Ş.M.Vəliyeva
N.M.Kələntərli
B.D.Mirzəyeva
G.M.Mirsəlimova

ALİ RİYAZİYYAT və RİYAZİ STATİSTİKA

Ş.M.Vəliyeva
N.M.Kələntərli
B.D.Mirzəyeva
G.M.Mirsəlimova

ALİ RİYAZİYYAT VƏ RİYAZİ STATİSTİKA

Dərs vəsaiti

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin 03 fevral 2014-ci il tarixli 107 saylı əmrinə əsasən dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.

"Müəllim" nəşriyyatı
Bakı – 2014

Redaktor: **Əbiyev T.Q**
Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasının "Ali Riyaziyyat və İnformatika" kafedrasının müdiri dosent
f.-r.e.n:

Rəy verənlər: **Adigözəlov A.S.,**
p.ü.e.d., professor

İbrahimov H.B.,
f.r.e.d. professor

Əbiyev T.Q
dosent f.r.e.n:

Ş.M.Vəliyeva, N.M.Kələntərli, B.D.Mirzəyeva G.M.Mirsəlimova.
ALİ RİYAZİYYAT VƏ RİYAZİ STATİSTİKA
(Dərs vəsaiti). Bakı: «Müəllim», nəşriyyatı, 2014. 263 səh.

Dərs vəsaitində riyazi analizin, ali məktəb tələbələrinin diqqətinə təqdim olunan ehtimal nəzəriyyəsinin və riyazi statistikanın əsasları şərh olunmuşdur. Vəsaitdə nəzəri materialla yanaşı misallar həll olunmuş, və sonda testlər verilmişdir.

$V\,\dfrac{1921405-2014}{9952-435}$

ÖN SÖZ

Təqdim olunan bu kitab riyazi analiz, riyazi statistika məsələ və misal həlli istiqamətində riyaziyyat ixtisaslı universitetlərdə dərs vəsaiti kimi istifadə oluna bilər.

Dərs vəsaiti nəzərdə tutulmuş üç fəsildən ibarətdir:

1) 1 Riyazi analiz
2) Ehtimal nəzəriyyəsinin elementləri
3) Riyazi statistika

"Ali riyaziyyat və riyazi statistika" dərs vəsaiti Azərbaycan Dövlət Bədən Tərbiyəsi və İdman Akademiyasının tədris proqramına tam uyğun olaraq yazılmışdır.

Dərs vəsaiti – funksiyalar, funksiyaların verilmə üsulları, ardıcıllığın və funksiyanın limitləri, kəsilməzlik, törəmə və onun hesablanması, birdəyişənli funksiyanın inteqral hesabı, qeyri-müəyyən inteqral, müəyyən inteqral və onun tətbiqi, ehtimal nəzəriyyəsinin, riyazi statistikanın əsas, seçmənin ədədi məsələləri geniş şərh olunub.

Ali məktəblərin tələbələri üçün nəzərdə tutulmuş bu dərs vəsaitində verilmiş hər bir nəzəri təkliflik tətbiqi misalların həlli ilə izahı olunur.

Hər bir mövzunun sonunda tələbələrin sərbəst işləməsi üçün tapşırıqlar verilmişlir. Vəsaitidən ali məktəblərin tələbələri ilə yanaşı, kolleclərin tələbələri də istifadə edə bilərlər.

RİYAZİ ANALİZ
§1. ƏDƏDİ FUNKSİYALAR

1.1. Ədədi funksiya anlayışı.

Funksiya anlayışı riyaziyyatın əsas anlayışlarından biridir. Funksiya sözü latınca – «əməl etmə», «yerinə yetirmə», və «tamamlanma» deməkdir.

Funksiya anlayışını Alman filosfu və riyaziyyatçısı Q.V.Lieybnits elmə gətirmişdir. (1616-1716). Funksiya 2 dəyişən kəmiyyətlər arasındakı uyğunluğu müəyyən edir. Burada 1-ci dəyişənə sərbəst (x), 2-ci dəyişənə isə asılı (y) dəyişən deyilir.

Tərif 1. X ədədi çoxluğundan götürülmüş hər bir x-ə Y-çoxluğundan yeganə y ədədini qarşı qoyan qaydaya x çoxluğunda verilmiş **ədədi funksiya** deyilir.

x-ə sərbəst dəyişən və ya fuksiyanın arqumenti, y-ə asılı dəyişən və ya x arqumentinin funksiyası deyilir. Adətən, ədədi funksiya $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=h(x)$, və s. kimi işarə olunur.

X–çoxluğu funksiyasının təyin oblastı adlanır və $D(f)$ ilə isarə olunur.

$$D(f)=x$$

f – funksiyasının təyin oblastından götürülmüş, hər bir x-ə $f(x)$, ədədini qarşı qoymaqla alınan $\{f(x),\ x\in D(f)\}$ çoxluğu onun **qiymətlər çoxluğu** və ya **qiymətlər oblastı** adlanır və $E(f)$ ilə işarə olunur.

$$E(f)=\{f(x),\ x\in D(f)\}$$

Arqumentin hər bir qiymətinə funksiyanın uyğun qiymətini tapmaq qaydası verilibsə, funksiya verilmiş hesab edilir.

Funksiyanın tərifini başqa sözlə belə də söyləmək olar.

Tərif 2. x-dəyişəninin hər bir qiymətinə müəyyən qayda ilə y-dəyişəninin yeqanə qiyməti uyğun gələrsə, y-in belə asılılığına funksional asılılıq və ya funksiya deyilir.

Funksiya 3 üsulla verilir.

I. Cədvəl üsulu. Sərbəst dəyişmənin $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_n$ qiymətlərinə uyğun asılı dəyişənin $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ qiymətləri cədvəl vasitəsi ilə verilmişsə, x-in istənilən qiyməti üçün y-in uyğun qiymətini göstərə bilərik.

x	x_1	x_2	....	x_n
y	y_1	y_2	....	y_n

Funksiyanın bu üsulla verilməsi **cədvəl üsulu** adlanır.

Cədvəl üsulu ilə verilən funksiyanın təyin oblastı

$$D(f) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$$

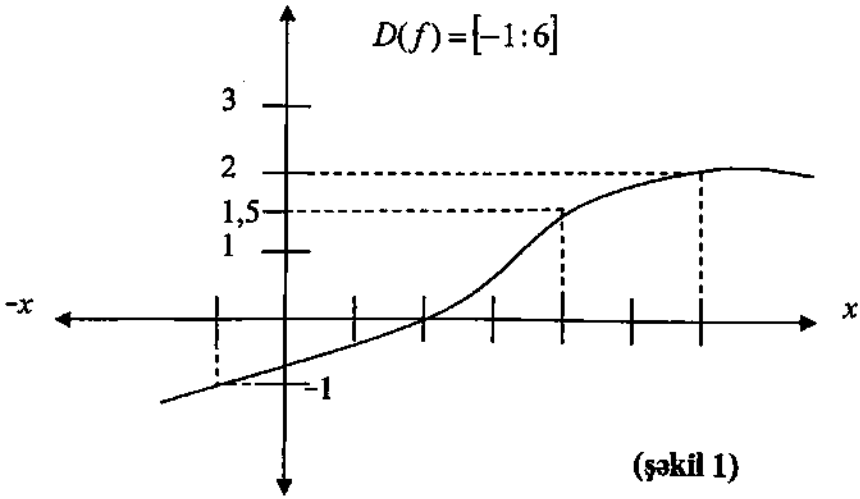
Qiymətlər çoxluğu isə $E(f) = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ olur

II. Qrafik üsul. Asılı dəyişənlə sərbəst dəyişən arasındakı asılılıq koordinat müstəvisində müəyyən əyri ilə və ya düz xətlə verilə bilər. Bu zaman x arqumentinin hər bir qiymətinə uyğun y – funksiyasının qiyməti bu əyrinin köməyi ilə asanlıqla tapıla bilər.

Funksiyanın bu üsulla verilməsi **qrafik üsul** adlanır.

Məsələn: (şəkil. 1)-dəki funksiyanın təyin oblastı

$$D(f) = [-1:6]$$



(şəkil 1)

Qiymət çoxluğu isə $E(f)=[-1:2]$-dir.

$x=4$ olduqda $y=1,5$ olur.

III. Analitik üsul. Sərbəst dəyişənlə asılı dəyişən arasındakı uyğunluq müəyyən düsturla verilə bilər $y=f(x)$.

x-arqumentinin verilmiş qiyməti üçün y-in uyğun qiymətini bu düsturun köməyi ilə tapmaq olar.

Bu halda deyirlər ki, funksiya düsturla və ya **analitik üsulla** verilmişdir.

Məsələn $y=x^2-3x+4$

Bəzən funksiyanın analitik ifadəsi bir neçə düsturla verilə bilər.

Məsələn. $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & -2\le x<0 \\ 3x-x^2 & 0\le x<3 \end{cases}$ olduqda

deyirlər ki, funksiya hissə-hissə verilmişdir. Praktikada çox vaxt funksiya analitik üsulla verilir və bəzən onun təyin oblastı göstərilmir.

Əgər funksiya düsturla verilib, lakin onun təyin oblastı göstərilməyibsə, onda funksiyanın təyin oblastı arqumentin düsturu mənalı edən qiymətləri çoxluğundan ibarət olur.

Məsələn. $f(x)=\dfrac{9}{x-4}$ funksiyasının təyin oblastını tapaq.

Həlli: $x-4\neq 0$. yəni $x\neq 4$ olduqda $\dfrac{9}{x-4}$ nin mənası vardır.

Ona görə də $f(x)=\dfrac{9}{x-4}$ -nin təyin oblasıtı 4-dən başqa bütün həqiqi ədədlər çoxluğdur, yəni $D(f)=(-\infty:4)\cup(4:+\infty)$

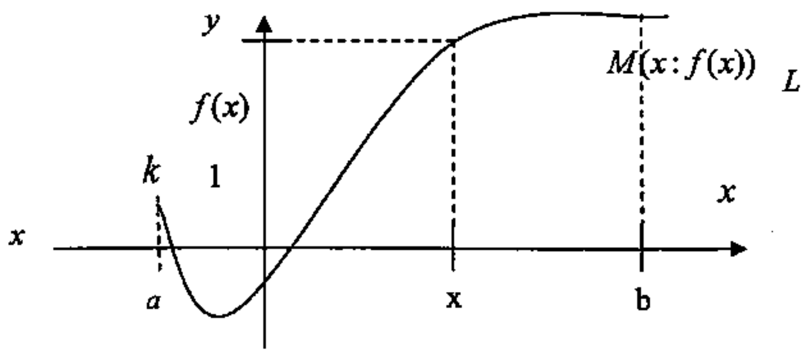
1.2. Funksiyanın qrafiki

Ədədi funksiyaları əyani təsvir etmək üçün onların qrafikindən istifadə olunur.

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası verilmişdir. Arqumentin hər bir $x\in D(f)$ qiymətinə funksiyanın $y=f(x)$ qiymətini qarşı qoymaqla alınan $(x:f(x))$ ədədlər cütünə koordinat müstəvisində

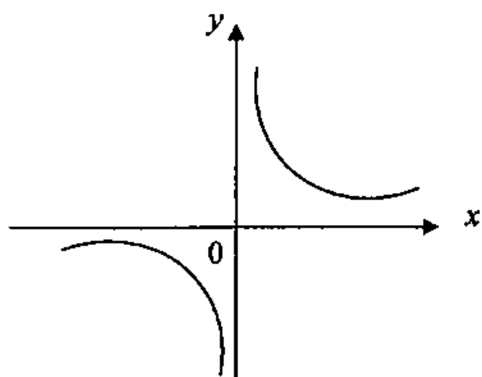
$M(x:f(x))$ nöqtəsini qarşı qoyaq. Bu zaman alınan nöqtələr çoxluğuna $y=f(x)$ funksiyanın qrafiki deyilir. (şəkil. 2)

Tərif. Koordinat müstəvisinində absisləri arqumentin qiymətlərinə bərabər olan nöqtələr çoxluğuna **funksiyasının qrafiki** deyilir.



