlanır.

Deməli, interval qiymətləndirməsi 2 ədədlə, nöqtəvi qiymətlndirmə bir ədədlə təyin edilir.

Qiymətləndirmənin dəqiqliyini xarakterizə edən etibarlılıq intervalının uzunluğu seçmənin n həcmindən və a etibarlılıq ehtimalından asılıdır. Belə ki, seçmənin həcmi artdıqca etibarlılıq intervalının uzunluğu kiçilir, etibarlılıq ehtimalı vahidə yaxınlaşdıqca isə onun uzunluğu artır

$1 - a$ ədədinə əhəmiyyətlilik səviyyəsi deyilir. Statistik tədqiqatlarda həll edilən məsələlərin əhəmiyyətindən və çıxarılan nəticələrin məsuliyyətindən asılı olaraq $1 - a$ əhəmiyyətlilik səviyyəsini $\alpha = 0{,}1$; $\alpha = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}01$ qiymətlərindən istifadə edilir. Etibarlılıq ehtimalının seçilməsi riyazi məsələ deyil və bilavasitə həll edilən problemlərin məzmununa görə təyin edilir.

Tutaq ki, iki müəssisədə keyfiyyətli məhsulun buraxılma ehtimali $p = a = 0{,}99$-a bərabərdir. Deməli, keyfiyyətsiz məhsulun buraxılma ehtimalı $1 - a = 0{,}01$ −dir. Riyazi nöqteyi nəzərdən, yəni məlumatın xarakterilə maraqlanmadan, a ehtimalının kiçik və ya böyük olduğunu müəyyən etmək olarmı?

Tutaq ki, müəssisələrdən biri elektrik lampası, digəri isə paraşüt istehsal edir. Qəbul edək ki yüz lampadan biri zaydır. Lampaların bir faizinin atılması, texnoloji prosesin yenidən qurulmasına nisbətən ucuz başa gələrsə bununla barışmaq olar. Ancaq yüz paraşütdən birinin zay olması çox ciddi və arzuolunmaz nəticələrə gətirib çıxarır. Beləliklə, birinci halda zay olma ehtimalı qəbul edilən, ikinci halda isə qəbul edilməzdir. Ona görə də etibarlılıq ehtimalı məsələnin məzmununa əsasən müəyyən edilməlidir.

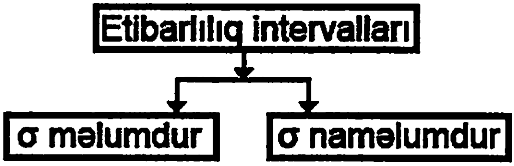
12.3. İnam intervalı. (etibarlı interval)

Tərif 3. Oiymətləndirilən baş parametrlərin verilmlş inam ehtimalı ilə daxil olduğu interval **etibarlı interval** (inam intervalı) adlan.

Başqa sözlə: İnterval qiymətləndirməsi , baş cəmdən seçmə götürülərək araşdırılıb baş cəmin hansı intervalı əhatə etməsini tapmaqdan ibatətdir.

Bütün bunları nəzərə alaraq demək olar ki, **interval parametrin həqiqi qiymətinin daxil olduğu diapazonunu göstərir**

Etibarlılıq intervalı tapılmış qiymətləndirmələrin dəqiqliyini, etibarlılıq ehtimalı isə qiymətləndirmələrin etibarlılığını xarakterizə edir.



İnam intervalının sərhədlərini tapmaq üçün aşagıdakı formuladan istifadə edilir.

$\bar{X} - t_{\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}+t_{\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ (baş cəm üçün)

$\bar{X} - Z_{\propto/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\propto/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ (seçmə cəm üçün)

Buradakı $Z_{\propto/2}$- parametrinin qiymətləri məlum olan n və α -dan asılı olaraq Styudent paylanmasının məlum qiymətləri cədvəlindən götürülür. Daha sonra inam intervallar (sərhədlər) hesablanılır və düstura tətbiq olunur.

Düsturdakı μ baş cəmin (yığımın) orta qiymətidir. S–seçmənin standart meylidir. $n \geq 30$ olduqda Styudent t paylanmasınormal paylanmaya keçir. Ona görə də bu halda normallaşdırılmış normal paylanma cədvəlindən istifadə edilir.

Burada $t_{\propto}$ -normalaşdırılmış paylanmanın faiz nöqtəsidir. Çox vaxt α –nın daha münasib təqribi qiyməti olaraq, orta qiymət götürülür $(a = \bar{x})$

Misal 4. Fərz edək ki, $\bar{x} = 36{,}06$; $\sigma = 0{,}28$; $n = 10$; a –nin əsl qiymətinin α = 0,99 ehtimal ilə yerləşdiyi inam intervalını (etibarli interval) tapaq:

$$t_{\propto} = 2{,}576.$$

Bu halda ölçmənin dəqiqliyini hesablayaq:

$$\delta = \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\propto} = \frac{0{,}28}{\sqrt{10}}.2{,}576 = 0{,}23$$

Deməli, α = 0,99 ehtimal ilə etibar etmək olar ki, a –nin əsl qiyməti

$$\bar{x} - 0{,}23 = 36{,}06 - 0{,}23 = 35{,}8,$$
$$\bar{x} + 0{,}23 = 36{,}06 + 0{,}23 = 36{,}29$$

intervalında yerləşir.

Ümumiyyətlə, standart inam ehtimalları (95%, 99%, 99,9%) üçün t_α -nın qiyməti aşagıdakı cədvəldə verilib.

α	$1-\alpha$	t_α
0,05	0,95	1,96
0,01	0,99	2,58
0,001	0,999	3,28

Fərziyyələr:

1. Ba cəmin standart meyli məlumdur.
2. Baş cəm normal paylanmaya sahibdir.

Bu şərtlərin hamısı ödənilərsə, etibarlılıq intervalı aşağıdakı düsturla hesablanır

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

burada $\bar{X}$– nöqtəvi qiymətləndirmə, $Z_{\alpha/2}$-normal paylanmada $\alpha/2$ ehtimalına uyğun gələn mühüm dəyər, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ isə ədədi ortanın standart meylidir.

Misal 5. Baş cəmdən 81 şagird (öyrənci) seçilb. Bu şagirdlərin riyaziyyat fənindən aldıqları balın orta qiyməti 60 -dır. Orta qiymətin standart xətası təxminən 1,45 olaraq hesablanmışdır.

Bu göstəricilərə görə baş camin orta qiymətinin 95% inam aralığı neçədir ($Z_{\alpha/2} = 1{,}96$ cədvələ əsasən məlumdur):

Həlli:

$n = 81$, $\bar{x} = 60$, ($\mu = 60$); $S_{\bar{x}} = 1{,}45$ verildiyinə əsasən

$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{S}{\sqrt{n}}$

$\frac{S}{\sqrt{n}} = 1{,}45$ olduğu üçün

$60 - 1.96 \cdot 1{,}45 < \mu < 60 + 1{,}96 \cdot 1{,}45$

$57{,}158 < \mu < 62{,}842$ aralığıdır.

Misal 6: Verilir: $\bar{x} = 15$; $S = 5$; $n = 100$, μ üçün 90% dən böyük olan inam intervalını təyin edin:

Həlli:

90%-dən böyük dediyi üçün yalnız müsbət hissəni hesablamaq lazımdır. Yəni, $\bar{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ hesablanılır. Burada $Z_{\alpha/2}$ cədvələ görə 1,64 bərabər olduğu üçün

$$15 + 1{,}64 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} = 15 + 1{,}64 \cdot \frac{5}{10} = 15{,}82 .$$

Deməli, $\mu < 15{,}82$ intervalındadır.

Misal 7: Fərz edək ki, baş cəmdən götürülmüş seçmənin sayı $n = 25$, $\bar{x} = 50$ və $s = 8$ -dir. 95% əminliklə orta qiymətin intervalını hesablayın:

(cədvələ əsasən $Z_{\alpha/2} = t_{\alpha/2} = t_{0{,}025} = 2{,}0639$ məlumdur)

Həlli:

$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 50 \pm (2{,}0639) \cdot \frac{8}{\sqrt{25}}$

$50 + (2{,}0639) \cdot \frac{8}{\sqrt{25}} = 53{,}30224$

$50 - (2{,}0639) \cdot \frac{8}{\sqrt{25}} = 46{,}698$

Deməli, 95% əminliklə deyə bilərik ki, seçmə cəmin orta qiyməti $46{,}698 \leq \mu \leq 53{,}30224$ intervalındadır.

Misal 8. Normal paylanmış əlamətin standart meyli, seçmənin ortası (ədədi orta) və seçmənin həcmi verilib: $S_x = 1{,}5$; $\bar{x} = 16{,}8$;

$n = 12$. Styudentin paylanmasından istifadə edərək $\alpha = 0,95$ etibarlığı ilə naməlum (məlum olmayan) riyazi gözləməni qiymətləndirin:

Həlli: $\alpha = 0,95$ və $n = 12$ olduqda $t_\alpha = t(\alpha,\ n)$ qiymətlər cədvəlindən $t_\alpha = 2,20$ qiyməti seçilir və intervalın sərhədləri təyin edilir.

$$\bar{X} - t_\alpha \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 16,8 - 2,20 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}} = 16,8 - 0,95 = 15,85$$

$$\bar{X} + t_\alpha \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 16,8 + 2,20 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}} = 16,8 + 0,95 = 17,75$$

Styudentin paylanmasına əsasən riyazi gözləməni qiymətləndirmək üçün inamlı intervalı aşagıdakı düsturla hesablayaq.

$$\bar{X} - t_\alpha . \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Beləliklə, naməlum riyazi gözləmənin qiyməti $15,58 < \mu < 17,75$ intervalına düşür.

Qiymətləndirmənin dəqiqliyi isə $t_\alpha = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$ olur.

Misal 9: 50 nəfərdən ibarət X sinif şagirdlərinin 100 m məsafəyə qaçışda göstərdikləri nəticələr üçün, $\bar{X} = 15,4$ (san), $S = 0,94$ (san) verilmişdir. Orta qiymət üçün 95% -li etibarlı intervalın sərhədlərini təyin edin: ($\alpha = 0,05$, $t_\alpha = 1,96$).

Həlli:

$$\bar{X} - t_\alpha . \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_\alpha . \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$15,4 - 1,96 \cdot \frac{0,94}{\sqrt{50}} < \mu < 15,4 + 1,96 \cdot \frac{0,94}{\sqrt{50}}$$

$$15,5 < \mu < 15,7$$

Beləliklə, Orta qiymət üçün 95% -li etibarlı intervalın sərhədləri 15,5 və 15,7 olar.