(şəkil 2)

Koordinat müstəvisində verilmiş hər hansı əyri o zaman müəyyən bir funksiyasının qrafiki ola bilər ki, kordinat oxuna paralel olan istənilən düz xətti onun ən çoxu bir nöqtədə kəssin. (şəkil 3)



(şəkil 3)

1.3. Funksiyasının artması və azalması

Tərif 1. X-çoxluğunda arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın böyük qiyməti uyğun gələrsə, f – funksiyasına bu çoxluqda

artan funksiya deyilir.

Başqa sözlə, istənilən $x_1, x_2 \in X$ üçün $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1) < f(x_2)$ olarsa, funksiyasına X-çoxluğunda artan funksiya deyilir.

Tərif 2. X-çoxluğunda arqumentin böyük qiymətinə funksiyasının kiçik qiyməti uyğun gələrsə, f funksiyasına bu çoxluqda azalan funksiya deyilir.

Başqa sözlə istənilən $x_1, x_2 \in X$ üçün $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1) > f(x_2)$ olarsa, f – funksiyasına X çoxluğunda azalan funksiya deyilir.

Tərif 3. Artan və azalan funksiyalara ciddi **monoton funksiyalar** deyilir.

Misal 1. $f(x) = x^3$-funksiyası bütün ədəd oxu üzərində monoton artan funksiyadır. Arqumentin $x_1 < x_2$ bərabərsizliyini ödəyən ixtiyarı x_1 və x_2 qiymətini götürək.

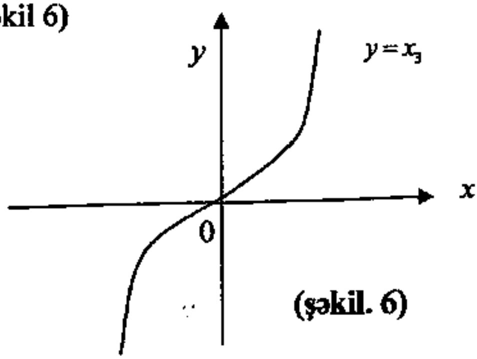
$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$ və

$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = \frac{3}{4} x_1^2 + (x_2 + \frac{1}{2} x_1)^2 > 0$ olduğunu nəzərə alsaq.

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)\left(\frac{3}{4} x_1^2 + \left(x_2 + \frac{1}{2} x_1\right)^2\right) = (x_1 - x_2)$$ burdan

$x_1 < x_2$ və ya $x_1 - x_2 < 0$ olarsa, onda $f(x_1) - f(x_2) < 0$ yəni $f(x_1) < f(x_2)$ olar.

Deməli: $f(x) = x^3$- si bütün ədəd oxu üzərində monoton artandır. (şəkil 6)

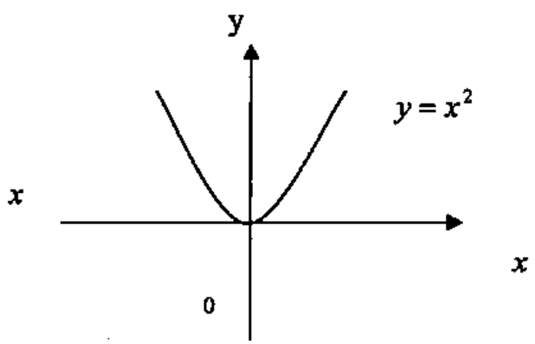


(şəkil. 6)

Misal 2 $f(x)=x^2$ funksiyası $[0:+\infty)$ aralığında monoton artan $(-\infty:0]$ aralıqda isə monoton azalandır. Doğrudan da, istənilən $x_1 x_2 \in [0:+\infty)$ götürək və fərz edək ki, $x_2 > x_1 \geq 0$.

Onda $f(x_2)-f(x_1)=x_2{}^2-x_1{}^2=(x_2-x_1)\cdot(x_2+x_1)$

$x_2 > x_1 \geq 0$ Olduğundan $x_2 - x_1 > 0$ və $x_2 + x_1 > 0$ Deməli $f(x_2)-f(x_1)>0$ və ya $f(x_2)>f(x_1)$.



(Şəkil: 7)

Funksiyanın artmasını və azalmasını araşdıraraq qəbul olunan teoremlər.

Teorem 1. f-funksiyası X-çoxluğunda artandırsa, istənilən C ədədi üçün $f+c$ funksiyası da x-çoxluğunda artandır.

Teorem 2. f-funksiyası X-çoxluğunda artandırsa, istənilən C>0 ədədi üçün cf –funksiyasıda, X-çoxluğunda artandırsa.

Teorem 3. f –funksiyası X-çoxluğunda artırsa və işarəsini saxlayırsa, onda $\frac{1}{f}$ funksiyası da bu çoxluqda azalır.

Teorem 5. f və g –funksiyaları X-çoxluğunda artandırsa və mənfi olmayandırsa, onda $f \cdot g$ hasili də bu çoxluqda artandır.

Teorem 6. f və g-funksiyaları X-çoxluğunda artırsa, $f+g$ –ları da X çoxluğunda artan olur.

Teorem 7. f-funksiyası X-çoxluğunda artandırsa və mənfi olmayan qiymətlər alırsa, istənilən natural n üçün f^n - funksiyasıda X-çoxluğunda artandır.

Misal 1 $f(x)=x^3$ -sı $(-\infty:+\infty)$ artan olduğu üçün

$$g(x)=x^3+7 \text{ sıda } (-\infty:+\infty) \text{ artandır.}$$

Misal 2 $f(x)=x^3$-sı $(-\infty:+\infty)$ - artandır onda $g(x)=2x^3$- sı da $(-\infty:+\infty)$ artandır.

Misal 3 $f(x)=x^4$ funksiyası $[0:+\infty)$ çoxluğunda azalandır.

$f(x)=-\dfrac{2}{3}x^4$ - funksiyası $[0:+\infty)$ çoxluğu da azalandır.

Misal 4 $f(x^2)=x^2+2x+3$ funksiyası $[-1:+\infty)$ -da artır və müsbət qiymətlər alır. Ona görə də $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$ funksiyası da $[-1:+\infty)$- çoxluğunda azalan olur.

Misal 5 $f(x)=x^3$ və $g(x)=2^x$+funksiyaları $(-\infty:+\infty)$ çoxluğunda artandır. Onda $\varphi(x)=f(x)+g(x)=x^3+2^x$-də həmin $(-\infty:+\infty)$ çoxluqda artandır.

Misal 6 $f(x)=tgx,$ və $g(x)=\sin x-$ funksiyaları $\left(0:\dfrac{\pi}{2}\right)$ artandırsa onda.

$f(x)\cdot g(x)=tgx\cdot\sin x$ -nı da $\left(0:\dfrac{\pi}{2}\right)$ çoxluğunda artandır.

1.4. Tək və cüt funksiyalar.

Tərif 1. Təyin oblastı $D(f)$ koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan $x\in(-a:a]$ $f(x)$ funksiyası üçün $f(-x)=f(x)$ şərti ödənilərsə, $y=f(x)$ funksiyasına $[-a:a]$aralığında cüt funksiya deyilir.

Misal 1. $f(x)=3x^2$ $f(-x)=3\cdot(-x^2)=3x^2=f(x)$ cüt funksiyadır

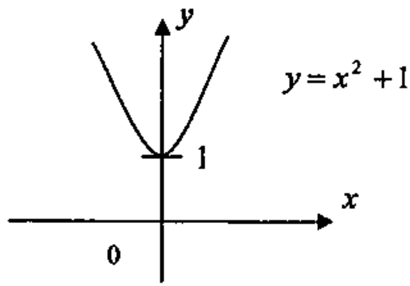
Tərif 2. $f(-x)=-f(x)$ funksiyasına tək funksiya deyilir.

Misal 2. $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$

$$f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^3=-\frac{1}{2}x^3=-f(x) \text{ - tək funksiyadır}$$

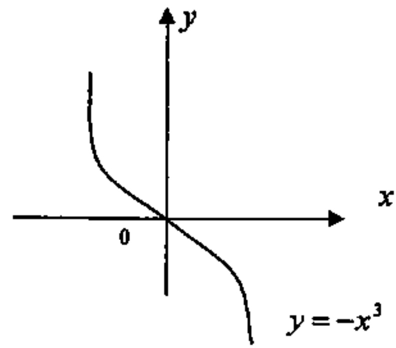
Tək və cütlüyün həndəsi mənası aşağıdakı kimidir.

Cüt funksiyanın qrafiki y-oxuna nəzərən simmetrik, tək funksiyanın qrafiki isə koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.



cüt funksiyadır

(şəkil 8.)



tək funksiyadır.

(şəkil 9.)

1.5. Tək və cüt funksiyaların aşağıdakı xassələri var

1. İki cüt funksiyanın cəmi cüt funksiyadır.
2. İki tək funksiyanın cəmi tək funksiyadır.
3. İki cüt funksiyanın hasili və nisbəti cüt funksiyadır.
4. f-funksiyası cüt funksiyasıdırsa, onda $\frac{1}{f}$-də cüt funksiyadır

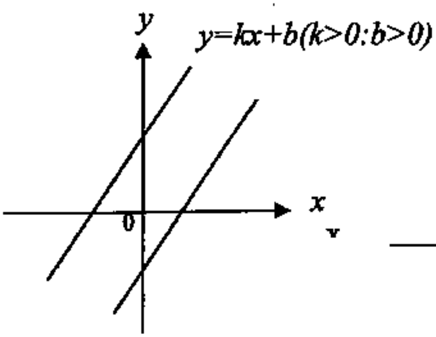
(əksinə f - təkdirsə, onda $\frac{1}{f}$ –də təkdir).

1.6. Elementar funksiyalar haqqında

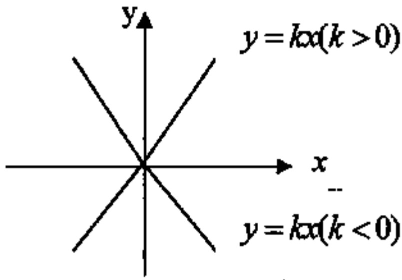
1) $y=kx+b$ (xətti funksiya)

$y=3x-2$

$D(y) = (-\infty : +\infty)$
$E(y) = (-\infty : +\infty)$



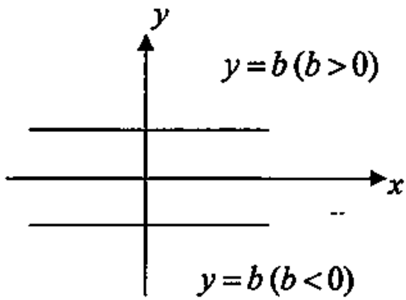
(şəkil 10)



(şəkil 11)

2) $y = kx \quad (b = 0)$
$y = 3x$
$D(y) = (-\infty : +\infty)$
$E(y) = (-\infty : +\infty)$

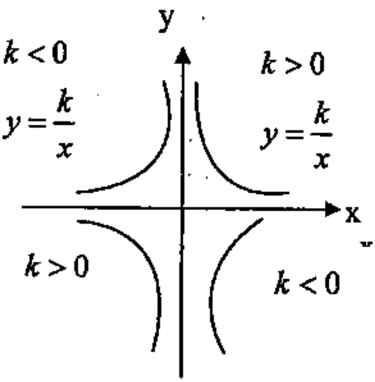
3) $y = b \quad (k = 0)$
$y = 3$
$D(y) = (-\infty : +\infty)$
$E(y) = b$



(Şəkil 12)

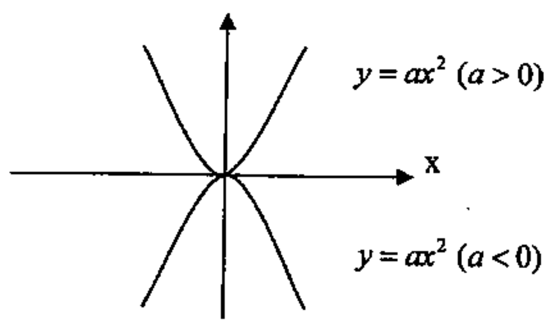
4) $y = \dfrac{k}{x} \quad (x \neq 0)$
$D(y) = (-\infty : 0) \cup (0 : +\infty)$
$E(y) = (-\infty : 0) \cup (0 : +\infty)$

5) $y = ax^2 \ (a > 0)$
$D(y) = (-\infty : +\infty)$
$E(y) = [0 : +\infty)$

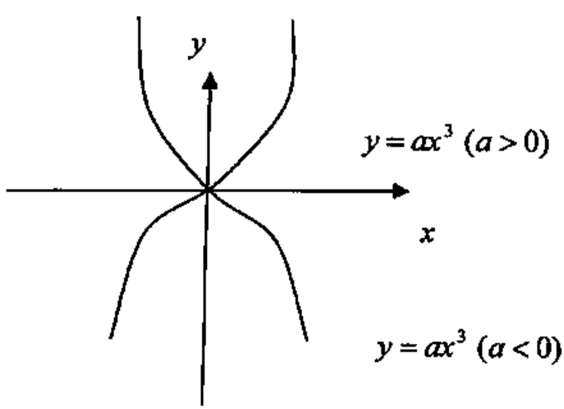


(Şəkil 13)

6) $y = ax^3 \quad (a > 0)$
$D(y) = (-\infty : +\infty)$
$E(y) = (-\infty : +\infty)$



(Şəkil 14)



(Şəkil 15)

1.7. Mürəkkəb funksiya

Tutaq ki, f və g-ədədi funksiyalar verilmişdir. Həm də $E(f) < D(f)$ olarsa $y = g(x)$ $x \in D(f)$, $z = f(y)$ $y \in D(f)$ olarsa onda $\varphi(x) = f(g(x))$ **funksiyası mürəkkəb** funksiyadır.

Teorem 1. $y = f(u)$: $u = g(x)$ funksiyaları cüt funksiyalardırsa onda $y = f(g(x))$ mürəkkəb funksiyası da cüt funksiyadır.

Əksinə $y = f(u)-$ funksiya cüt $u = g(x)$–si isə tək olarsa, onda $y = f(g(x))$-də tək funksiya olar.

Tapşırıq. Təyin oblastının tapılmasına aid misallar:

Misal 1 $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x^2-5x+6}$ -sının təyin oblastını tapaq.

$x^2 - 5x + 6$

$x_1 = 3$ deməli 2 və 3-dən başqa bütün qiymətlər

$x_2 = 2$

bu $D(f) = (-\infty : 2) \cup (2 : 3) \cup (3 : \infty)$ funksiyanın təyin oblastıdır.

Misal 2 $y = \sqrt{2x-3}$ -sının təyin oblastını tapaq.

Həlli: $2x - 3 \geq 0$ olanda $y = \sqrt{2x-3}$ -sinin mənası var.

$2x \geq 3$

$x \geq \dfrac{3}{2} \geq 1{,}5$

$D(y) = [1{,}5 : +\infty]$

Misal 3 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}$ -sinin təyin oblastını tapaq

Həlli: $\begin{matrix} 8 - x \geq 0 \\ x \geq 3 \end{matrix}$ və $\begin{matrix} 8 - x \geq 0 \\ -x \geq -8 \\ x \leq 8 \end{matrix}$ və yaxud $3 \leq x \leq 8$ deməli

$D(y) = [3 : 8]$

Misal 4 $f(x)=\dfrac{5x+14}{\sqrt{x^2-2x}}$ -sının təyin oblastını tapaq.

Həlli:
$$x^2-2x>0$$
$$x(x-2)>0$$
$$x>0$$
$$x>2$$

Deməli $D(f)=(-\infty:0)\cup(2:+\infty)$

Tapşırıq 1. Aşağıdakı funksiyaların təyin oblastını tapın.

1) $y=\dfrac{5}{x-3}$

2) $y=\dfrac{x^2+5}{x^2-4x+3}$

3) $y=\sqrt{3x-4}$

4) $y=\sqrt[4]{x-5}+\sqrt{10-x}$

5) $y=\dfrac{5x+14}{\sqrt{x^2-2x}}$

6) $y=x^2-x+3$

7) $y=\dfrac{3x-5}{4x-8}$

8) $y=\dfrac{x-1}{x^2-7x+12}$

9) $y=\sqrt{5x-10}$

10) $y=\dfrac{6x+11}{\sqrt{x^2-4x}}$

11) $y=\dfrac{x}{x^4-1}$

12) $y=\dfrac{x-2}{x^3-x}$

13) $y=\dfrac{1}{3x^2-2x+1}$

14) $y=\dfrac{2x^2}{3-x}$

15) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

16) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$

17) $f(x)=x\sqrt{3-x}$

18) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

19) $f(x)=\dfrac{6}{x^2-9}$

20) $f(x)=\log_2(4-3x)$

21) $f(x)=\log_3=(x-1)$ 22) $f(x)=\log_2\frac{3x+1}{1-x}$

23) $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 24) $f(x)=3x+\frac{7}{x}$

25) $f(x)=\frac{4-x^2-3x}{x-x^2-1}$ 26) $f(x)=x\sqrt{x^2-4}$

27) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}$

Tapşırıq 2. Verilmiş funksiyaların tək və cütlüyünü təyin edin.

1) $y=3x^2+1$ 2) $y=\frac{x^2+1}{x^4+1}$

3) $y=\frac{x^2+1}{x^5}$ 4) $y=x^3+x^2-3x+1$

5) $y=x^2-5$ 6) $y=3x+1$

7) $f(x)=1-x$ 8) $f(x)=x^3+x$

9) $f(x)=x^2$ 10) $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$

11) $f(x)=2x^5+3x$ 12) $f(x)=(x^2+2)(x^2-x)$

13) $f(x)=(x^3-1)(x+x^2)$ 14) $f(x)=-2x^3+3x-1$

15) $f(x)=x^2-6x+8$ 16) $f(x)=-5x^6+x^6$

17) $f(x)=\sqrt{3+x^2}$ 18) $f(x)=4x^3+x$

19) $f(x)=\frac{x^5}{x^6+5}$ 20) $f(x)=\frac{-4x^3+x}{|x|}$

21) $f(x)=x^6+3x^4+x$ 22) $f(x)=|x-1|\cdot|x+2|$

23) $f(x)=\frac{x+3}{x^2-x+5}$ 24) $f(x)=(x-2)(x-1)^2$

25) $f(x)=3x^4-2x^3-2$ 26) $f(x)=-x^2(x-1)$

27) $f(x)=\sqrt{5+x^2}$ 28) $f(x)=|x-2|+|x+6|$

§2. ƏDƏDİ ARDICILLIQ VƏ ONUN LİMİTİ

Tərif 1. Natural ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş funksiya ədədi ardıcıllıq adlanır.

Məsələn: 1:3:5:7:9: ardıcıllıq (2-artır)

1:4:7:10:13:... (3 artır)

Ardıcıllığı təşkil edən ədədlərə onun **hədləri** deyilir. Ədədi ardıcıllığın hədləri indeksi olan hərflərlə işarə olunur. **Məsələn**

$$a_1; a_2; a_3; ... a_n; \text{və s.}$$

Ardıcıllıq özü $\{a_n\}$ və yaxud (a_n) kimi işarə olunur. Ədədi ardıcıllığın istənilən nömrəli həddini tapmaq mümkündürsə, onda ədədi ardıcıllıq verilmiş hesab olunur.

Ardıcıllıq 3 üsulla verilə bilər.

1) **Analitik** üsul (Düstur)

2) **Təsvir** üsulu (Sıralanma)

3) **Rekurent** üsul (Qayıdış).

Həmin üç üsulları aydınlaşdıraq

I Analitik üsul- n-ci həddinin düsturu ilə verilir. Ardıcıllığın n-ci həddini onun n –nömrəsi ilə ifadə edən düstura n-ci həddin düsturu deyilir.

Misal: (a_n) ardıcıllığı $a = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ düsturu ilə verilmişdir. Onun ilk 3 həddini tapaq.

Həlli: a_1-i tapmaq üçün $n=1$, a_2-ni tapmaq üçün $n=2$, a_3-ü tapmaq üçün isə $n=3$ götürürük. Onda

$$a_1 = \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2+1} = \frac{3}{5}$$

$$a_3 = \frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3+1} = \frac{5}{7}$$

Nəticədə: $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{5}$; .... ardıcıllığını alırıq.

Qeyd Ardıcıllıq düstur üsulu ilə verildikdə n-ə natural qiymətlər verməklə istənilən həddin qiymətini tapmaq olar.

II Təsvir üsulu - Bu üsulla verilən ardıcıllıqda ardıcıllıqlarda bir-neçə ilk həddi verilir. Verilənlər arasındankı qanuna uyğunluğu müəyyən edib, qalan hədləri növbə ilə tapmaq olar.

Məsələn 3; 6; 9; 12; 15; .... və s.

III. Rekurent üsulu - Rekurent üsulla verilən ardıcılıqlarda I-həddin qiyməti məlum olmalıdır və ixtiyarı 2 ardıcıl hədlər arasındakı əlaqə düsturu verilməlidir.

Rekurent üsulunda istəlinən həddin qiymətini tapmaq üçün özündən əvvəlki həddən istifadə olunur.

Misal $a_1 = 2$ və $a_{n+1} = 3 \cdot a_1$, $n=1$

$$a_2 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 6 = 18$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 = 3 \cdot 18 = 54$$

$$a_5 = 3 \cdot a_4 = 3 \cdot 54 = 162 \text{ və s.}$$

Nəticədə 2; 6; 18; 54; 162. və s. ardıcıllığı alınır.

Hədlərinin sayına görə ardıcıllıqlar 2 növə bölünür. Sonlu və sonsuz həddi olan ardıcıllıqlar.

Tərif 2. Sonlu sayda həddi olan ardıcıllığa **sonlu ardıcıllıq** deyilir.

Məsələn. İkirəqəmli natural ədədlər ardıcıllığı:

10; 11; 12; ......, 98, 99

Tərif 3. Sonsuz sayda həddi olan ardıcıllığa **sonsuz ardıcıllıq** deyilir.

Məsələn. Cüt natural ədədlər ardıcıllığı 2; 4; 6; 8; ....,

Ardıcıllıqlar, hədləri arasındakı münasibətlərinə görə artan, azalan, sabit, rəqs edən ola bilər.

Monoton artan ardıcıllıq – Bu ardıcıllıqda, ikinci həddən başlayaraq ardıcıllığın hər bir həddi, özündən əvvəlki həddən böyük olur.

Monoton azalan ardıcıllıq – ikinci həddən başlayaraq hər bir həddi, özündən əvvəlki həddən kiçik olur.

Tərif 4. İstənilən natural n üçün $a_{n+1} > a_n$ olarsa (a_n) monoton artan ardıcıllıq, istənilən natural n üçün $a_{n+1} < a_n$ olarsa (a_n)

ardıcıllığına monoton azalan ardıcıllıq deyilir.