Misal 10: Seçmənin həcmi $n = 30$ məlum olduqda, seçmə orta qiymətin standart xətasını hesablayın:

$\bar{x} = 4,33;\ S_x = 0,22;\ \alpha = 0,05;\ \gamma = n - 1;\ t_{\alpha\gamma} = 2,05$

Həlli:

$\bar{X}$ - $t_\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

$4{,}33 - 2{,}05 \cdot \frac{0{,}22}{\sqrt{30}} \le \mu \le 4{,}33 + 2{,}05 \cdot \frac{0{,}22}{\sqrt{30}}$

$4{,}33 - 0{,}082 \le \mu \le 4{,}33 + 0{,}082$

$4{,}248 \le \mu \le 4{,}412$

Orta kvadratik meyli qiymətləndirmək üçün (məlum cədvəldən) q təyin olunur.

P = 0,95; α= 0,05; n=30; q = 0,28

$S_x(1-q) < \sigma < S_x(1+q)$

$0{,}22\ (1 - 0{,}28) < \sigma < 0{,}22.(1 - 0{,}28)$

$0{,}158 < \sigma < 0{,}282$

Aşagıdakı tapşırıqları həll edin:

1. Normal paylanmış əlamətin standart meyli, orta kəmiyyəti və həcmi verilib:
$\bar{x}$= 20,12; S_x =3 ; n = 25. Styudentin paylanmasından istifadə edərək α = 0,95 etibarlığı ilə naməlum riyazi gözləməni qiymətləndirmək üçün inam intervalının sərhədlərini tapın:
cavab: (18,57; 21)

2. Normal paylanmış əlamətin standart meyli, orta kəmiyyəti və həcmi verilib:
$\bar{x}$= 14,2; S_x = 2,4; n = 9; α = 0,99 etibarlığı ilə naməlum riyazi gözləməni qiymətləndirməli.
cavab: (11,5; 16, 9)

3. İnam intervalının sərhədlərini müəyyənləşdirin;
$\bar{x}$ = 7,5 ; S_x = 0,94; n = 19; α = 0,05; t_α = 2,2
cavab: (7,03; 7,97)

4. Normal paylanmış X əlaməti üçün $\alpha = 0,95$ ilə məlum olmayan μ riyazi gözləməni qiymətləndirmək üçün inam intervalının sərhədlərini tapın:

a) $\bar{x} = 4,1$; $\sigma = 3$; n = 36;

b) $\bar{x} = 53,4$; $S_x = 11$; n = 36

c) $\bar{x} = 16,8$; $S_x = 5$; n = 25

d) $\bar{x} = 45,82$; $S_x = 8,63$; n = 50

XIII FƏSİL. HİPOTEZLƏRİN YOXLANMASI

13.1. Hipotez haqqında əsas anlayışlar

Hipotez termini yunancadan (hypothesis) tərcümədə fərziyyə, güman, təxmin və ya ehtimal mənasını bildirir.

Hipotezlər adətən müəyyən faktların müşahidəsinə əsasən irəli sürülür və həmin faktların ümumiləşdirilməsi cəhdidir. Hipotez dedikdə, müəyyən hadisələr toplusunu izah edən inkişaf qanunauyğunluqları haqqında elmi cəhətdən əsaslandırılmış güman (təxmin) başa düşülür. Bunu isə yoxlamaq və sübut etmək tələb edilir.

İrəli sürülən hipotezin yoxlanılması tədqiqatın məqsədlərinə uyğun olaraq xüsusi təşkil edilmiş elmi müşahidə və ya eksperiment nəticəsində əldə edilmiş faktların köməyi ilə mümkün ola bilər. Bunun üçün aparılmış eksperimentin və ya tədqiqatın nəticələri haqqında kütləvi məlumatlara malik olmaq lazımdır. Həmin kütləvi məlumatların kəmiyyətcə ifadəsi təsadüfi kəmiyyətlərlə xarakterizə edilir.

Qeyri-müəyyənlik şəraitində müşahidə edilən təsadüfi kəmiyyətlərə görə, nəzəri fərziyənin (gümanın) doğruluğunun yoxlanması statistik hipotezlərin köməyi ilə aparıla bilər.

Tərif: Riyazi üsullarla yoxlanılan ölçü nəticələrinin statistik xarakteristikalarına münasib fərziyyələr statistik hipotez adlanır.

Başqa sözlə: Baş cəmin bilinməyən parametrləri barədə iddialı fərziyələrə hipotez deyilir.

Təcrübədə tez-tez sınaqların, müşahidələrin və s. nətiçələrinə əsasən konkret kütləvi hadisənin xarakteristikaları haqqında müxtəlif hipotezləri yoxlamaq tələb olunur.

Statistik hipotezlərin yoxlanılması metodları təcrübədə geniş tətbiq edilir. Məsələn, müəssisələrin əmək məhsuldarlığına görə planı yerinə yetirmələrinə nəzarət, kənd təsərrüfatı bitkilərinin məhsuldarlıqlarının müqayisəsi, istehsal edilən məhsulun keyfiyyəti və s. statistik hipotezlərin yoxlanılmasına əsaslanır.

Digər bir misala nəzər salaq: Marketdən aldığımız hər hansı ərzaq bağlamasının üzərində onun ölçü miqdarı yazılır (məsələn 500qr) bu çəkinin doğru olub -olmamasını yoxlamaq üşün statistikanın bir bölməsi olan Hipotez testi aparmalıyıq. Ümumiyyətlə bu cür məsələ və həmçinin ayrı-ayrı qrupların orta nəticələrinin müqayisəsi, qarşılıqlıəlaqəəmsalının etibarlığının qiymətləndirilməsi və digər məsələlərin həlli statistik hipozetlərin yoxlanmasıüsulları ilə arapılır. İdman sahəsində də bəzi hadisələrin analizi zamanı bir sıra göstəricilərin ölçülməsi üçün çox vaxt yekunlaşdırıcı nəticəçıxarmağa lazım gətirir.

Məsələn: hər hansı məşqdən sonraməşq edən 15 nəfər idmançının 3-də qeyritam (xoşa gəlməz)bərpaolunma müşahidə edilirsə, buna əsaslanaraq məşqin ağırlığı haqda fikir söyləmək olmaz. Əgər bu xoşagəlməz fakt 15 nəfər idmançının hamısında müşahidə olunarsa, onda məşqin düzgün qurulmaması haqda fikir söyləmək mümükündür. Bu fərziyənin söylənməsi üçün statistik hipotezin yoxlanması lazımdır.

13.2. Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının əsas anlayışları

Parametrin doğruluğunu yoxlamaq üçün hipotez testindən istifadə edilir. Hipotez testi vasitəsilə seçmədən əldə edilən statistiklə baş səm parametri haqqında qərar qəbul edilir. Yəni, statistik hipotezlər seçmə və baş cəmdən əldə edilən nəticələr vasitəsi ilə yoxlanılır.

Bir hipotez testində iki hipotez olur:

H_0: **Sıfır hipotez (boş hipotez)**

H_1: **Alternativ hipotez**

Hipotezləri riyazi olaraq təsvir etmək üçün hipotezin işarəsindən sonra iki nöqtə (:) qoyulur və ondan sonra hipotezin məzmunu yazılır.

Sifir hipotezi.

Tərif: İrəli sürülən hər bir başlanğıc hipotezə sıfır hipotezi deyilir. Əsas hipotez kimi işarə edilir və H_0 ilə işarələ edilir. Hər zaman İnandığımız vəziyyət H_0 hipotezində yazılır.

Başqa sözlə- Sifir hipotezi dedikdə, baş cəmdə bildiyimiz doğruları H_0 -də ifadə edirik. Yəni, isbat zamanı H_0-nin doğru olduğunu isbat edirik və həmişə isbat zamanı sıfır hipotezi əksini isbat edənə qədər doğru olaraq qəbul edilir. Sıfır hipotezi hər hansı bir dəyişikliyi qəbul etməyəndir.

Alternativ hipotez

Tərif: Əsas hipotezə zidd olan hər bir hipotezə alternativ (rəqib) hipotez deyilir və H_1 ilə işarə edilir. Yəni, **sıfır** hipotezində yer alan vəziyyətin əksi alternativ hipotez adlanır .

Başqa sözlə: Alternativ hipotez, sıfır hipotezində isbat etdiyimizin əksini bildirən hipotezdir. Biz həmişə sifir hipotezində iddia edilənin doğru olub -olmamasını yoxlamaq üçün aparılan mərhələlərdə test statistikası aparmalıyıq.

Misal: Baş cəm üçün əhalinin ortalama yaşının 50 olduğu iddia edilir.

$H_0: \mu = 50$

$H_1: \mu \neq 50$

Daha sonra baş cəmdən seçmə verilənlər götürülür və hesablamalar aparılır. Fərz edək ki, seçmə cəm üzərindən hesabladığımız ortalama yaş həddi 20-dir. Bu nəticə iddia edilən nətəcədən çox kiçikdir, yəni $20 < 50$. Buna görədə biz sıfır hipotezini (H_0) rədd edirik.

Yəni, baş cəm üçün ortalama yaşının 50 olduğu düzgün təxmin edilməyib.

Əgər, seçmənin orta qiyməti təxmin etdiyimiz orta qiymətə yaxındırsa H_0- hipotezi qəbul edilir. Əksinə, seçmənin orta qiyməti təxmin elədiyimiz orta qiymətdən uzaqdırsa H_0 rədd edilir. O zaman belə bir sual yaranır.

Seçmənin orta qiyməti təxmin etdiyimiz orta qiymətdən nə qədər uzaq olduqda biz H_0- hipotezini rədd edirik?

Bunun üçün biz test üzrə mühim (kritik) dəyəri hesablamalıyıq. Hesablayacağımız bu rəqəm bizə qərar qəbul etməyə köməklik edəcək.Yəni, bu rəqəm bizə H_0-ın qəbul olunma və rədd edilmə sahələrini verəcəkdir.

Testin statistikası-Sıfır hipotezinin qəbulu və rədd edilməsinin öyrənilməsidir.

13.3. Test zamanı yaranan xətalar

Hipotez testində qərar qəbul etmə zamanı aşağıdakı xətalar (səhvlər) ola bilər:

I növ xəta və II növ xəta:

I növ xəta : H_0-sıfır hipotezinin doğru olduğu halda onun rədd edilməsi zamanı yaranır.Yəni düzgün sıfır hipotezi (H_0) rədd edilir. Bu çox ciddi xətadır. Bu xətanın ehtimalı α (alfa) ilə işarə edilir. Birinci növ xətanın ehtimalına **kriteriyanın əhəmiyyət səviyyəsi** deyilir.