Məsələn. $a_n = \dfrac{2n+3}{6n-5}$ - ardıcıllığının azalan olduğunu göstərək.

$$a_n = \frac{2n+3}{6n-5},\ a_{n+1} = \frac{2n+2+3}{6n+6+5} = \frac{2n+5}{6n+1}$$

Göstərək ki $a_{n+1} > a_n n \in N$

Onda

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+5}{6n+1} - \frac{2n+3}{6n-5} = \frac{(2n+5)(6n-5)-(2n+3)(6n+1)}{(6n+1)(6n-5)} =$$

$$= \frac{12n^2+20n-25-12n^2-20n}{(6n+1)(6n-5)} = \frac{-28}{(6n+1)(6n-5)} < 0 n \in N$$

$$a_n = \frac{2_n}{2_n+1}\text{ - } \quad \text{artan ardıcıllıqdır.}$$

Tərif 5. Bütün hədləri bir-birinə bərabər olan ardıcıllığa sabit ardıcıllıq deyilir.

Məsələn. 3; 3; 3; 3; 3; ….. sabit ardıcıllıqdır.

Tərif 6. Nə artan, nə də azalan ardıcıllığa **rəqs edən** ardıcıllıq deyilir.

Məsələn. -2; 2; -2; 2; …. rəqs edən ardıcıllıqdır.

Elə ardıcıllıqlar var ki, onların bütün hədləri müəyyən bir ədəddən ya böyük, ya da kiçik olur.

Tərif 7. A sonlu olmaqla istənilən natural n ədədi, üçün $a_n \le A$ şərti ödənilsə, (a_n) ardıcıllığına **yuxarıdan məhdud** ardıcıllıq deyilir.

Tərif 8. A sonlu ədəd olduqda, istənilən natural n üçün $a_n \ge A$ şərti ödənilərsə, (a_n) ardıcıllığına **aşağıdan məhdud** ardıcıllıq deyilir.

Tərif 9. Eyni zamanda həm aşağıdan, həm də yuxarıdan məhdud olan ədədi ardıcıllığa məhdud ardıcıllıq deyilir.

2.1. Ədədi ardıcıllığın limiti. Limitlər haqqında teoremlər

Tərif 1. Fərz edək ki, istənilən ε müsbət ədədi üçün elə N – nömrəsi var ki, bütün $n > N$ nömrələri üçün $|a_n - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda a -ya (a_n) ardıcıllığın **limiti** deyilir və belə yazılır.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad (1)$$

(1) bərabərliyinin oxunuşu belədir: «n sonsuzluğa» yaxınlaşdıqda (a_n) ardıcıllığının limiti a -ya bərabərdir.

Teorem 1. Ədədi ardıcıllığın birdən artıq limiti ola bilməz.

Teorem 2. Hər bir monoton məhdud ardıcıllığın sonlu limiti var.

Tərif 2. Sonlu limiti olan ardıcıllığa yığılan, limiti olmayan ardıcıllığa isə dağılan ardıcıllıq deyilir.

Ardıcıllığın limitlərini hesablayarkən, iki ardıcıllığın cəminin, hasilinin, qismətinin limitləri haqqındakı teoremlərdən istifadə edilir.

Teorem 3. Sabit ardıcıllığın limiti bu ardıcıllığın həddinə bərabərdir. Yəni;

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

Teorem 4. İki yığılan ardıcıllığın cəminin limiti bu ardıcıllıqların limitləri cəminə bərabərdir. Yəni; (a_n) və (b_n) yığılan ardıcıllıq olarsa,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

Teorem 5. İki yığılan ardıcıllığın hasilinin limiti bu ardıcıllığın limitləri hasilinə bərabərdir. Yəni; (a_n) və (b_n) yığılan ardıcıllıqlar isə,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Teorem 6. İki yığılan ardıcıllığın nisbətinin limitli; (bölənin limiti sıfırdan olduqda) bölünənin limiti ilə bölənin limiti nisbətinə bərabərdir. Yəni; (a_n) və (b_n) yığılan ardıcıllıqlar, $\lim_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$ olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \text{olar.}$$

Teorem 7. İstənilən natural n üçün $a_n \le b_n \le c_n$ və $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ olarsa onda $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ olar.

Teorem 8. $|q|<1$ olduqda, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ olar

Qeyd 1. Sabit vuruğu limit işarəsinin qarşısına çıxarmaq olar. Yəni; c –sabit, (a_n) yığılan ardıcıllıq olduqda

$$\lim_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n \text{ olar.}$$

Qeyd 2. k-istinilən müsbət ədət olduqda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ olar.

Misal 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n-3}{13-7n}$ hesablayaq.

Həlli: Qismətin limiti haqqındakı teoremi birbaşa tətbiq etsək $\frac{\infty}{\infty}$ şəkilində qeyri-müəyyənlik alarıq. Bu qeyri-müəyyənliyi aradan qaldırmaq üçün $\frac{8n-3}{13-7n}$ kəsirinin sürət və məxrəcini n-ə bölüb sonra kəsrin limiti haqqında teoremi tətbiq edirik.

Yəni: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n-3}{13-7n} = \lim\limits_{n\to\infty}$

$$\frac{8-\frac{3}{n}}{\frac{13}{n}-7} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(8-\frac{3}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{13}{n}-7)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}8-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{13}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}7} = \frac{8-0}{0-7} = -\frac{8}{7} = -1\frac{1}{7}$$

Misal 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^2+n+2}{4n^2+5n+6}$ –i hesablayaq

Həlli: Birbaşa limitə keçək, $\frac{\infty}{\infty}$ - qeyri-müəyyənlik alarıq. Ona görə də əvvəlcə kəsrin sürət və məxrəcini n^2-na bölüb sonra limitə keçirik.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^2+n+2}{4n^2+5n+6} = \lim_{n\to\infty}$$

$$\frac{5+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{4+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}=\frac{5+0+0}{4+0+0}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$$

Misal 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3n^2+n}{7}\right)-i$ hesablayaq

Həlli: Hasilin limiti haqqında teoremi tətbiq etsək. $0\cdot\infty$ şəklində qeyri-müəyyənlik alarıq. Odur ki, $\frac{1}{n^2}$ və $\frac{3n^2+n}{7}$ kəsrlərini vurub, sonra $\frac{\infty}{\infty}$ şəklindəki qeyri-müəyyənliyi məlum qayda ilə aradan qaldırmaq mümkündür. Beləliklə,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3n^2+n}{7}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{7n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{7}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}7}=\frac{3+0}{7}=\frac{3}{7}$$

Misal 4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n-2}-n\right)$ -i hesablayaq.

Həlli: Cəmin limiti haqqındakı teoremi tətbiq etsək $\infty-\infty$ şəklində qeyri-müəyyənlik alarıq. Bu qeyri müəyyənliyi aradan qaldırmaq üçün əvvəlcə fərqi kəsrə çevirək.

Yəni; $\frac{n^2+4}{n-2}-n=\frac{n^2+4-n^2+2n}{n-2}=\frac{2n+4}{n-2}$ olar.

Onda $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n-2}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{1-\frac{2}{n}}=\frac{2+0}{1-0}=\frac{2}{1}=2$

olar.

Misal 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{5^n+3^n}$ hesablayaq.

Yenə də $n\to\infty$ olduqda $5^n\to\infty$ və $(5^n+3^n)\to\infty$. Bu qeyri-müəyyənliyi aradan qaldırmaq üçün $\dfrac{5^n}{5^n+3^n}$ kəsrinin surət və məxrəcini 5^n-ə bölək. Onda.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1}{1+0}=1$$

Misal 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+12n^2}-n^2}{2}$-i hesablayaq.

Bu qeyri-müəyyənliyi aradan qaldırmaq üçün kəsrin surət və məxrəcini surətin qoşmasına vuraq. Onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+12n^2}-n^2}{2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^4+12n^2}-n^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{n^4+12n^2}+n^2}{\sqrt{n^4+12n^2}+n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+12n^2-n^4}{2\sqrt{n^4+12n^2}+2n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2}{2(\sqrt{n^4+12n^2}+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{2\cdot\left(\sqrt{n^2+\frac{12}{n^2}}+1\right)}=$$

$$=\frac{12}{2(1+1)}=\frac{12}{2\cdot 2}=\frac{12}{4}=3$$

Misal 7 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{\pi}{n}\right)-i$ hesablayaq.

Həlli:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\right)=\cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\lim\frac{\pi}{n}\right)=\cos o+\sin o=1+0=1$$

Limitlərin hesablanmasına aid misallar. Aşağıdakı limitləri hesablayın.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}-7\right)$ C (-7)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{15}{7n}+3\right)$ C (3)

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-5}{n}$ C (2)

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n+5}$ $C\left(\frac{1}{2}\right)$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}$ C (0)

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^4+1}$ C (0)

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+3n+4}$ $C\left(\frac{3}{2}\right)$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3n^2+n}{7}\right)$ $C\left(\frac{3}{7}\right)$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{4n+1}-\frac{4n^3}{16n^2-1}\right)$ $C\left(-\frac{1}{16}\right)$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-2}{15n^2+7}$ $C-\frac{1}{5}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+5)\cdot(2n-3)}{(n+2)\cdot(6n-1)}$ $C-1$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n^2+n}-6\right)$ C-6

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n-3)(n+2)}$ C-1

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$ $\qquad$ $C-\dfrac{1}{2}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-5}{3n}-\dfrac{7}{n^2}\right)$ $\qquad$ C-2

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{2n+1}-\dfrac{6n^3}{4n^2-1}\right)$ $\qquad$ $C-\dfrac{3}{4}$

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^2+3x}$ $\qquad$ C-2

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5-x}+2}{x^2-5x+4}$ $\qquad$ C-0

19 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ $\qquad$ C-0

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{6n^2-1}+7}{\sqrt{24n^2+3}-1}$ $\qquad$ $C-\dfrac{1}{2}$

21) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-2$ olduqda. $\lim\limits_{n\to\infty}(7a_n+5b_n)$-i hesablayın: C=11

22) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$ $\qquad$ $b_n=-3$ olduqda $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3a_n-2b_n}{a_n-3b_n}$-i hesablayın

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n}$ $\qquad$ $C\left(\dfrac{7}{3}\right)$

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{5n+1}{3n+2}\right)$ $\qquad$ $C\left(1\dfrac{2}{3}\right)$

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(3-n)^2}{n^2+1}$ $\qquad$ C (12)

26) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$ $\qquad C\left(\dfrac{1}{2}\right)$

27) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+3}{b_n+5}$ $\qquad C\left(\dfrac{a}{b}\right)$

28) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{\,2}+4}{b_n^{\,2}+4+20}$ $\qquad C\left(\dfrac{a}{b}\right)$

29) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n}{n^2+n+1}$ $\qquad$ C(0)

30) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5n+6}{n^2-1}$ $\qquad$ C(1)

2.2. Funksiyanin limiti və onun xassələri

Tutaq ki, *y=f(x)* funksiyası x_0 nöqtəsinin hər hansı (α,β) ətrafinda təyin olunub $x_0\in(\alpha,\beta)$ müstəsna ola bilər.

Tərif 1. $x_0\to a$ yığılan ixtiyari $x_1,x_2\ ...x_n$ $(n\in N\,:)$ ardıcıllığı üçün $f(x_1);f(x_2);\cdots f(x_n)$ ardıcıllığı A ədədinə yığılarsa, bu ədədə x dəyişəni $x_0\to a$ yaxınlaşdıqda $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində limiti deyilir və $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ kimi yazılır.