II növ xəta: H_1 - alternativ hipotezin doğru olduğu halda onun rədd edilməsi zamanı yaranır.Yəni, burada yalnış sıfır hipotezi (H_0) rədd edilməmişdir.
Bu xətanın ehtimalı β (beta) ilə işarə edilir.

1- β ilə **testin gücü** işarə edilir.(testin qiyməti)

Tərif: Hipotezin qəbul və ya rədd edilməsi müəyyən kriterinin (mühüm dəyər) əsasında aparılır. Qabaqcadan verilmiş

ehtimallıqla həqiqi hipotezin qəbulu və səhv hipotezin rədd edilməsi qanununa **statistik kriteriya** deyilir.
Məlumdur ki, ən geniş yayılmış əhəmiyyət səviyələri: $\alpha = 0{,}05; 0{,}01; 0{,}001$-dır

Tərif: $q = 1 - \alpha$ kəmiyyətinə **inam ehtimalı** deyilir.

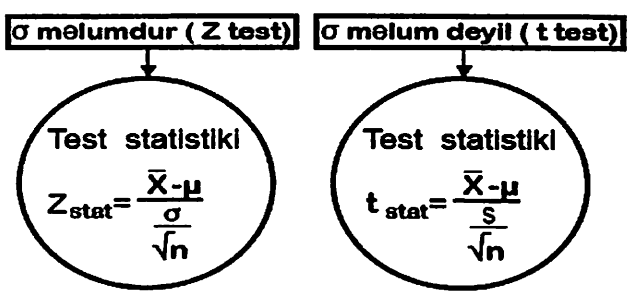
Əgər $\alpha = 0{,}05$ olarsa bu onu göstəriri ki, seçmə qiymət orta hesabla (ortalama) 100 müşahidədə 5 dəfə təsadüf edilib. Onda, $q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ olar.

Hipotez testini mümkün halları

Qərar	H_0 düzdür	H_0 səhvdir
H_0 rədd edilmir	xəta yoxdur ehtimal $q = 1 - \alpha$	II növ xəta ehtimal β
H_0 rədd edilir	I növ xəta ehtimal α	Xəta yoxdur ehtimal $q = 1 - \beta$

Hipotez testinin hesablanması baş cəmin standart meylinin (s) məlum olub-olmasından asılı olaraq dəyişir.

μ –nin Hipotez testi



13.4. Hipotezlərin yoxlanması sxemi

1. Sıfır hipotezi (H_0) və alternativ hipotez (H_1) təyin edilir.
2. Əhəmiyyət səviyyəsinin seçilməsi (α)- müəyyən edilir.
3. Test statistiyi t_{stat} və Z hesablanır.
4. Qəbul və rədd sahələrini təyin edən kritik dəyər tapılır (Z_α).
5. Qərar qəbul edilir: Əgər, t_{stat} və Z-in hesablanmış qiyməti kritik dəyərin kənarındadırsa (rədd sahəsinə düşərsə) H₀ - hipotezi rədd edilir. Əksinə, kənarında deyilsə onda H₀ - hipotezi qəbul edilir.

Misal 1: (σ məlumdur): A müəssisəsinin istehsal etdiyi topların ortalama diametrinin 30 olduğu iddia edilir və $H_0 = 0.8$, $a = 0.05$, n = 100 və $\bar{x} = 29{,}84$ məlum verilənlərdir.

Həlli:

$H_0: \mu = 30$

$H_1: \mu \neq 300$

σ məlum olduğu üçün Z testindən istifadə edəcəyik

$a = 0.05$ ehtimalla Z dəyəri $\pm 1{,}96$–dır (məlum cədvəldən təyin edilir)

Z testini hesablayaq.

$$Z_{stat} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{29{,}84 - 30}{\frac{0{,}8}{\sqrt{100}}} = \frac{-0{,}16}{0{,}08} = -2$$

Z_{stat} -in hansı sahəyə düşdüyünə baxaq və qərar qəbul edək:

$Z_{stat} = -2 < -1{,}96$ olduğu üçün sıfır hipotezi ($H_0: \mu = 30$) rədd edilir.

Belə nəticəyə gəlirik ki, A müəssisəsinin istehsal etdiyi topların ortalama diametrinin 30 olduğu iddiası qəbul edimir. Deməli, istehsal edilən topların ortalama diametri 30-a bərabər deyil.

Hipotez testində p yanaşması:

1. Sıfır hipotezi (H_0) və alternativ hipotez (H_1) təyin edilir.
2. Etibarlılıq səviyyəsi *(a)* və seçmə sayı müəyyən edilir.

3. Uyğun test statistiki s məlum olub olmamasından asılı olaraq Z və ya t müəyyən edilir.
4. Test statistiki və p dəyəri hesablanır.
5. Qərar qəbul edilir: Əgər p-dəyəri α -nın qiymətindən kiçik olarsa, onda H_0 rədd edilir, Əgər p-dəyəri α -nın qiymətindən böyük olarsa, onda H_0 qəbul edilir.

Yuxarıdakı misalı p yanaşması ilə həll edək:

$H_0: \mu = 30$

$H_1: \mu \neq 30$ (iki quyruqlu testdir)

$a = 0.05$ və $n = 100$ götürək

σ məlum olduğu üçün Z testindən istifadə edəcəyik

Test statistikinin hesablanması: $n = 100$ olan seçmənin orta qiymətinin 29.84 olduğunu fərz edərsək, Z testimiz belə olacaqdır.

$$Z_{stat} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{29{,}84 - 30}{\frac{0{,}8}{\sqrt{100}}} = \frac{-0{,}16}{0{,}08} = -2$$

P - dəyərinin hesablanmasında: Z dəyərimiz (-2) - yə bərabərdir. Z cədvəlindən (-2) -yə uyğun gələn ehtimalı tapırıq. Bu ehtimal 0,0228 dir. Hər iki quyruqda qalan ehtimalların cəmi bizim P dəyərimizdir.

$P(Z < -2) = 0{,}0228$; $P(Z > 2) = 0{,}0228$

$P = 0{,}0228 + 0{,}228 = 0{,}0456$

$p = 0{,}0456$; $\alpha = 0{,}05$; Buradan $0{,}0456 < 0{,}05$ alınır.

Yəni, H_0 rədd edilir.

Nəticə: İstehsal edilən topların ortalama diametri 30-a bərabər deyil.

Misal 2: Orta qiyməti 50, standart meyli 10 olan bir cəmdə, $P(35 < x < 55)$ ehtimalının Z –dəyərini tapın:

Həlli: $\mu = 50$; $\sigma = 10$ məlumdur. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$; $X = Z \cdot \sigma + \mu$

$X = 35$ üçün hesablayaq: $Z = \frac{35-50}{10} = -15$

$X = 35$ üçün hesablayaq: $Z = \frac{55-50}{10} = 0,5$

$P(-1,5 < x < 0,5)$ ola bilər.

Nəticə: $P(35 < x < 55)$ olması üçün $P(-1,5 < x < 0,5)$ ehtimal olunur.

Misal 3: (σ məlum deyilsə): Qol saatı istehsal edən şirkətin meneceri iddia edir ki, xam maddələrin qiyməti bahalaşır və bir saatın maya dəyərinin orta qiyməti 52 manata başa gəlir (ortalama qiymət). Şirkətirəli sürülmüş bu iddianın doğruluğunu yoxlamaq istəyir. Xam malın standart yayınması $S = 10$ hesablanmışdır. (fərzedək ki, seşmə normal paylanmaya sahibdir).

Testin yoxlanması:

1) $P(-1,5 < x < 0,5)$ $H_0 \leq$ 52 (orta qiymət 52 manatdan çoxdeyil)

$H_1: \mu > 52$ (orta qiymət 52 manatdançoxdur, menecerin iddiası)

2) $a = 0,10$; $n = 25$; $f = 25 - 1 = 24$
3) σ məlum olmadığı üçün t testindən istifadə edəcəyik
4) $a = 0,10$ ehtimalla $\pm t_{24;0.10} = \pm 1.318$
5) t testimizi hesablayaq:

$$t_{stat} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{53,1-52}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = 0,55$$

t_{stat} -nın hansı sahəyə düşdüyünə baxaq və qərar qəbul edək $t_{stat} = 0.55 \leq 1,318$ olduğu üçün sıfır hipotezi ($H_0: \mu \leq 52$) qəbul edilir (rədd edilmir).

Nəticə: Bir saatın maya dəyərinin orta qiymətinin 52 manatdan yüksək olduğuna dair əsaslı sübut yoxdur.

Misal 4: Təxminən gündə μ=5000 istehsal edən dəzgah bir neçə təmirdən sonra dəyərini itirildiyi iddia edilir. 7 gün araşdırılır və aşağıdakı nəticələr əldə edili.

X: 4980; 4985; 4978; 4992; 5010; 4991; 5000 ($\alpha = 0,05$) (n = 7)

Həlli:

$H_0: \mu = 5000$

$H_0 : \mu < 5000$

$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} = 4990$; $\sigma = 10$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{4990-5000}{10\sqrt{7}} = -2{,}64$$

$z_\alpha = z_{0.05} = 1{,}64$

$Z = -2{,}64$ və $z_\alpha = 1{,}64$ alınır.

Deməli, $z_\alpha > Z$ yəni $1{,}64 > -2{,}64$

Nəticə: İddia qəbul olumadı.

13.5. İki orta kəmiyyət arasındakı fərqin test edilməsi (asılı olmayan seçmələr)

İki baş cəmin (toplunun) orta qiyməti arasındakı fərq iki metodla test edilir:

I –ci üsul: σ_1 və σ_2 məlum deyil və fərz edilir ki, bir-birinə bərabərdir.

Fərzi edək ki, seçmələr təsadüfi və müstəqil şəkildə seçilmişdir, hər iki cəm normal paylanmaya sahibdir.

Bu fərziyələr olduğu zaman, standart kənarlaşmanı (σ) təxmin eləmək üçün biz S_p-dən (toplanmış-dispersiya) istifadə edəcəyik. Burada σ məlum olmadığı üçün S_p və t_{stat} hesablamaq lazımdır.

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1{}^2 + (n_2 - 1)S_2{}^2}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}$$

$$t_{stat} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p{}^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

burada, $(f = (n_1 - n_2) - 2$ bərabərdir (sərbəstlik dərəcəsi).

μ_1 və μ_2 üçün etibarlılıq intervalları aşağıdakı kimi hesablanır:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S_p{}^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

Misal 5: Fərz edək ki, kontrol (x_i) və eksperimental (y_i) qruplarda idmançıların qaçış sürətinin nəticələri (m/san) arasındakı fərqi müqayisə edib,eksperimentin effektivliyini təyin etməliyik. Deyək ki, əldə edilən məlumatlar aşağıdakılardır.