Tərif 2. Tutaq ki, $\forall\,\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tapmaq olar ki, $|x-x_0|\angle\delta$ bərabərsizliyini ödəyən x-lər üçün $|f(x)-A|\angle\varepsilon$ olur. Onda A ədədinə $x\to x_0$ yaxinlaşdiqda $f(x)$-funksiyasının limiti deyilir. $(x\in(\alpha,\beta)$ və $x\neq x_0)$ (Bu Koşi mənada tərifdir).

Misal: $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x-3}$ funksiyası $x_0=3$-də təyin olunmayıb. Deməli $x_0=3$-də bu funksiyanın limiti var.

Onda

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x+3}{x-3}=\frac{2(x-3)(x+\frac{1}{2})}{x-3}=\frac{2(x+\frac{1}{2})}{1}=2x+1=2\cdot 3+1=7$$

olar.

2.3. Funksiyanin limitinin xassələri

Xassə 1. 1) $f(x)$ və $g(x)$ -funksiyasının X_0-də limiti varsa $f(x)\pm g(x)$; $f(x)\cdot g(x)$ və $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim g(x)\neq 0)$ funksiyasının da limiti var və onlar aşağıdakı kimi yazılır.

$$\lim_{x\to x_0}\cdot(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)};\qquad (\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0)$$

Xüsusi halda $\lim\limits_{x\to x_0}\cdot cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ olar və s.

Hər hansı x_0 - də $f(x_0)=0$, $g(x_0)=0$ olarsa $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbəti $x=x_0$ - da təyin olunmayıb.

Bu halda $x\to x_0$ olduqda $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbətinin hesablanması adətən $\frac{0}{0}$ şəkilində qeyri-müəyyənlikdən başqa $\frac{\infty}{\infty}$: 1^{∞}; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$ və s. şəkilində qeyri-müəyyənliklər də olur. Onda həmin funksiyaların limitlərini hesablayaraq müəyyən hala gətirmək lazımdır. Aşağıdakı misallarda bunları əyani görə bilərik.

Misal 1. $\lim\limits_{x\to 2}\cdot(x^2+x-3)$ -ü hesablayaq. Xassəyə əsasən

$$\lim_{x\to2}(x^2+x-3)=\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}(-3)=\lim_{x\to2}x\cdot\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}x+(-3)=$$
$$=2\cdot2+2-3=3$$

Misal 2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-7x+2}{x^2+x-2}=\dfrac{3^3-7\cdot3+2}{3^2+3-2}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

Misal 3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ -ni hesablayaq

Həlli: $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ funksiyasında x-in əvəzinə 3 yazsaq, $\dfrac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənlik alarıq. $\dfrac{0}{a}$ şəklini aradan qaldırmaq üçün əvvəlcə $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ kəsrini $x\neq3$ qəbul edərək (x-3)-ə ixtisar edək.

Yəni

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x+1}{x+3}$$

Sonra

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{3+1}{3+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Misal 4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$ ifadəsində x-in əvəzinə (-3) yazsaq $\dfrac{0}{0}$ qeyri-müəyyənlik alınır. Ona görə də həmin ifadəni qeyri-müəyyənlikdən müəyyən hala gətirmək lazımdır. Bunun üçün $\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$ kəsrinin sürət və məxrəcini $\sqrt{x+4}-1$ ifadəsinin qoşmasına yəni $\sqrt{x+4}+1$-ə vurub, alınan ifadəni sadələşdirək.

Yəni

$$\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}=\frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)}=\frac{(x+3)\cdot(\sqrt{x+4}+1)}{x+4-1}=\sqrt{x+4}+1$$

alınır. Beləliklə,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4-1}}=\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+4}+1)=\sqrt{-3+4}+1=\sqrt{1}+1=1+1=2$$

Misal 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}$ hesablayaq.

Həlli: Qeyd edək ki, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$ olur. Ona görə də

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{4}\cdot 1=\frac{5}{4}$$

Misal 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{3x}$ - hesablayaq.

Həlli: $tg2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ olduğundan.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x\cdot\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$$

ümumiyyətlə: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgmx}{nx}=\frac{m}{n}$

Misal 7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}$ hesablayaq.

Həlli:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Misal 8.

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5}=\left(\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right)^{5}=e^{5}$$

Ümumiyyətlə: $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=e^{ab}$

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^4+1}$ $\qquad c=1$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+7}{x^2+x+8}$ $\qquad c=-\dfrac{1}{10}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ $\qquad c=-1$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-7}{x^2-8}$ $\qquad c-\dfrac{8}{9}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{(x-6)(x+2)}$ $\qquad c=-\dfrac{9}{5}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+6x}{x^2+5x}$ $\qquad c=\dfrac{6}{5}$

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ $\qquad c=\dfrac{2}{3}$

8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^3}{x+1}$ $\qquad c=0$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x+2}$ $\qquad c=-2$

10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$ $\qquad c=-\dfrac{5}{3}$

11) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+x^2)\left(1-\dfrac{x}{x+1}\right)$ $\qquad c=1$

12) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{5+x}-\dfrac{1}{x^2+3x}\right)$ $\qquad c=\dfrac{1}{12}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x(1+x)^2}\right)$ $\qquad c=2$

14) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$ $\qquad c=-\dfrac{1}{6}$

15) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ $\qquad c=-\dfrac{1}{8}$

16) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ $c=\frac{1}{2}$

17) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ $c=\frac{3}{4}$

18) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$ $c=\frac{4}{4}$

19) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ $c=\frac{1}{4}$

20) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$ $c=2$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg5x}$ $c=\frac{3}{5}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}$ $c=\frac{7}{4}$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5n^8-n^7+1}{2-3n^8}$ $c=\frac{1}{2}$

24) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}$ $c=3\frac{4}{7}$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5-x}+2}{x^2-5x+4}$ $c=0$

§3. FUNKSİYANIN KƏSİLMƏZLİYİ VƏ ONUN XASSƏLƏRİ

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası x_0 -nöqtəsində və onun ətrafında təyin olunub.

Tərif 1. $f(x)$-funksiyasının x_0-nöqtəsində limiti funksiyasının bu nöqtədəki qiymətinə bərabərdirsə, yəni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ödənilirsə, onda $f(x)$-funksiyasına x_0-nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir.

Tərif 2. (Koşi mənada) Tutaq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $\delta > 0$ tapmaq olar ki, $|x - x_0| \angle \delta$ olarsa bütün x-lər üçün $|f(x) - f(x_0)| \angle \varepsilon$ olur. Onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir.

Tərif 3. $y = f(x)$ funksiyası $(a:b)$ intervalının $(a \angle b)$ hər bir nöqtəsində kəsilməzdirsə funksiya bu intervalda kəslməz adlanır.

Tərif 4. Funksiya a və b nöqtəsində təyin olunduqda $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ və $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$ olarsa, funksiya uyğun olaraq a-da sağdan, b-də isə soldan kəsilməzdir.

Kəsilməzliyin xassələri:

1) $f_1(x)$ və $f_2(x)$ funksiyaları x_0-nöqtəsində kəsilməzdirsə, yəni

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm f_2(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x)$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \text{ və } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \qquad (f_2(x_0) \neq 0)$$

funksiyaları da x_0-nöqtəsində kəsilməzdir.

2) Elementar funksiyalar təyin olunduğu hər bir nöqtədə kəsilməzdir.

3) $y = f(x)$ funksiyası $x = x_0$ nöqtəsində, $x = g(y)$ - funksiyası da $y = y_0$-da kəsilməzdirsə, onda $y = f(g(y))$ mürəkkəb funksiyası da y_0-nöqtəsində kəsilməzdir.

Misal1 $f(x) = \dfrac{2}{3x-2}$ sinin kəsilmə nöqtəsini tapın.

Həlli: $f(x) = \dfrac{2}{3x-2}$ -kəsri rasional funksiya olduğundan

$$3x - 2 = 0$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

deməli $\frac{3}{2}$ kəsilmə nöqtəsidir.

Tapşırıq: ***Verilmiş funksiyanın kəsilmə nöqtəsini tapın***

1) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ 6) $f(x)=\frac{2x}{x+4}$

2) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+2x-3}$ 7) $f(x)=\frac{5-x}{2x-10}$

3) $f(x)=\frac{x+1}{x^3-4x}$ 8) $f(x)=\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$

4) $f(x)=x^3-2x+1$ 9) $f(x)=\frac{6-x}{x^2-6x}$

5) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ 10) $f(x)=\frac{3x}{x^2-5x+6}$

Qeyd Funksiyanın kəsilməzliyi, adətən hansı səbəbdən pozulur $y=f(x)$ funksiyasının $x=x_0$ nöqtəsində kəsilməzliyi ya bu funksiyanın $x=x_0$ nöqtəsində $f(x_0-0)$ və $f(x_0+0)$ birtərəfli limitlərinin olması, ya da ki, limitləri olsa da $f(x_0)$ qiymətinə bərabər olmaması səbəblərindən pozula bilər.

Misal $f(x)=\begin{cases} 3, & x\le -2 \ olduqda \\ x^2+1, & -2<x< olduqda \\ \frac{5}{x-1}, & x\le 2 \ \ olduqda \end{cases}$

Funksiyasının kəsilməzliyini araşdıraq.

Həlli: Verilmiş funksiya $(-\infty-2)\cup(-2:2)\cup(2:+\infty)$ aralığında kəsilməzdir.

Kəsilmə yalnız aralıqların sərhəd nöqtələri olan $x=-2$ və $x=2$ nöqtələri ola bilər.

$$f(-2-0)=\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0} 3=3$$

$$f(-2+0)=\lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0}(x^2+1)=-2^2+1=5$$

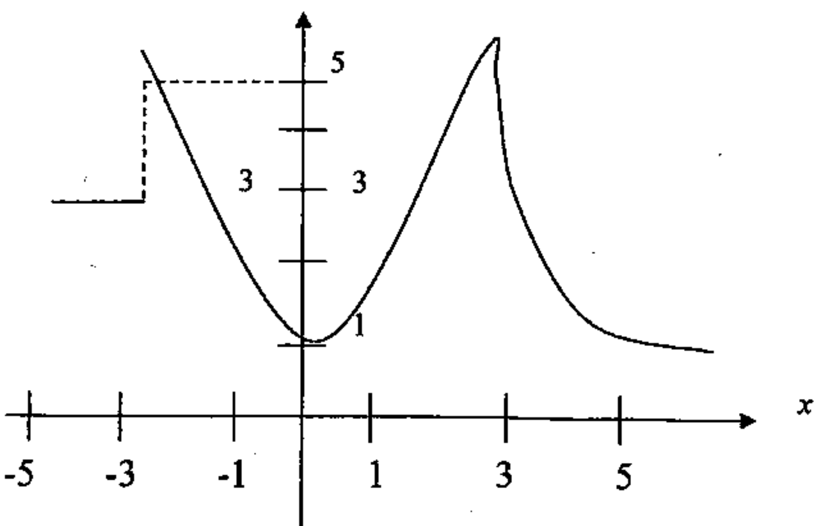
$f(-2-0)\neq f(-2+0)$ olduğundan $x=-2$ nöqtəsində funksiya kəsiləndir.

$$f(-2+0)=\lim_{x\to -2-0}(x^2+1)-2^2+1=5$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to -2+0}=\frac{5}{x-1}=\frac{5}{2-1}=\frac{5}{1}=5$$

Buradan da görünür ki,

$f(2-0)=f(2+0)=5$ olduğundan, verilən funksiyalar $x=2$ nöqtəsində kəsilməzdir. Funksiyanın qrafiki isə belədir.



(şəkil 16)

§4. FUNKSİYANIN TÖRƏMƏSİ

4.1. Törəmənin tərifi

Tutaq ki, müəyyən aralıqda təyin olunmuş $y=f(x)$ funksiyası verilir.

Fərz edək ki, x arqumenti müəyyən Δx artımı alır. Onda $y = f(x)$ funksiyası da müəyyən $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ artımı alır. Bu artımın arqument artımına olan nisbətinə baxaq. Yəni

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+x\Delta) - f(x)}{\Delta x}$$

Tərif: Funksiya artımının arqument artımına nisbətinin $\Delta x \to 0$ şərtində limiti varsa, bu limitə funksiyanın x-nöqtəsində **törəməsi** deyilir və

$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, y'x$ kimi işarə olunur.

Beləliklə tərifə görə

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ və yaxud } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nöqtədə törəməsi olan funksiya bu nöqtədə difrensiallanan funksiyadır.

Törəmənin tapılması əməliyyatı isə diferesiallanma adlanır.

Funksiyanın törəməsinin hər hansı x_0 nöqtəsindəki qiyməti $f'(x_0)$ və yaxud $y'(x_0)$ kimi işarə edilir. Bu qiyməti tapmaq üçün əvvəlcə funksiyanın törəməsi tapılır. ($f'(x)$ tapılır) sonra alınmış nəticədə $x = x_0$ götürülür.

4.2. Törəmənin həndəsi mənası

Tutaq ki, (a,b) intervalında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərində götürülmüş M nöqtəsi arqumentin x_0, N nöqtəsi isə $x+\Delta x$ qiymətinə uyğundur.

((x_0, x_0+Δx -də) a,b-intervalındadır)

M, N nöqtəsindən keçən düz xətt $y = f(x)$ əyrisini kəsən adlanır.

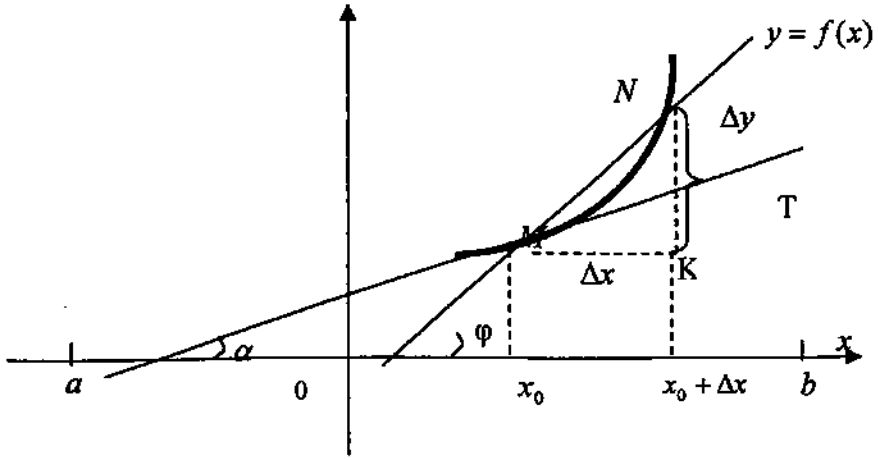
MN düz xətlə x-oxunun müsbət istiqaməti arasındakı bucağı φ -ilə işarə edək. N-dən Ox-oxuna endirilmiş perpendikulyar bu perpendkulyara M -nöqtəsindən Oy-oxuna endirilmiş perpendikulyarın kəsişmə nöqtəsini K-ilə işarə edək ($MK \perp NK$) və ΔMKN-

dən kəsənin K_1 buçaq əmsalını tapaq.

Aydındır ki, N nöqtəsi əyri boyunca ixtiyari tərəfdən M-nöqtəsinə yaxınlaşdıqda $\Delta x \to 0$ olur. Bu zaman $M\,N$ kəsəni müəyyən MT vəziyyətinə yaxınlaşarsa, MT düz xəttinə M -nöqtəsində toxunanı deyilir.

MT toxunanın Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağı α -ilə işarə edək. $\Delta x \to 0$ olduqda, $\varphi \to \alpha$ və MT toxunanı Ox oxuna perpendikulyar olmadıqda, tangens funksiyasının kəsilməzliyinə əsasən $tg\varphi - tg\alpha$. Bunu nəzərə alaraq $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ -də $\Delta x \to 0$ şərti ilə limitə keçsək, MT toxunanının k bucaq əmsalını taparıq. $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Beləliklə, arqumentin hər hansı x_0 nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının $f'(x_0)$ törəməsi, funksiyasının qrafikinə $(x_0; f(X_0))$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangens-toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir. Bu, törəmənin həndəsi mənasıdır. (şəkil 17)



(Şəkil 17)

4.3 Törəmənin fiziki mənası

Törəmənin fiziki mənasını vermək üçün fərz edək ki, $y=f(x)$ funksiyası M -maddi nöqtəsinin düz xətt üzrə hərəkət qanunu təsvir edir, yəni $y=f(x)$, M nöqtəsinin başlanğıc andan x zaman müddətinə getdiyi yoldur.

Onda maddi nöqtənin x_0 anına qədər getdiyi yol $y=f(x_0)$, x_1 anına qədər getdiyi yol $y_1=f(x_1)$ olar və deməli, $\Delta x=x_1-x_0$ müddətində M nöqtəsi $\Delta y=f(x_1)-f(x_0)=f(x+\Delta x)-f(x_0)$ yolunu kecir. Fizikadan məlum olan tərifə görə $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-nisbəti nöqtənin Δx zaman müddətində orta sürəti, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-in $\Delta x\to 0$ şərti ilə limiti isə nöqtənin x_0 anında ani sürəti adlanır. Bu sürəti ϑ ilə işarə etsək,

$$\vartheta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x_0)$$ alarıq. Beləiklə,

Düzxətli hərəkətin sürəti yolun zamana görə törəməsinə bərabərdir.

4.4. Cəmin, hasilin və kəsrin törəməsi

Tutaq ki, $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları hər hansı (a,b) intervalında diferensiallanan funksialardır. x həmin intervalın ixtiyari nöqtəsidir, Δx isə onun artımıdır, və Δx elədir ki, $x+\Delta x$ nöqtəsi bu intervaldan kənara cıxmır.

Funksiyanın törəməsi üçün aşağıdakı teoremlər doğrudur.

Teorem 1. İki funksiya cəminin törəməsi onların törəmələri cəmin bərabərdir. $[f(x)+\varphi(x)]'=f'(x)+\varphi'(x)$ (1)

İsbatı: $y=f(x)+\varphi(x)$ funksiyasına baxaq və x-ə Δx artımı verib, funksiyanın uyğun artımını hesablayaq:

$$\Delta y=[f(x+\Delta x)+\varphi(x+\Delta x)]-[f(x)+\varphi(x)]=$$

$$= [f(x+\Delta x) - f(x)] + [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] = \Delta f(x) + \Delta\varphi(x)$$

yə'ni

$$\Delta y = \Delta f(x) + \Delta\varphi(x) \qquad (2)$$

(2) bərabərliyinin hər iki tərəfini Δx-ə bölüb, $\Delta x \to 0$-da limitə keçək, alınır

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = [f(x) + \varphi(x)]'$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

Bunları nəzərə alsaq (1) münasibətin doğruluğunu alırıq, yə'ni

$$[f(x) + \varphi(x)]' = f'(x) + \varphi'(x)$$

Teorem 2. İki funksiya hasilinin törəməsi üçün

$$[f(x)\cdot\varphi(x)]' = f'(x)\cdot\varphi(x) + f(x)\cdot\varphi'(x) \quad (3)$$

düsturu doğrudur.

İsbatı: $y = f(x)\cdot\varphi(x)$ funksiyasına baxaq. Arqumentə Δx artımı verib, funksiyanın uyğun artımını aşağıdakı kimi çevirək:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x+\Delta x) - f(x)\cdot\varphi(x) =$$

$$= [f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x+\Delta x) - f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)] + [f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x) - f(x)\cdot\varphi(x)] =$$

$$= [f(x+\Delta x) - f(x)]\cdot\varphi(x+\Delta x) + f(x)[\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] =$$

$$= \Delta f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x) + f(x)\cdot\Delta\varphi(x) \text{ yəni}$$

$$\Delta y = \Delta f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x) + f(x)\cdot\Delta\varphi(x) \qquad (4)$$

(4) bərabərliyinin hər iki tərəfini Δx-ə bölüb, $\Delta x \to 0$-da limitə keçək və

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x), \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x),$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}=\varphi'(x)$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(x+\Delta x)+f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}, \quad \text{yə'ni}$$

$$[f(x)\cdot\varphi(x)]'=f'(x)\cdot\varphi(x)+f(x)\cdot\varphi'(x).$$

Nəticə 1. Sabit vuruğu törəmə işarəsi xariçinə çıxarmaq olar.

$$[cf(x)]'=c\cdot f'(x) \qquad (5)$$

Doğrudan da (3) düsturuna əsasən

$$[cf(x)]'=c'\cdot f(x)+c\cdot f'(x)=c\cdot f'(x)$$

($c'=0$ olduğundan).

Nəticə 2. Fərqin törəməsi törəmələr fərqinə bərabərdir.

$$[f(x)-\varphi(x)]'=f'(x)-\varphi'(x) \qquad (6)$$

Doğrudan da teorem 1 və nəticə 1 əsasən

$$[f(x)-\varphi(x)]'=[f(x)+(-1)\varphi(x)]'=f'(x)+[(-1)\cdot\varphi(x)]'=f'(x)-\varphi'(x).$$

Teorem 3. $\varphi(x)\neq 0$ olduqda kəsrin törəməsi üçün

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \qquad (7)$$

düsturu doğrudur.

İsbatı: $y=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiyasına baxaq. Arqumentə Δx artımı verib, funksiyanın uyğun artımını aşağıdakı kimi çevirək:

$$\Delta y=\frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)-f(x)\varphi(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)}=$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)-f(x)\varphi(x)+f(x)\cdot\varphi(x)-f(x)\varphi(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)}=$$

$$=\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]\varphi(x)-f(x)[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)},$$

$$\text{yəni } \Delta y=\frac{\Delta f(x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\Delta\varphi(x)}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)} \qquad (8)$$

(8) münasibətinin hər tərəfini Δx-ə bölüb, $\Delta x\to 0$-da limitə keçək:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\varphi(x)-f(x)\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)},$$

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$$

Nəticə 3. $\left[\frac{f(x)}{c}\right]'=\frac{1}{c}\cdot f'(x)$ (9)

Doğrudan da

$$\left[\frac{f(x)}{c}\right]'=\left[\frac{1}{c}\cdot f(x)\right]'=\frac{1}{c}\cdot f'(x).$$

Nəticə 4. $\left[\frac{c}{\varphi(x)}\right]'=-\frac{c\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$ (10)

Doğrudan da

$$\left[\frac{c}{\varphi(x)}\right]' = \frac{c'\varphi(x) - c\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = -\frac{c\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

4.5 Əsas elementar funksiyaların törəməsi

1. Qüvvət funksiyasının törəməsi.

Qüvvət funksiyasına $y = x^n$, $n \in N$ baxaq.

Teorem 1. $y = x^n$ funksiyasının törəməsi

$(x)^n = n \cdot x^{n-1}$ (13) düsturu ilə hesablanır.

Qeyd. $n = \dfrac{m}{k}$ olduqda $\left(x^{\frac{m}{k}}\right)' = \dfrac{m}{k} \cdot x^{\frac{m-k}{k}}$ (14)

Bunu çevirib $\left(\sqrt[k]{x^m}\right)' = \dfrac{m}{k \cdot \sqrt[k]{x^{k-m}}}$ (15) alarıq.