$n_1 = 21$; $\bar{X} = 3{,}27$; $S_x = 1{,}30$; $n_2 = 25$; $\bar{X} = 2{,}53$; $S_x = 1{,}16$;

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{(n_1-1)(n_2-1)} = \frac{(21-1)1{,}30^2 + (25-1)1{,}16^2}{(21-1)(25-1)} = 1{,}5021$$

$$t_{stat} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(3{,}27 - 2{,}53) - 0}{\sqrt{1{,}5021\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{25}\right)}} = 2{,}040$$

(kəsrin surətindəki 0 rəqəmi sıfır hipotezidir)

t_{stat} in hansı sahəyə düşdüyünə baxaq və qərar verək.

$a = 0{,}05; d.f. = 21 + 25 - 2 = 44$

$t = \pm 2{,}0154$

$t_{stat} = 2{,}040 > 2{,}0154$ olduğu üçün H_0 rədd edilir. Belə nəticəyə gəlirik ki, iki qrup idmançıların nəticələri arasında arasında fərq var.

H_0-ı rədd edilir. Bəs biz 95% əmin ola bilərikmi $\mu_1 > \mu_2$. Bunun üçün biz

$\mu_1 - \mu_2$ görə 95% etibarlı interval qurmalıyır

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$0{,}74 + 2{,}0154 \cdot 0{,}3628 = 0{,}009$

$0{,}74 - 2{,}0154 \cdot 0{,}3628 = 1{,}471$

Deməli, sıfır rəqəmi intervala daxil olan bütün rəqəmlərdən kiçikdir. Buna görə də, biz 95% əminik ki, $\mu_1 > \mu_2$.

II üsul: σ_1 və σ_2 naməlumdur və fərz edilir ki, bir-birinə bərabər deyil.

Fərziyyələr:

Seçmələr təsadüfi və müstəqil şəkildə seçilmişdir.

Hər iki cəm normal paylanmaya sahibdir.

Hər iki cəm standart kənarlaşması naməlumdur və bir-birindən fərqli olduğu fərz edilir.

Bu fərziyələr olduğu təqdirdə, (t_{stat}) aşağıdakı kimi hesablanacaqdır

$$t_{stat} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

Test zamanı aşağıdakı mərhələlər izlənir:

Seçmələrin orta qiymətləri arasındakı fərq tapılır.

$$D_i = \bar{X}_2 - \bar{X}_1.$$

Fərq üzrə orta qiymət hesablanır (buradakı n fərqlərin sayıdır).

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n}.$$

Fərq üzrə standart kənarlaşma hesablanır.

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum(D_1 - \bar{D})^2}{n-1}}.$$

μ_D- üzrə test statistiyi hesablanır ($f = n - 1$)

$$t_{stat} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}.$$

$t_{stat.}$ - nin hansı sahəyə düşdüyünə baxılır və qərar qəbul edilir.

μ_D - üzrə etibarlılıq intervalı müəyyən edilir.

$$\bar{D} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}.$$

Misal 6: XYZ şirkəti satış təmsilçilərini "müştəri məmnuniyyətinin artırılması" təliminə göndərmişdir. Şirkət təlimin müştəri şikayətlərinə təsirini ölçmək istəyir. Təhlil üçün aşağıdakı məlumatlar toplanmışdır:

Şikayətlərin əvvəlki sayı (X); Şıkayətlərin sonrakı sayı (Y)

satıcı	X	Y	$Y - X$ (D_i)
1	6	4	-2
2	20	6	-14
3	3	2	-1
4	0	0	0
5	4	0	-4

$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{-21}{5} = -4{,}2$

$S_D = \sqrt{\frac{\sum(D_1-\bar{D})^2}{n-1}} = 5{,}67$

$H_0{::}\ \mu_D = 0$

$H_0:\ \mu_D \neq 0$

$a = 0.01;\ t_{0{,}005} = \pm 4{,}604\quad d.f. = n-1 = 4$

$t_{stat} = \frac{\bar{D}-\mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} = \frac{-4{,}2-0}{5{,}67/\sqrt{5}} = -\ 1{,}66$

$t_{STAT} = -1{,}66 > -4{,}604$ olduğu üçün H_0 rədd edilmir. Belə nəticəyə gəlirik ki, təlimin müştəri şikayətlərinə ciddi təsir etdiyinə dair kifayət qədər sübut yoxdur.

Fişer kriterisi (F testi)

F testi iki dispersiya arasındakı fərqi test edir və aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$F_{stat} = \frac{S_1^2}{S_2^2};\qquad d.f_1 = n_1 - 1;\qquad d.f_2 = n_2 - 1.$$

Misal 7: Fərz edək ki, iki şirkətinmaliyyə göstəricilərinin təhlili sahəsində çalışırsınız. (X və Y) səhmlər üzrə gəlirlərinin müqayisə edilməsi sizdən istənilir. Deyək ki, siz aşağıdakı məlumatları əldə etmisiniz:

$n_1 = 21;\ n_2 = 25;\ \bar{X} = 3{,}27;\ \bar{Y} = 2{,}53;\ S_x^2 = 1{,}30;\ S_y^2 = 1{,}16;$

Hər iki cəminn normal paylanmaya sahib olduğunu fərz edərək, dispersiyalar arasındakı fərqi hesablayaq (a = 0,05):

$H_0 : S_x^2 = S_y^2$

$H_0 :\ S_x^2 \neq S_y^2$

$a = 0{,}05;$

$f_1 = n_1 - 1 = 21 - 1 = 20$ (surət)

$f_2 = n_2 - 1 = 25 - 1 = 24$ (məxrəc)

$F_{\alpha/2} = F_{0{,}25.20{,}24} = 2{,}33$

$$F_{stat} = \frac{S_1{}^2}{S_2{}^2} = \frac{1{,}30^2}{1{,}16^2} = 1{,}256$$

F_{stat} -ın hansı sahəyə düşdüyünə baxaq və qərar qəbul edək:

$F_{stat} = 1{,}256 < 2{,}33$ olduğu üçün H_0-ı rədd edilmir. Belə nəticəyə gəlirik ki, iki dispersiyaları arasında fərqin olmasına dair əsaslı sübutumuz yoxdur.

Misal 8: Sınaq iki qrup tələbələrin turnikdə dartınma nəticələrində aparılıb.

Fərz edək ki, I qrup tələbələrin (28 nəfər) sınaq tapşırığında göstərdikləri nəticələr üçün $\bar{x} = 16$; $\sigma_1 = 4$ alınıb. II qrupdakı tələbələrin (26 nəfər) göstərdikləri nəticələr üçün, $\bar{x} = 18$; $\sigma_2 = 5$ alınıb. Qrupların fiziki səviyyəsini təyin edək:

Həlli. Fərz edək ki, I və II qrup statistik xarakteristikalarına görə eynidirlər. Bu zaman sıfır hipotezi $H_0 : (\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2)$ kimi yazılır.

$$F_{hse} = \frac{\sigma_2{}^2}{\sigma_1{}^2} = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} = 1.56$$

Sərbəstlik dərəcəsi:

$k_2 = n_2 - 1 = 26 - 1 = 25$

$k_1 = n_1 - 1 = 28 - 1 = 27$

Əhəmiyyət səviyyəsi: $\alpha = 0.05$ götürülür.

Fişer cədvəlindən (bax. əlavələr)

$F_{kr} = 1{,}93$

Beləliklə, $F_{kr} > F_{hes}$; yəni,

$1{,}93 > 1{,}56$

Bu da onu göstəriri ki, sıfır hipotezi $H_0 : (\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2)$,

$q = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ ehtimallıqla rədd edilir.

Nəticə: turnikdə dartınma göstəricisinin dəyişkənliyi I və II qrupda əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir. Buradan da məlum olur ki, I qrup tələbələrin fiziki hazırlığı eyni səviyyəldir.

Styüdent kriterisi.

Styüdent kriterisi parametrik kriteridir və seçmənin göstəricilərinin müqayisəsi üçün istifadə olunur. Seçmələr həcmlərinə görə müxtəlif ola bilərlər. Styüdent kriterisi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$t = \frac{\bar{d}}{S_d}$$

burada $d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ müqayisə olunan seçmələrin orta qiymətləridir $(\bar{x} = \frac{\sum d_i}{n})$.

S_d– orta qiymətlərin standart meylidir $(S_d = \frac{\sigma}{n})$.

Baş əmin həcmi $N = \infty$ yəni, məlum deyilsə və $n \geq 30$ olarsa $S_d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ düstur ilə hesablanır, $\sigma = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$.

Baş əmin həcmi məlum deyilsə və $n < 30$ olarsa, onda $S_d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ düstur ilə hesablanır

Baş əmin həcmi N məlumdursa və $n \geq 30$ olduqda $S_d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$ düsturu ilə təyin olunur.

Əhəmiyyət səviyyəsi α=0,05 və sərbəstlik dərəcəsi ədədi $f = n - 1$ üçün Styüdent cədvəlindən (t_{kr}) qiyməti götürülür (bax. əlavələr).

Əhəmiyyət kriteriyası onu göstərir ki, orta fərq bu fərqin statistik xətasından neçə dəfə böyükdür.

İki seçmənin orta fərqi ilə fərqlənməsi o vaxt etibarlı sayılır ki, hesablanılan kriteriya cədvəldən götürülən kriteriyadan böyükdür, yəni $t_{hes} > t_{kr}$.

Buna əsaslanaraq sıfır hipoteza H_0 rədd edilir, yəni seçmələrin əlamətlərinin dəyişilməsinə öyrənilən faktorun təsiri qəbul olunur.

İki seçmənin orta fərqlə fərqlənməsi o vaxt etibarsız sayılır ki, hesablanılan kriteri cədvəl qiymətindən yüksək deyilsə, yəni $t_{hes} < t_{kr}$. Bu halda sıfır hipoteza H_0 qəbul olunur, yəni tədqiqat olunan seçmələr arasında fərq yoxdur. Fərq ola bilər, lakin kifayət qədər olmayan reprezentativlikdən (görkəmliyindən) və qrupun həcminin kiçikliyindən onlar gözə görünmür. Daha böyük həcmli seçmədə təkrar tədqiqatlar fərqin etibarlığını aşkar edə bilər. t kriterinin qiyməti Styüdent cədvəlində iki dəyişən kəmiyyətdən asılı olaraq göstərilir: sərbəstlik dərəcəsi (f) və əhəmiyyət səviyyəsi (α).