Xüsusi halda $k = 2$, $m = 1$ olduqda, alınır: $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Misal 1. $y = \dfrac{1}{x^3} + 5x^2 - 3x + 1$ funksiyasının törəməsini tapın.

$$y' = \left(\frac{1}{x^3} + 5x^2 - 3x + 1\right)' = \left(x^{-3} + 5x^2 - 3x + 1\right)' =$$

$$-3x^{-4} + 10x - 3 = -\frac{3}{x^4} + 10x - 3.$$

Misal 2. $y = \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x}$ funksiyasının törəməsini tapın.

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x}\right)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

2. Üstlü funksiyasının törəməsi

Teorem 2. $y = a^x$ üstlü funksiyasının törəməsi üçün

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad (16)$$

düsturu doğrudur.

Xüsusi halda $a = \ell$ olarsa dustur $\left(e^x\right)' = e^x$ şəklinə düşür.

Misal 3. $y = 3^x + 2x^2 - +1$ funksiyasının törəməsini tapın.

$$y' = \left(3^x + 2x^2 - +1\right)' = 3^x \ln 3 + 4x.$$

3. Loqarifmik funksiyanın törəməsi

Teorem 3. $y = \log_a x$ loqarifmik funksiyasının törəməsi üçün

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a} \qquad (17)$$

düsturu doğrudur.

Xüsusi halda $a = e$ olarsa, onda (17) düsturu

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (17')$$

şəklində alınır ($\ln x = 1$ olduğundan).

Misal 4. $y = \sqrt{x + }\log_3 x$ funksiyasının törəməsini tapın.

$$y' = \left(\sqrt{x + }\log_3 x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x \ln 3}.$$

Misal 5. $y = \ln(2x+1)$ funksiyasının törəməsini tapın.

$$y' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)} = \frac{2}{2x+1}.$$

4. Triqonometrik funksiyaların törəməsi

Teorem 4. $y = \sin x$ funksiyasının törəməsi üçün

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (18)$$

düsturu doğrudur.

Teorem 5. $y = \cos x$ funksiyasının törəməsi üçün

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (19)$$

düsturu doğrudur.

Teorem 6. $y = tgx$ funksiyasının törəməsi üçün

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (20)$$

düsturu doğrudur.

Misal 6. $y = \sin 3x^2$ funksiyasının törəməsini tapın. (12) və (18) düsturlar əsasında alınır:

$$y' = \cos 3x^2 \cdot \left(3x^2\right)' = 6x \cos 3x^2 .$$

Misal 7. $y = \cos^3 x$ funksiyasının törəməsini tapın. (12), (11) və (19) düsturlar əsasında alınır:

$$y' = \left(\cos^3 x\right)' = 3(\cos x)^2 \cdot (\cos x)' = -3 \sin x \cdot \cos^2 x .$$

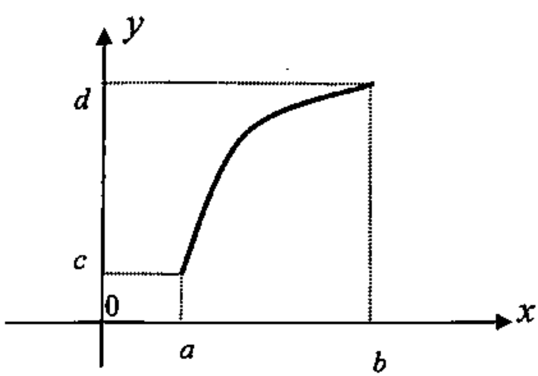
Misal 8. $y = tg^2 3x$ funksiyasının törəməsini tapın.

$$y' = \left(tg^2 3x\right)' = 2tg3x \cdot (tgx)' = 2tg3x \cdot \frac{(3x)'}{\cos^2 3x} =$$

$$= \frac{6tg3x}{\cos^2 3x} = \frac{6 \sin 3x}{\cos^3 3x}$$

5. Tərs triqonometrik funksiyaların törəməsi

Tərs triqonometrik funksiyaların törəməsi tərs funksiya ilə əlaqədar olduğundan əvvəlcə tərs funksiya və onun törəməsini nəzərdən keçirək.



Şəkil 11.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməyən və monoton funksiyadır, və $f(a) = c$, $f(b) = d$. Müəyyənlik üçün artan funksiyaya baxaq, yəni $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1) < f(x_2)$ olaraq (şəkil 11).

Aydındır ki, $[c, d]$ parçasında götürülmüş hər bir y-ə $[a, b]$ parçasından yeganə bir x uyğun gələcək və $y = f(x)$ münasibətini ödəyəcək. Beləliklə, $[c, d]$ parçasında $x = \varphi(y)$ funksiyasını tə'yin etmiş oluruq.

$x=\varphi(y)$ funksiyasına $y=f(x)$ funksiyasının tərs funksiyası deyilir. Şəkildən görünür ki, $\varphi(y)$ funksiyası [*c*, *d*] parçasında kəsilməyəndir.

$f(x)$ funksiyası monoton və kəsilməyən olduğundan $\Delta x \neq 0$ artımına $\Delta y \neq 0$ artımı uyğun gəlir və $\Delta x \to 0$-da $\Delta y \to 0$.

Odur ki,

$$y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'_y}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \qquad (x'_y \neq 0) \qquad (21)$$

münasibəti alınır.

(21) düstur tərs funksiyanın törəmə düsturudur. Bu düsturdan istifadə edərək tərs triqonometrik funksiyaların törəmə düsturlarını alınq.

$$y=\arcsin x \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (22)$$

$$y=\arccos x \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (23)$$

$$y=arctgx \; (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (24)$$

$$y=arcctgx \; (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (25)$$

Misal 9. $y = ctgx^4$ funksiyasının törəməsini tapın.

$$y' = -\frac{1}{\sin^2(x^4)}\cdot(x^4)' = -\frac{4x^3}{\sin^2 x^4}.$$

Misal 10. $y = arctg3x^2$ funksiyasının törəməsini tapın. (25) və (12) düsturlar əsasında alınır

$$y' = \frac{1}{1+9x^4}\cdot(3x^2)' = \frac{6x}{1+9x^4}.$$

Misallar. Aşağıdakı funksiyaların törəməsini tapın.

1. $y = 2x^2 - 3x + 1$

$$y' = \left(2x^2 - 3x + 1\right)' = 4x - 3$$

2. $y = \dfrac{1}{x+1}$

$$y' = \left[\frac{1}{x+1}\right]' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

3. $y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} + 5$

$$y = 3x^{-1} + x^{-2} + 5$$

$$y' = \left(3x^{-1} + x^{-2} + 5\right)' = -3x^{-2} - 2x^{-3} = -\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

4. $y = (2x+3)(x^2+3)$

$$y' = \left[(2x+3)(x^2+3)\right]' = (2x+3)'(x^2+3) + (2x+3)(x^2+3)' =$$

$$= 2(x^2+3) + (2x+3)\cdot 2x = 2x^2 + 6 + 4x^2 + 6x = 6x^2 + 6x + 6 =$$

$$= x^2 + x + 1$$

5. $y = \dfrac{x^2}{x^3+1}$

$$y' = \left[\frac{x^2}{x^3+1}\right]' = \frac{(x^2)' \cdot (x^3+1) - (x^2)\cdot(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2}$$

6. $y = \dfrac{1-x^3}{1+x^3}$

$$y'=\frac{(1-x^3)'(1+x^3)-(1-x^3)(1+x^3)'}{(1+x^3)^2}=\frac{(-3x^2)(1+x^3)-(1-x^3)\cdot 3x^2}{(1+x^3)^2}=$$

$$=\frac{-3x^2-3x^5-3x^2+3x^5}{(1+x^3)^2}=\frac{-6x^2}{(1+x^3)^2}$$

7. $y=\dfrac{3x^3+5x}{7}$

$$y'=\left[\frac{3x^3+5x}{7}\right]'=\frac{1}{7}\cdot(3x^3+5x)'=\frac{1}{7}\cdot(9x^2+5)=\frac{9x^2+5}{7}$$

8. $y=(x^2+5)(3x-4x^3)$

$$y'=(x^2+5)'(3x-4x^3)+(x^2+5)(3x-4x^3)'=$$

$$=2x(3x-4x^3)+(x^2+5)(3-12x^2)=$$

$$6x^2-8x^4+3x^2+15-12x^4-60x^2=15-51x^2-20x^4$$

9. $y=(5x^3-7)^4$

Burada $u=5x^3-7;\quad u'=15x^2$.

Beləliklə,

$y'=(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ düsturu əsasında alınır

$$y'=4\cdot(5x^3-7)^3\cdot 15x^2=60x^2(5x^3-7)^3.$$

10. $y=\dfrac{(x^3-5)^2}{7}$

$$y'=\left[\frac{(x^3-5)^2}{7}\right]'=\frac{2(x^3-5)\cdot(x^3-5)'}{7}=\frac{2(x^3-5)\cdot 3x^2}{7}=\frac{6x^2(x^3-5)}{7}$$

11. $y=\sqrt{x^2+16}$

$$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$ düsturu əsasında alınır

$$y'=\frac{\left(x^2+16\right)'}{2\sqrt{x^2+16}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}.$$

12. $y=\left(1+x+2x^2\right)^3$

$$y'=3\left(1+x+2x^2\right)^2\cdot\left(1+x+2x^2\right)'=3\left(1+x+2x^2\right)^2\cdot 4x=$$
$$12x\left(1+x+2x^2\right)^2$$

13. $y=\sqrt{a^2-x^2}$

Mürəkkəb funksiya verilib $y=\sqrt{u}$ və $u=a^2-x^2$ (12) düsturu əsasında alınır

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\left(a^2-x^2\right)'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

14. $y=\ln\left(x^3+2\right)$

$$y'=\frac{1}{x^3+2}\left(x^3+2\right)'=\frac{3x^2}{x^3+2}$$

Çalışmalar

Verilən funksiyaların törəməsini tapın.

1. $y=1-2x^3$ Cav. $y'=-6x^2$
2. $y=\dfrac{x+2}{x}$ Cav. $y'=-\dfrac{2}{x^3}$
3. $y=\dfrac{3}{x^2-1}$ Cav. $y'=-\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)^2}$

4. $y=(x^3+3)(4x^2-5)$ Cav. $y'=20x^4-15x^2+24x$

5. $y=(x-5)^4(x+3)^5$ Cav. $y'=(x-5)^3(x+3)^4(9x-13)$

6. $y=\dfrac{x^3-3}{5-x^2}$ Cav. $y'=\dfrac{x^4-15x^2+6x}{(5-x^2)^2}$

7. $y=\dfrac{2}{(x^3+5)^2}$ Cav. $y'=-\dfrac{30x^2}{(x^3+5)^6}$

8. $y=\sqrt[3]{6x^2-5}$ Cav. $y'=\dfrac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2-5)^2}}$

9. $y=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$ Cav. $y'=-\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{9}{x^4}$

10. $y=2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$ Cav. $y'=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

11. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}$ Cav. $y'=21x^{\frac{5}{2}}+10x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$

12. $y=x^{-2}+4x^{-\frac{1}{2}}$ Cav. $y'=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}$

13. $y=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{3x}$ Cav. $y'=\dfrac{1}{3}\left(2x+1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

14. $y=\dfrac{x+a}{x-a}$ Cav. $y'=-\dfrac{2a}{(x-a)^2}$

15. $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$ Cav. $y'=-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{2x}\right)^2}$

16. $y=(x^3-1)^{100}$ Cav. $y'=300x^2(x^3-1)^{99}$

17. $y=\sqrt{1+x^2}$ Cav. $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

18. $y=\cos 5x$ Cav. $y'=-5\sin 5x$

19. $y=\sin(3ax)$ Cav. $y'=3a\cos(3ax)$

20. $y = tg(2x+3)$ Cav. $y' = \frac{2}{\cos^2(2x+3)}$

21. $y = \cos^3 x^2$ Cav. $y' = -6x \sin x^2 \cos^2 x^2$

22. $y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ Cav. $y' = \frac{4\cos x}{(1-\sin x)^2}$

23. $y = \cos(x^2-3)$ Cav. $y' = -3x^2 \sin(x^3-3)$

24. $y = ctgx - x$ Cav. $y' = -\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}$

25. $y = tgx \cdot \cos^2 x$ Cav. $y' = \cos 2x$

26. $y = \ln(x-2)$ Cav. $y' = \frac{1}{x-2}$

27. $y = \ln(x^2+2x)$ Cav. $y' = \frac{2(x+1)}{x^2+2x}$

28. $y = x \cdot \ln x$ Cav. $y' = \ln x + 1$

29. $y = \arcsin\frac{x}{a}$ Cav. $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

30. $y = \arccos\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$ Cav. $y' = -\frac{2a}{x^2+a^2}$.