Pedaqoji tədqiqatlar üçün əhəmiyyət səviyyəsi $\alpha = 0{,}05$ götürülür.

Misal 9: Eyni şəraitdə 10 dəfə məşqdən əvvəl (x) və məşqdən sonra (y) idmançıların ÜDT ölçülmüş və hesablamaya görə $\bar{x} = 110$; $\bar{y} = 110$; $\sigma_x{}^2 = 5{,}6$; $\sigma_y{}^2 = 52{,}2$ alınmışdur. Styudent kriteriyasının hesabi qiymətini tapın:

Həlli:

$\sigma_x = 2{,}4\,;\qquad \sigma_y = 7{,}2$

$$m_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} = \frac{2{,}4}{\sqrt{9}} = \frac{2{,}4}{3} = 6{,}8$$

$$m_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n-1}} = \frac{7{,}2}{\sqrt{9}} = \frac{7{,}2}{3} = 2{,}4$$

$$t_{hes} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{m_x{}^2 + m_y{}^2}} = \frac{|110 - 180{,}4|}{\sqrt{6{,}8^2 + 2{,}4^2}} = 27{,}7$$

$\alpha = 0.05$

$\gamma = n_1 + n_1 - 2 = 18$

$t_{kr} = 2{,}19;\qquad t_{hes} = 27{,}7$

$t_{hes} > t_{kr}$ yəni, $27{,}7 > 2{,}19$

Nəticə: Müqayisəli seçmələr arasındakı fərq statistik cəhətdən etibarlıdır. Yəni, məşqdən əvvəl və məşqdən sonra ÜDT göstəriciləri arasındakı fərq əhəmiyyətlidir.

Aşağıdakı tapşırıqları həll edin:

1. Aşagıda üç müxtəlif yaş qrupunda eyni idman növü üzrə idmançıların nəticələri verilmişdir. Bu nəticələr onların yaş dəyişikliyini göstərir. Həmin dinamikanı Fişer kriteriyası ilə qiymətləndirin:

X_i	0,28	0,3	0,32	0,33	0,35	0,36
n_i	2	4	9	8	6	1

y_i	0,3	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37
n_i	7	8	7	6	1	1

z_i	0,28	0,3	0,32	0,33	0,35	0,36
n_i	3	5	7	6	5	4

2. Atletlərin qumbara atma və hündürlüyə tullanma üzrə nəticələri üçün statistik xarakteristikalar hesablanıb və $\bar{x} = 13,74$; $\bar{x} = 78,53$; $n_x = n_y = 16$; $\sigma_x{}^2 = 2,104$; $\bar{y} = 15,84$; $\sigma_y{}^2 = 34,35$ alınıb. Bu nəticələr üçün Styudent kriteriyasını tapın.

3. Idmançıların boyu və çəkisi ölçülmüş və bu nəticələr üçün $\bar{x} = 78,53$; $\bar{y} = 178$; $n_x = n_y = 15$; $\sigma_x{}^2 = 69,41$; $\sigma_y{}^2 = 84,92$ hesablanmışdır. Styudent kriteriyasını hesablayın:

4. $\bar{x} = 10$; $\bar{y} = 10$; $m_x = 1,3$; $m_y = 1,5$; $n_x = 35$; $n_y = 40$; verilmişdir. Styudent kriteriyasını sablayın.

5. $\sigma_x = 6,04$; $\sigma_y = 0,274$ olarsa Fişer kriteriyasının hesab iqiymətini tapın.

6. $\sigma_x = 7,304$; $\sigma_y = 2,276$ olarsa Fişer кriteriyasının hesabi qiyмətini tapın.

7. $\bar{x} = 160$; $\bar{y} = 83,6$; $n_x = n_y = 25$; $\sigma_x{}^2 = 12,08$; $\sigma_y{}^2 = 17,36$ Styudent кriteriyasını hesablayın:

8. $\bar{x} = 921$; $\bar{y} = 932$; $m_x = 5,3$; $m_y = 6,3$; $n_x = 40$; $n_y = 34$; verilмişdir. Styudent кriteriyasını sablayın:

9. $\sigma_x = 2,4$; $\sigma_y = 0,267$ olarsa Fişer кriteriyasının hesab iqiyмətini tapın.

10. $\sigma_x = 5,432$; $\sigma_y = 3,876$ olarsa Fişer кriteriyasının hesab iqiyмətini tapın.

XIV FƏSİL. DİSPERSİYA ANALİZİ

14.1. Ümumi, qrupdaxili və qruplararası dispersiya

Dispersiya analizinin əsas məqsədi kənar faktorların əlaqəsi və nəticəvi əlamətə və göstəriciyə olan təsirinin qiymətləndirilməsidir. Elmi təcrübənin qoyulması və onun nəticələrinin işlənməsi dispersiya təhlili üsulunun öyrənilməsini tələb edir. Dispersiya təhlili vasitəsilə təcrübənin nəticələrinin nə dərəcədə düzgün olub - olmamasını müəyyən etmək mümkündür. Məsələn, buğdanın səpin müddətinin məhsuldarlığa təsirini müəyyən etmək üçün aparılmış təcrübənin nəticələrini nəzərdən keçirək.

Məsələn, dörd müddətdə səpilən dənli bitkilərin məhsuldarlığını müqayisə edək:

10 aprel, 15 aprel, 20 aprel, 25 aprel. Əvvəlcədən qeyd edilməlidir ki, təcrübənin nəticələrini statistik təhlil etmək üçün iki şərtə əməl edilməlidir. Birinci, təcrübənin hər variantı (bizim misalımızda – səpin müddəti) bir neçə sahədə təkrar olunmalıdır. İkinci, sahələrin variantlar arasında bölüşdürülməsi təsadüfi olmalıdır. Bu isə püşk atma ilə müəyyən edilir.

Misal: Fərz edək ki, hər bir variant (səptn müddəti) beş sahədə aparılmışdır. Deməli, təcrübə cəmi 20 sahədə aparılmışdır (Cəmi 5 sahə var və hər sahədə 5 cəhd edilib). Həmin təcrübənin nəticələrini aşağıdakı kimi yazmaq olar.

Təcrübənin nəticələri

təcrü. variantı	sahə x_i	sahə x_i	sahə x_i	sahə x_i	sahə x_i	orta məhsul. $\bar{X}$
10 aprel	18	24	21	22	20	21
15 aprel	24	28	25	20	28	25
20 aprel	27	26	25	29	23	26
25 aprel	19	26	26	21	28	24

Buradan görünür ki, müxtəlif müddətlərdə aparılan səpinin nəticələri də müxtəlifdir. Yəni, orta məhsuldarlıq müxtəlifdir.

Ancaq qeyd edilməlidir ki, eyni vaxtda səpilmiş sahələrin məhsuldarlığı da müxtəlifdir. Ona görə də yoxlamaq lazımdır ki, görək bu müxtəliflik hansı amillərin təsiri nəticəsində olmuşdur. Bunu aşağıdakı kimi müəyyən etmək olar.

1) Məhsuldarlığın dispersiyasının ümumi həcmini hesablayırlar

Dispersiyanın ümumi həcmi ayrı-ayrı sahələrin məhsuldarlığının ümumi orta məhsuldarlıqdan standart meyllərinin kvadratlarının cəminə bərabərdir. Yəni, $D_{ümumi} = \sum(X_i - \bar{X}_{ümumi})^2$

Ümumi diseprsiya məhsuldarlığına bütün amillər öz təsirini göstərir (səpin müddətinin və sahələrin müxtəlif olmasına əsasən).

2) Ümumi orta məhsuldarlıq aşağıdakı kimi hesablanır:

$\bar{X}_{ümumi} = \frac{\sum \bar{X}}{n} = \frac{21+25+26+24}{4} = 24$

Ümumi dispersiya isə:

$D_{ümumi} = (18-24)^2 + (24-24)^2 + (27-24)^2 + \cdots\cdots + (28-24)^2 = 212$

3) Qruplararası dispersiyanın həcmini müəyyən edirlər:

$$D_{qr.arası} = \sum(\bar{X}_i - \bar{X}_{ümumi})^2 \times m$$

burada m sahənin sayıdır (təkrarların sayı).

Qruplararası dispersiya öyrənilən amilin, yəni, səpin müddətinin məhsuldarlığa olan təsirini göstərir

$$D_{qr.arası} =$$
$$= [(21-24)^2 + (25-24)^2 + (26-24)^2 + (24-24)^2]x5 = 70$$

4) Qrupdaxili dispersiya (Dqrupdaxili) hesablanır.

Riyazi statistikada sübut edilmişdir ki, ümumi dispersiya (Dümumi) qrupdaxili dispersiya (Dqrupdaxili) və qruplararası dispersiyanın (Dqruplararası) cəminə bərabərdir: Yəni,

$D_{ümumi} = D_{qr.daxili} + D_{qr.arası}$ buradan da

$D_{qr.daxili} = D_{ümumi} - D_{qr.arası}$ deməli,

$D_{qr.daxili} = 212 - 70 = 142$ olduğu üçün

$D_{ümumi} = 142 + 70 = 212$

Buna dispersiyanın cəmlənməsi deyilir.

Nəticə: Buradan aydın olur ki, dənli bitkilərin məhsuldarlığı 33% səpin müddətindən asılıdır: (70 : 212 = 0,33 və ya 33%).

14.2. Ümumi, qrupdaxili və qruplararası variasiya

Fiziki hərəkətlər kompleksinin idman nəticəsinə əhəmiyyətli təsiri məsələsini araşdıraq. Bu məsələdə bir faktor tədqiq olunur, ona görə də məsələnin araşdırmasında bir faktorlu dispersiya analizindən istifadə olunur.

Faktorlar idarə olunan və idarə olunmayanlara ayrılırlar. Məsələn, məşq yükünün həcmi, idmançının ixtisası və təsnifatı – idarə olunan faktorlara aiddir, idmançının emosional vəziyyəti, iş qabiliyyəti, metroloji şərait – idarə olunmayan faktorlardır. Adətən, hər faktorun təsiri bir neçə qrup üzərində sınaqdan keçirilir. Belə qrupların sayı faktorun səviyyəsini xarakterizə edir.

Dispersiya analizi metodu əlamətin variasiyasının qiymətləndirmə təsirini faktor kimi qəbul etmək üçün imkan verir. Dispersiya analizinin əsas ideyası – müşahidə nəticələrinin ümumi variasiyasının iki komponentindən ibarət olmasındadır. Qqrupdaxili və qruparası variasiya.

Tədqiqat zamanı bir qrupun bir neçə dəfə testləşdirmə (sınaqlaşdırma) halı ilə rastlaşırıq. Nəticələrin təkrarında dispersiya analizinin elə modeli tədbiq olunur ki, burada qrupdaxili və qruparası variasiya arasındakı əlaqə nəzərə alınır. Bu model aşağıdakı kimi yazılır:

$Q_{ümumi} = Q_{q.ar} + Q_{q.dax}$ burada

$Q_{ümumi}$– ümumi variasiya;

Q_{qa} – qruparası variasiya;

Q_{qd} – qrupdaxili variasiya

Bu model testlər nəzəriyyəsində daha geniş istifadə olunur və dəfələrlə sınaq apardıqda testin etibarlığını qiymətləndirir.

Bu qanunauyğunluğu misal üzərində izah edək.

Tədqiq edilən 3 nəfər 2 cəhddə yerindən uzunluğa tullanmada aşağıdakı nəticələri göstəriblər.

Tədqiq edilənlər	1-ci cəhddin nəticəsi (sm)	2-ci cəhddin nəticəsi (sm)
1	210	212
2	207	208
3	216	210
orta nəticə	211	210

Orta nəticələri təyin etmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə edilir:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\bar{X}_0 = \frac{210+207+216+212+208+210}{6} = 210{,}5$$

1-ci cəhdin orta qiyməti (I qrup)

$$\bar{X}_1 = \frac{210+207+216}{3} = 211$$

2-c icəhddin orta qiyməti (II qrup)

$$\bar{X}_2 = \frac{212+208+210}{3} = 210$$

Kvadrat yayınma ümumi cəmi (ümumi variasiya) ümumi orta və hər nəticənin arasındakı variasiyanı müəyyən edir (1-ci və 2-ci cəhdlər) və düsturla hesablanır:

$$Q_{ümumi} = \sum_i^n \sum_j^n \left(x_{ij} - \bar{x}_o\right)^2$$

$$Q_{ümumi} = (210 - 210{,}5)^2 + (207 - 210{,}5)^2 + (216 - 210{,}5)^2 +$$
$$+(212 - 210{,}5)^2 + (208 - 210{,}5)^2 + (210 - 210{,}5)^2 = 51{,}5$$

$$Q_{q.ar} = \sum_i^n (\bar{x}_i - \bar{x}_o)^2 \cdot n_i$$

$$Q_{q.ar} = (211 - 210{,}5)^2 \cdot 3 + (210 - 210{,}5)^2 \cdot 3 = 1{,}5$$

$$Q_{q.daxili} = \sum_i^n \sum_j^n \left(x_{ij} - \bar{x}_1\right)^2$$

$$Q_{q.dax} = (210 - 211)^2 + (207 - 211)^2 + (216 - 211)^2 +$$
$$+(212 - 210)^2 + +(208 - 210)^2 + (210 - 210)^2 = 50$$

$Q_{ümumi}$; Q_{qa} və Q_{qd} nəticələrindən məlum olur ki, bərabərlik ödənilir. Yəni

$$51{,}5 = 1{,}5 + 50$$
$$51.5 = 51{,}5$$

Bu misalda fərz etmək olar ki, 1-ci cəhddin nəticələri 2-ci cəhddin nəticələrindən fərqlənmirlər. Onda bu fərziyyəni statistik hipotez şəklində yazmaq olar. Yəni

$$H_0 : (\bar{X}_1 = \bar{X}_2)$$

Fərz etsək ki, iki cəhd bir-birindən yalnız vaxt ölçüsü ilə fərqlənirlər. Onda demək olar ki, vaxt ölçüsü (iki cəhd arasındakı) idman nəticəsinə təsir göstərmir. İdman nəticəsinə göstərilən faktorların sayından asılılıq dispersiya analizi birfaktorlu və çoxfaktorlu ola bilər.

14.3. Birfaktorlu dispersiya analizinin hesablanması

Fiziki hərəkətlər kompleksinin idman nəticəsinə əhəmiyyətli təsiri məsələsini araşdıraq. Bu məsələdə bir faktor tədqiq olunur, ona görə də məsələni araşdırmaq üçün bir faktorlu dispersiya analizindən istifadə olunur. Dispersiya analizi metodu əlamətin variasiyasının qiymətləndirmə təsirini faktor kimi qəbul etmək üçün imkan verir. Dispersiya analizin əsas ideyası müşahidə nəticələrinin ümumi variasiyasının iki komponentdən ibarət olmasındadır (qrupdaxili və qruparası variasiya). Tədqiqat zamanı, bir qrupun bir neçə dəfə testləşdirmə (sınaqlaşdırma) halı ilə rastlaşırıq. Nəticələrin təkrarında dispersiya analizinin elə modeli tətbiq olunur ki, burada qrupdaxili və qruparası variasiya arasındakı əlaqə nəzərə alınır.

Testlər nəzəriyyəsində bu model daha geniş istifadə olunur. Modelin tətbiqini aşağıdakı məsələ üzərində araşdıraq. İdmançı-həndbolçu qızlar (10 nəfər) aşağıdakı testlərdən keçiblər: top ilə qaçış, uzunluğa tullanma, üç qat tullanma. Hər üç test ilkin mərhələdə: fiziki hazırlığın cəmləşməsi mərhələsi əsasında keçirilib.

Sınaq müddətində idmançı-qızlar ümumi fiziki hazırlıqlarını yaxşılaşdırıblar. İsbat etmək lazımdır ki, bu yaxşılaşdırma ehtibarlıdı. Yoxlanılan hipotez bu cür təsvir edilir:

$H_0 : (\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_3)$ yəni fərz edirik ki, üç sınağın orta qiymətləri bərabərdir, həmçinin, idman nəticələrinin sınaqdan sınağa təkrarlanmasını qiymətləndirək. Bunun üçün qrupdaxili korrelyasiya əmsalıнı hesablamaq lazımdır, bu da testin etibarlıq əmsalı ilə eynidir (bərabərdir).

Sınağın nəticələri və aralıq hesablamalar aşağıdakı cədvəldə verilib.

Test - uzunluğa tullanma (metr)

№	1-ci sınaq	2-ci sınaq	3-cü sınaq	$\Sigma x_{sət}$	$(\Sigma x_{sət})^2$
1	2	3	4	5	6
1	2,35	2,33	2,38	7,06	49,8436
2	2,08	2,10	2,15	6,33	40,0689
3	2,25	2,30	2,40	6,95	48,3025
4	2,12	2,20	2,38	6,70	44,89
5	1,90	2,00	2,10	6,00	36,00
6	2,20	2,30	2,30	7,00	49,00
7	2,18	2,20	2,28	6,66	44,3556
8	1,96	2,15	2,18	6,27	39,3129
9	2,28	2,30	2,36	6,94	48,1636
10	2,08	2,18	2,20	6,46	41,7316
$\Sigma x_{süt}$	21,40	22,06	22,73	$\Sigma\Sigma x_{sət}$=66,19	$\Sigma(\Sigma x_{sət})2$=441,6687
$(\Sigma x_{süt})^2$	457,96	486,436	516,6529	$\Sigma(\Sigma x_{süt})^2$=1461,265; $\Sigma\Sigma x^2$=147,3833	
$\bar{x}_1 = 2{,}14$; $\bar{x}_2 = 2{,}206$; $\bar{x}_3 = 2{,}273$;				$\bar{x}_0 = 2{,}2063$	

Nəticələrin ümumi sayını hesablayaq:

$n = n_1 + n_2 + \ n_3 = 10 + 10 + 10 = 30$

Sətirlərin cəmini hesablayaq (sütun 5):

1-ci sətir: 2,35 + 2,33 + 2,38 = 7,06

2-ci sətir 2,08 + 2,10 + 2,15 = 6,33 və s.

5-ci sütundakı ədədlərin cəmini hesablayaq:

$\Sigma\Sigma x_{sət}$=7,06 + 6,33 +....... + 6,46 = 66,19

Sətir cəminin kvadratlarını hesablayaq:

1-ci sətir: $(7{,}06\ )^2 = 49{,}8436$

2-ci sətir: $(6{,}33)^2 = 40{,}0689$ və s.

6-cı sütunun cəmini hesablayaq:

$\Sigma(\Sigma x_{sət})^2 = 441{,}6687$

2-ci, 3-cü və 4-cü sütundakı ədədlərin cəmini hesablayaq:

2-ci sütun: $\Sigma X_{süt} = 21{,}40$

3-cü sütun: $\Sigma x_{süt} = 22{,}06$

4-cü sütun: $\Sigma x_{süt} = 22{,}73$

Ədədlərin sütun cəminin kvadratlarını hesablayaq:

2-ci sütun: $(\Sigma x_{süt})^2 = 457{,}96$

3-cü sütun: $(\Sigma x_{süt})^2 = 486{,}6436$

4-cü sütun: $(\Sigma x_{süt})^2 = 516{,}6529$

Ədədlərin sütun cəminin kvadratlarının cəmini hesablayaq:

$\Sigma(\Sigma x_{süt})^2$=45,96 + 486,6436 + 516,6529 = 1461,2565

Qrupların və ümumi orta qiymətləri hesablayaq:

$\bar{X}_1 = \frac{21{,}40}{10} = 2{,}14$; $\bar{X}_2 = \frac{22{,}06}{10} = 2{,}206$; $\bar{X}_3 = \frac{22{,}73}{10} = 2{,}273$;

$\bar{X}_0 = \frac{66{,}19}{30} = 2{,}2063$

Qrup orta qiymətlər bir birindən fərqlənirlər. İsbat etmək lazımdır ki, bu fərq etibarlıdır.

Cədvəldəki nəticələrin kvadrat cəmini hesablayaq:

$\Sigma\Sigma x^2 = (2{,}35)^2 + (2{,}08)^2 + ... + (2{,}20)^2 = 1461{,}2565$

Ümumi variasiyanı hesablayaq;

$$Q_{ümumi} = \sum\sum x^2 - \frac{\sum\sum(x_{süt})^2}{n \cdot k}$$

$$Q_{ümumi} = 147{,}3833 - \frac{66{,}19^2}{10 \cdot 3} = 147{,}3833 - 146{,}0372 = 1{,}3461$$

Qruparası variasiyanı hesablayaq:

$$Q_{qr.ara.} = \frac{\sum(\sum x_{süt})^2}{n} - \frac{\sum\sum(x_{süt})^2}{n \cdot k}$$

$$Q_{qr.ara.} = \frac{1461{,}2565}{10} - \frac{66{,}19^2}{30} = 146{,}12565 - 146{,}0372 = 0{,}08845$$

Qrupdaxili variasiyanı hesablayaq:

$$Q_{qr.dax.} = \frac{\sum(\sum x_{süt})^2}{k} - \frac{\sum\sum(x_{süt})^2}{n \cdot k}$$

$$Q_{qr.dax} = \frac{141{,}6687}{3} - \frac{66{,}19^2}{30} = 147{,}2229 - 146{,}0372 = 1{,}1857$$

Qalıq variasiyanı hesablayaq:

$Q_q = Q_{üm} - Q_{qr.ar} - Q_{qr.d}$

$Q_q = 1{,}3461 - 0{,}08845 - 1{,}1857 = 0{,}07195$

Ümumi dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2_{ümum} = \frac{Q_{ümum}}{N-1} = \frac{1{,}3461}{30-1} = 0{,}0464$$

Qruparası dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2_{qr.ara.} = \frac{Q_{qr.ara}}{k-1} = \frac{0{,}08845}{3-1} = 0{,}0442$$

Qrupdaxilı dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2_{qr.ara.} = \frac{Q_{qr.dax}}{n-1} = \frac{1{,}1857}{10-1} = 0{,}1317$$

Qalıq dispersiyanı hesablayaq;

$$\sigma^2_q = \frac{Q_q}{(n-1)(k-1)} = \frac{0{,}07195}{(10-1)(3-1)} = 0{,}00399$$

$H_0 : (\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_3$ hipotezin yoxlanması üçün (F_1) – hesablayaq:

$$F_1 = \frac{\sigma^2_{qr.ara.}}{\sigma^2_q} = \frac{0{,}0442}{0{,}00399} = 11{,}07$$

$$F_2 = \frac{\sigma^2_{qr.dax.}}{\sigma^2_q} = \frac{0{,}1317}{0{,}00399} = 30{,}5$$

Fişerin paylanma cədvəlinə əsasən a = 0,05 və sərbəstlik dərəcəsi

$K_1 = k - 1 = 3 - 1 = 2; K_2 = (n-1)(k-1) = (10-1)(3-1) = 18$ üçün $F_{a,k_1,k_2,} = 3,55$

$3,55 < 11,07 \ (F_{a,y_1,y_2,} < F_1)$

a = 0,05 və sərbəstlik dərəcəsi

$K_1 = n - 1 = 10 - 1 = 9; K_2 = (n-1)(k-1) = (10-1)(3-1) = 18$

$F_{a,k_1,k_2,} = 3,55; \ F_2 = 30,5;$

$(F_{a,k_1,k_2,} < F_2)$ yəni, $3,55 < 30,5$

Beləliklə, $H_0 : (\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_3)$ hipotezi 95% ehtimalla rədd edilir. Deməli, idmançı-qızlar, sınaq müddətində, test nəticələrini yaxşılaşdırıblar. Öyrənilən faktorun (fiziki hərəkətlərin) test nəticəsinə təsirini hesablayaq:

$$\mu_1 = \frac{Q_{qr.ara.}}{Q_{ümum}} = \frac{0,0845}{1,3461} = 00657$$

Qrupdaxili korrelyasiya əmsalını hesablayaq:

$$\mu_2 = \frac{Q_{qr.dax} - \sigma^2{}_q}{\sigma^2{}_{qr.dax.}} = \frac{0,1317 - 0,00399}{0,1317} = 0,96$$

Hesablama nəticələrini cədvəl şəklində göstərək:

Variasiya	Kvadratlar cəmi	Sərbəstlik dərəcəsi	Dispersiya	F-kriteri
Ümumi	1,3461	N-1 30-1	0,0464	-
Qrupdaxili (sınaq arası)	1,1157	n-1 10-1	0,1317	F_2=30,5 α=0,05 $F_{a,k_1,k_2,}$=2,46
Qruparası	0,08845	k-1 3-1	0,0442	F_1=11,07α =0,05 $F_{a,k_1,k_2,}$=3,55
Qalıq	0,07195	(n-1)(k-1) (10-1)(3-1)	0,00399	-

İkinci test - top ilə 30 metr məsafəni qaçmaqdır. Nəticələr cədvəldə göstərilib;

K	1-ci sınaq	2-ci sınaq	3-cü sınaq	Sətr.cəmi $\sum x_{sət}$	Sət.cəm.kvad. $(\Sigma x_{sət})^2$
1	2	3	4	5	6
1	4,29	6,26	5,85	16,4	268,96
2	4,6	6,35	6,22	17,17	294,8089
3	4,54	6,15	6,36	17,05	290,7025
4	5,05	5,45	6,15	16,65	277,2225
5	4,95	6,00	6,85	17,60	309,76
6	4,83	5,80	6,22	16,85	283,922
7	4,6	5,81	6,40	17,11	292,7521
8	5,29	6,92	7,72	19,93	397,2049
9	4,5	5,57	6,34	16,41	269,2881
10	4,9	5,10	5,99	15,99	255,6801
$\Sigma x_{süt}$	47,61	59,41	64,1	$\Sigma\Sigma x_{sət}$=171,12	$\Sigma(\Sigma x_{sət})^2$=2940,301 6
$(\Sigma x_{süt})^2$	2266,7121	3529,5481	4108,81	$\Sigma(\Sigma x_{sət})^2$ = 9905,0702	
$\bar{x}_1$=4,76; $\bar{x}_2$= 5,941; $\bar{x}_3$= 6,41; $\bar{x}_0$= 5,704				$\Sigma\Sigma$x2=995,6941	

Dispersiya analizinin nəticələri aşağıdakı cədvəldə göstərilib:

Variasiya	Kvadratlar cəmi	Sərbəstlik dərəcəsi	Dispersiya	F-kriteri
Ümumi	19,62574	n-l (30-1)	0,6767496	-
Qrapdaxili (sınaq arası)	4,03207	n-1 (10-1)	0,4480077	F_2=6,981 α=0,05 F_{a,k_1,k_2}=2,46
Qruparası	14,43856	k-1 (3-1)	7,21928	F,=1 56,243 a=0,05 F_{a,k_1,k_2}=3,55
Qalıq	1,15511	(n-l)(k-l)(10-1)(3-1)	0,0641727	-

Öyrənilən faktorun test nəticələrinə təsirini hesablayaq:

$$\mu_1 = \frac{Q_{qr.ara.}}{Q_{ümum}} = \frac{14,43856}{19,62574} = 0,735$$

Qrupdaxili korrelyasiya əmsalı

$$\mu_2 = \frac{Q_{qr.dax} - \sigma^2{}_q}{\sigma^2{}_{qr.dax.}} = \frac{0{,}448077 - 0{,}0641727}{0{,}4480077} = 0{,}8567 \text{ və ya}$$

$(0{,}8567)^2 \cdot 100\% = 73{,}39\%$.

Əldə edilən nəticələrə əsaslanaraq bu qənaətə gəlirik, məşq zamanı fiziki hərəkətlərin yerinə yetirilməsi test nəticələrinə bir o qədər əhəmiyyətli təsir göstərməyib.

n	1-ci sınaq	2-ci sınaq	3-cü sınaq	Sətirlərin cəmi $\Sigma x_{sət}$	Sətirlər cəminin kvadratı $(\Sigma x_{sət})^2$
1	2	3	4	5	6
1	7,43	7,20	7,30	21,93	480,9249
2	6,60	6,55	6,65	19,80	392,04
3	6,89	7,10	6,65	20,64	426,0096
4	6,48	6,05	6,15	18,68	348,9424
5	5,50	5,50	5,54	16,54	273,5716
6	6,99	6,80	6,80	20,59	423,9481
7	6,81	6,74	6,80	20,35	414,1225
8	5,61	5,90	6,25	17,76	315,4176
9	7,35	6,85	6;70	20,90	436,81
10	6,60	6,15	6,45	19,20	368,64
$\Sigma x_{süt}$	66,26	64,84	65,29	$\Sigma\Sigma x_{sət}=196{,}39$	$\Sigma(\Sigma x_{sət})^2=3880{,}4267$
$(\Sigma x_{süt})^2$	4390,3876	4204,2256	4262,7841	$\Sigma(\Sigma x_{sət})^2=12857{,}397$	
$\bar{x}_1= 6{,}626; \bar{x}_2=6{,}448; \bar{x}_3= 6{,}526; \bar{x}_0=6{,}5453$				$\Sigma\Sigma x^2=1290{,}2799$	

Dispersiya analizin nəticələri aşağıdakı cədvəldə göstərilib:

Variasiya	kvad.cəmi.	sərbəstlik dərəcəsi	Dispersiya	F-kriteri
Ümumi	4,6455	N-1 ; 30-1	0,16	-
Qr.dax. (sınaq arası)	7,8411	n-1 ; 10-1	0,8712	$F_2 = -4{,}7528$ $\alpha = 0{,}05$ $F_{a,k_1,k_2,} = 2{,}46$
Qruparası	0,1053	k-1; 3-1	0,05265	$F_1 = -0{,}2872$ $\alpha = 0{,}05$ $F_{a,k_1,k_2,} = 3{,}55$
Qalıq	-3,3009	(n-1)(k-1) (10-1)(3-1)	-0,1833	-

Öyrənilən faktorun test nəticələrinə təsirini hesablayaq:

$$\mu_1 = \frac{Q_{qr.ara.}}{Q_{ümum}} = \frac{0,1053}{4,6455} = 0,0226$$

Qrupdaxili korrelyasiya əmsalmı hesablayaq:

$$\mu_2 = \frac{Q_{qr.dax} - \sigma^2{}_q}{\sigma^2{}_{qr.dax.}} = \frac{0,8712+(-0,1833)}{0,8712} = 1,05$$

Nəticə: α=0,05 və sərbəstlik dərəcəsi k_1 və k_2 üçün $F_{a,k_{1,}k_{2,}} > F_1$ və $F_{a,k_{1,}k_{2,}} > F_2$; $3,55 > -0,2872$; $2,46 > -4,7528$.

Aparılan tədqiqatlar və hesablamalar əsasında aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

Həndbolçu-qızların idman hazırlığına fiziki hərəkətlərin təsirini qiymətləndirərək aşağıdakı nəticələrə gəlirik:

1. Sınaqlar zamanı aparılan testlər etibarlıdır;
2. İdmançı qızların fiziki hazırlığı birsəviyyəlidir;
3. Uzunluğa tullanma və 30 metr məsafəyə qaçışda olan testlər idmançıların göstərdiyi nəticəyə müsbət təsir edib;
4. Üçqat tullanma testləri idmançıların nəticələrini yaxşılaşdırmayıb.

Hərəkətlər kompleksini bir daha nəzərdən keçirmək və dəyişikliklər etmək tövsiyə edilir.

Üçqat tullanmada əldə edilən nəticələri yüksəltmək üçün məşq zamanı fiziki hərəkətlərdə bir sıra dəyişikliklər etməli və onların sayını artırmaq tələb olunur.

ƏLAVƏLƏR

Styüdent t – kriterisinin böhran qiymətləri:

Cədvəl 1

Sərbəstlik dərəcəsi ədədi	Əhəmiyyət səviyyəsi			
	α=0,1	α=0,05	α=0,01	α=0,001
1	6,314	12,706	63,657	636,619
2	2,92	4,308	9,925	31,599
3	2,353	3,182	5,841	12,924
4	2,132	2,776	4,604	8,61
5	2,015	2,571	4,032	6,869
6	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,895	2,365	3,499	5,408
8	1,86	2,306	3,355	5,041
9	1,833	2,262	3,25	4,781
10	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,771	2,16	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,977	4,14
15	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,746	2,12	2,921	4,015
17	1,74	2,11	2,898	3,965
18	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,725-	2,086	2,845	3,85
21	1,721	2,08	2,831	3,819
22	1,717	2,074	2,819	3,792
23	1,714	2,069	2,807	3,768
24	1,711	2,064	2,797	3,745
25	1,708	2,06	2,787	3,725
26	1,706	2,056	2,779	3,707
27	1,703	2,052	2,771	3,69
28	1,701	2,048	2,763	3,674
29	1,699	2,045	2,756	3,659
30	1,697	2,042	2,75	3,646

40	1,684	2,021	2,704	3,551
50	1,676	2,009	2,678	3,505
60	1,664	2,000	2,66	3,505
80	1,664	1,99	2,639	3,416
100	1,66	1,984	2,626	3,391
120	1,658	1,98	2,617	3,373
200	1,653	1,972	2,601	3,34
500	1,648	1,965	2,586	3,31
∞	1,645	1,96	2,58	3,291

Styüdent t – kriterisinin böhran qiymətləri

Cədvəl 1

Sərbəstlik dərəcəsi ədədi	Əhəmiyyət səviyyəsi			
	α=0,1	α=0,05	α=0,01	α=0,001
1	6,314	12,706	63,657	636,619
2	2,92	4,308	9,925	31,599
3	2,353	3,182	5,841	12,924
4	2,132	2,776	4,604	8,61
5	2,015	2,571	4,032	6,869
6	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,895	2,365	3,499	5,408
8	1,86	2,306	3,355	5,041
9	1,833	2,262	3,25	4,781
10	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,771	2,16	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,977	4,14
15	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,746	2,12	2,921	4,015
17	1,74	2,11	2,898	3,965
18	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,725-	2,086	2,845	3,85
21	1,721	2,08	2,831	3,819

22	1,717	2,074	2,819	3,792
23	1,714	2,069	2,807	3,768
24	1,711	2,064	2,797	3,745
25	1,708	2,06	2,787	3,725
26	1,706	2,056	2,779	3,707
27	1,703	2,052	2,771	3,69
28	1,701	2,048	2,763	3,674
29	1,699	2,045	2,756	3,659
30	1,697	2,042	2,75	3,646
40	1,684	2,021	2,704	3,551
50	1,676	2,009	2,678	3,505
60	1,664	2,000	2,66	3,505
80	1,664	1,99	2,639	3,416
100	1,66	1,984	2,626	3,391
120	1,658	1,98	2,617	3,373
200	1,653	1,972	2,601	3,34
500	1,648	1,965	2,586	3,31
∞	1,645	1,96	2,58	3,291

Z -ədədi üçün korrelyasiya əmsalının qiymətləri

Cədvəl 2

r	ədədin 1/100 hissəsi									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
0,3	0,309	0,321	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,338	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,498	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,663	0,678
0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,776	0,793	0,811	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,951	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,188	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,527	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647

Cədvəl E.K. Merkuryeva tərəfindən tərtib olunub (1970)

Fişer F kriteriyası böhran qiymətləri

Cədvəl 3

	k_1 – sərbəstlik dərəcəsi										
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161	200,0	216	225	230	234	237	239	241	242	243
2	18,1	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,9	8,8	8,8	8,8	8,8
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	6,1	6,0	6,0	6,0	5,9
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,8	4,7	4,7
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,2	4,1	4,1	4,0
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,7	3,6	3,6
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	2,1	3,0	3,0	2,9
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,6
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,6	2,5
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,5	2,5
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3
21	4,3	3,5	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3
23	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2
25	4,2	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2
27	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,2
29	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1
40	4,1	3,2	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0
50	4,0	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,3	2,1	2,1	2,0	2,0
100	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9
150	3,9	3,1	2,7	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9
200	3,9	3,0	2,7	2,4	2,3	2,1	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8
400	3,9	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8
1000	3,9	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8

k_1 – sərbəstlik dərəcəsi												
12	**14**	**16**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**75**	**100**	**200**	**500**	**∞**
244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
8,7	8,7	5,8	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	5,6	5,6
5,9	5,9	5,8	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	5,6	5,6
4,7	4,6	4,6	4,6	4,5	4,5	4,5	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4
4,0	4,0	3,9	3,9	3,8	3,8	3,8	3,8	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
3,6	3,5	3,5	3,4	3,4	3,4	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,2	3,2
3,3	3,2	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	3,0	2,9	2,9
3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7
2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,5
2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4
2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3
2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2
2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1
2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,1
2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0
2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9
2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9
2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9	1,8
2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8
2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,7
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7
2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7
2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7
2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7	1,6
2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6
2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5
2,0	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5
1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3
1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	1,2
1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2
1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1
1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,1	1,1
1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	1,0

ƏDƏBİYYAT

1. Kələntərli N.M. – Математические и статистические методы в спорте. «Ти – медиа», Баку – 2008, 61 стр.
2. Kələntərli N.M., Vəliyeva Ş.M. və s. – Ali riyaziyyat və riyazi statistika, dərs vəsaiti, Bakı, 2014, 262 s.
3. Əbiyev T.Q.- Ali riyyaziyyat fənnidə statistik analizin əsasları, Bakı, 2005,118 s.
4. Əbiyev A.Q., Əbiyev T.Q., Agayeva M.S., Əbiyev E.M.- "Ali riyaziyyat" – Bakı "Nərgiz"., 2011, 255 səh.
5. Əbiyev T.Q. – Ali riyaziyyat fənnindən statistik analizin əsasları. Bakı, 2005, 118 s.
6. Əbiyev T.Q. – İdman metrologiyası. Bakı, "Nərgiz", 2008, 207 s.
7. Ömərov S.Ö., Cavadov N.Ə.- Riyazi və tətbiqi statistika, Bakı, 2007, Azərnəşr.
8. Məmmədov R. – "Ali riyaziyyat kursu" 1,2 hissələr, Bakı, 1978.
9. Şahbazov Ə.– "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika" . Bakı, "Maarif" , 1973.
10. Афанасьев В.В., Муравьев А.В., Осетров И.А., Михайлов П.В – Спортивная метрология - Ярославль, Изд. ЯГПУ, 2009, 242 с.
11. Боровков. А.А. Математическая статистика. Учебник. 4-е издание Санкт-Петербург, Лань, 2010, 704 с
12. Бритвина В., Конюхов В.В.- Вышая математика и математическая статистика. Москва, Физкультра, 2007, 368с.
13. Бритвина В., Конюхов В.В.- Вышая математика и математическая статистика. Москва, Физкультра, 2007, 368с.

14. Будникова, Ольга Сергеевна. Основы математической обработки информации [Текст] : учеб.пособие/ О.С. Будникова, А. И. Ковыршина, М. Н. Мачхина ; рец.: Р. А. Афанасьева, И. А. Никифорова; Иркут. гос. ун-т, Пед. ин-т. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2015. - 147 с. : ил., табл. ; 21 см. - Библиогр.: с. 131-132.
15. Горяинова Е.Р., Панков А.Р., Платонов Е.Н. Прикладние методы анализа статистических данных. Москва , «Высшая школа эконимики» 2012, 312с.
16. Денисова Л.В., Хмельницкая И.В., Харенко Л.А.- Измрения и методы математической статистики в физическом воспитании и спорте. Киев, «Олимпийская литература», 2018, 128с.
17. Дудин Н.М. , Ласников Н.В., Лезина М.Л. Статистика. Москва, «Юрайт», 2017, 378с.
18. Елисеева И.И., Флуд Н.А., Юзбашев М.М- Обшая теория статистики. Москва, «Финансы и стастика», 2006.
19. Елисеева И.И., Флуд Н.А., Юзбашев М.М-Практикум по общей теории статистика. Москва, «Финансы и стастистики», 2008, 512с.
20. Иванов В.С.-Основы математичиской статистики, Москва,1990,176с.
21. Лебедев А.В.-Делающим первие шаги в науке, Санкт-Петербург, «Овразование», 2006, 418с.
22. Масальгин Н.Н – «Матемаетико-статистические методы в спорте».
23. Начинская, С.В. Спортивная метрология [Текст]: учебник для Вузов/ С.В. Начинская.- 3 изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. –239 с.

24. Павлушков И., Розовский Л.- Основы высшей математики и математической статистики. Москва, «ГЭОТАР-Медия», 2009, 432с.
25. Statistics for Business and economics 12-E, David R.Anderson, Denis J.Sweeney,Thomas A. Williaams, James J. Cochran, USA, 2014

MÜNDƏRİCAT

I FƏSİL. FUNKSİYANIN TÖRƏMƏSİ

II FƏSİL. QEYRİ MÜƏYYƏN İNTEQRALLAR

III FƏSİL. MÜƏYYƏN İNTEQRALLAR

IV FƏSİL. MÜƏYYƏN İNTEQRALIN TƏTBİQLƏRİ

V FƏSİL. EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ

VI FƏSİL. TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT. PAYLANMA FUNKSİYASININ XASSƏLƏRİ

VII FƏSİL. RİYAZİ STATİSTİKANIN ELEMENTLƏRİ

VIII FƏSİL. TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN ƏDƏDİ XARAKTERİSTİKALARI

IX FƏSİL. EMPİRİK PAYLANMA VƏ ONUN HƏNDƏSİ TƏSVİRİ

X FƏSİL. KORRELYASİYA ANALİZİ

XI FƏSİL. REQRESİYA ANALİZİ

XII FƏSİL. PARAMETRLƏRİN QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

XIII FƏSİL. HİPOTEZLƏRİN YOXLANMASI

XIV FƏSİL. DİSPERSİYA ANALİZİ

Çapa imzalanmışdır: 12.02.2020-ci il
Kağız formatı: 60x84 1/16
Həcmi: 12,25 çap vərəqi
Tiraj: 100 nüsxə, sifariş:08

Azərb.DBTİA-da çap olunub