4.6 Mürəkkəb funksiyanın törəməsi

Fərz edək ki, hər hansı intervalda

$$y = f[\varphi(x)] \qquad (11)$$

mürəkkəb funksiyası verilmişdir. Özü də $y = f(u)$ və $u = \varphi(x)$ funksiyaları diferensiallanandır. Onda $y = f[\varphi(x)]$ funksiyası da diferensiallanandır və onun förəməsi üçün

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (12)$$

münasibəti doğrudur.

Burada y'_x ilə $f[\varphi(x)]$ funksiyasının x-ə nəzərən,

(12) düsturunun doğruluğunu isbat etmək üçün

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ limitinə baxaq:}$$

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta u\to 0)}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Burada $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$, $\quad\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$

olmasını nəzərə alsaq (12) düstur alınır.

Qeyd edək ki, əgər mürəkkəb funksiya bir neçə funksiyanın, məsələn $y=f(u)$, $u=\varphi(\upsilon)$, $\upsilon=\psi(x)$ funksiyalarının köməyi verilibsə və bu funksiyalar diferensiyallandırsa, onda onun törəməsi üçün

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x\cdot\upsilon'_x \text{ düsturu doğrudur.}$$

Teorem 1 $z=\varphi(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində, $y=f(z)$ funksiyasının isə uyğun $z_0=\varphi(x_0)$ nöqtəsində törəməsi varsa, $y=f(\varphi(x))$ mürəkkəb funksiyasının da x_0 nöqtəsində törəməsi var bu törəmə $y'(x_0)=f'(z_0)\cdot\varphi'(x_0)$ düsturu ilə hesablanır.

Teorem 2 Tutaq ki, $y=f(x)$-funksiyası x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında artan (azalan) kəsilməz funksiyasıdır və nöqtədə onun sıfırdan fərqli $f'(x_0)$ törəməsi var. Onda funksiyanın uyğun $y_0=f(x_0)$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş $x=f^{-1}(y)$ tərs funksiyası var, y_0-nöqtəsində diferesiallanandır və

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)'=\frac{1}{f'(x_0)} \text{ doğrudur.}$$

4.7. Diferensiallama düsturları

1) $C'=0$ $\quad$ (c-sabitdir: $c=const$)

2) $(u+\vartheta-\omega)'=u'+\vartheta'-\omega'$

3) $(c\vartheta)'=c\vartheta'$

4) $(uv)' = u'v + v' \cdot u$

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{\vartheta^2}$

6) $y'_x = y'_z \cdot z'_x$

7) $x_y = \dfrac{1}{y'_x}$

8) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \qquad x' = 1$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

12) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x$

13) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

14) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

15) $(a^x)' = a^x \ln a$

16) $(e^x)' = e^x$

17) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

18) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Törəmənin hesablanmasına aid misallar

Misal 1. $(x^2 + x + 5)' = (x^2)' + (x)' + 5' = 2x + 1$

Misal 2. $(x^3 + \sqrt{x})' = (x^3)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 = + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Misal 3. $(\sqrt{x} - x^2 + 5x)' = (\sqrt{x})' - (x^2)' + (5x)' = + \dfrac{1}{2x} - 2x + 5$

Misal 2. $(x^3+\sqrt{x})'=(x^3)'+(\sqrt{x})'=3x^2=+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Misal 3. $(\sqrt{x}-x^2+5x)'=(\sqrt{x})'-(x^2)'+(5x)'=+\frac{1}{2x}-2x+5$

Misal 4. $(x+3)\cdot(x-8)'=(x+3)'\cdot(x-8)+(x-8)'\cdot(x+5)=$
$=1\cdot(x-8)+1\cdot(x+5)=x-8+x+5=2x-3$

Misal 5. $\left(\frac{x^2}{3}\right)'=\frac{1}{3}(x^2)'=\frac{2}{3}x$

Misal 6. $\log_2(x^3+3x^2=2)'=\frac{(x^3+3x^2+2)'}{(x^3+3x^2+2)\ln_2}=\frac{3x^2+6x}{(x^3+3x^2+2)\ln_2}$

Misal 7. $(\ln(x^2+3x+9))'=\frac{(x^2+3x+9)'}{x^2+3x+9}=\frac{2x+3}{x^2 3x+9}$

Misal 8. $(\sin 5x)'=\cos 5x\,(5x)'=5\cos 5x$

Misal 9. $(\sin 3x^2)=\cos 3x^2\ (3x^2)'=6x\cos 3x^2$

Misal 10. $(tg3x)'=\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)'=\frac{3}{\cos^2 3x}$

Misal 11. $(ctg\,4x)'=-\frac{1}{\sin^2 4x}\cdot(4x)'=-\frac{4}{\sin^2 4x}$

Misal 12. $(e^{x^2})'=e^{x^2}\cdot 2x$

Tapşırıq: Aşağıdakı funksiyaların 1-ci tərtib törəməsini tapın.

1) $f(x)=x^2-5x+7$
2) $f(x)=\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-7x^2+6x-9$
3) $f(x)=\sqrt{x}-2x^2+1$
4) $f(x)=(2x-3)\ (3x+1)$
5) $f(x)=(4x^2-1)\ (2x+1)$
6) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+3x^2+4x-3$

21) $y=\frac{2+3x}{x^2}$
22) $y=\frac{x^2-1}{4-6x}$
23) $y=-x^2+3x+1$
24) $y=(x-3)^7$
25) $y=(2-x)^4$
26) $y=(2x-1)^2-3x$

7) $f(x)=2x^2\cdot(3x-\sqrt{x})$

8) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$

9) $f(x)=\dfrac{2x+5}{5x-3}$

10) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5}{x^2}+4$

11) $f(x)=\dfrac{7x^2-2}{3-2x}$

12) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+3}{3x^2}$

13) $f(x)=l^{x^2}+3x$

14) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

15) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^6-2x^4+3$

16) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3$

17) $y=\sin 2x\cdot\cos 3x$

18) $y=tg2x\cdot ctg3x$

19) $y=\dfrac{3x-1}{5x+4}$

20) $y=\dfrac{x^2}{3x+1}$

27) $y=3+2\sin x$

28) $y=((\sin x+\cos x)^2)'$

29) $y=2l^x+3x^x$

30) $y=l^{x^2}\cdot\sqrt{x}$

Verilmiş funksiyalar üçün

$f'(x)=0$ tənliyini həll edin

1) $f(x)=x^4-4x+1$

2) $f(x)=x^3-27x$

3) $f(x)=x\cdot(x^2-6)$

4) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-18x$

5) $f(x)=x^3-6x^2-36x$

6) $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$

7) $f(x)=\dfrac{3x-1}{2}$

8) $f(x)=x^5-3\dfrac{1}{3}x^3+5x$

§5. FUNKSIYANIN BÖHRAN VƏ EKSTREMUM NÖQTƏLƏRİ

5.1 Törəmənin köməyi ilə onların tapılması.

Tərif 1 $f'(x)=0$ olan nöqtələri və törəmənin olmadığı x nöqtələri $f(x)$ funksiyasının böhran nöqtələri adlanır.

Böhran nöqtələrdə funksiyanın qrafikinə toxunan ya absis oxuna paraleldir, ya da absis oxuna perpendukilyardır. (və yaxud da toxunan yoxdur).

Deməli törəmənin olmadığı nöqtədə toxunan yoxdur.

Ümumiyyətlə: funksiyanın maksimum və minimum nöqtələrini onun böhran nöqtələri arasında axtarmaq lazımdır.

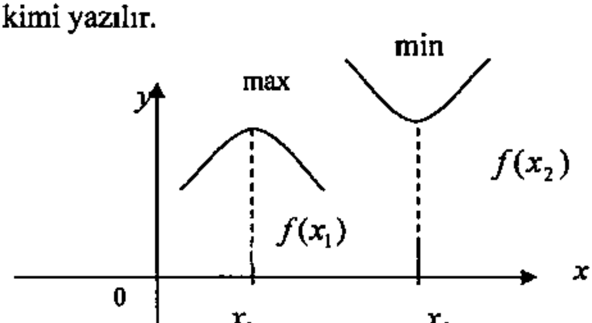
Tərif 2 $f'(x_0)=0$ bərabərliyini ödəyən x_0 nöqtəsinə $f(x)$-in stasionar nöqtəsi deyilir.

Tərif 3 x_1-nöqtəsinin müəyyən ətrafından olan bütün x-lər üçün $x \neq x_1$ $f(x_1) > f(x)$ bərabərsizliyi ödənərsə $f(x_1)$ qiymətinə funksiyanın maksimum qiyməti, x_1-nöqtəsinə isə $f(x)$-in maksimum nöqtəsi deyilir.

Tərif 4 x_2-nöqtəsinin müəyyən ətrafında olan bütün x-lər ücün $x \neq x_2$ $f(x_2) < f(x)$ ödənilərsə $f(x_2)$ qiymətinə funksiyanın minimum qiyməti, x_2-nöqtəsinə isə $f(x)$-in minimum nöqtəsi deyilir.

Funksiyanın maksimum və minimum nöqtələrinə onun ekstremum nöqtələri deyilir.

Deməli Ekstremum, funksiyanın yaxın yerləşən qiymətləri arasında ən böyük və ya ən kiçik qiymətləridir və $\max f(x)$ və yaxud $\min f(x)$ kimi yazılır.



(Şəkil 18)

Beləliklə: $f(x)$ funksiyasının $[a:b]$ parçasında ən böyük və ya ən kiçik qiymətini tapmaq üçün aşağıdakı üç mərhələ aparılmalıdır.

1) Funksiyanın bu parçada max və ya min tapılmalıdır.

2) Funksiyanın parçanın üç nöqtəsindəki $f(a)$ və $f(b)$ qiymətlərini hesablamaq lazımdır.

3) Bu qiymtələrdən ən böyüyünü və ya ən kiçiyini götürmək lazımdır.

Nəticə: Arqumentin baxılan bütün qiymətlərində $f(x)$ funksiyasının törəməsi varsa, onda bu funksiya öz ekstremumunu yalnız törəmənin sıfıra bərabər olduğu nöqtələrdə ala bilər.

Teorem 1 (ekstemum ücün zəruri şərt) *f(x)* funksiyasının x_0 nöqtəsində ekstremumu varsa, bu nöqtədə funksiyanın törəməsi ya sifra bərabərdir $f'(x)=0$, ya da bu nöqtədə törəmə yoxdur.

5.2 Funksiyanın tədqiqi

Törəmənin köməyi ilə verilən funksiyanı araşdıraraq (tədqiq edərək) aşağıdakı 4 şərti bilmək lazımdır.

1) Funksiyanın $f'(x)$ törəməsi tapılır.

2) Böhran nöqtələri tapılır: (bunun üçü) $f'(x)=0$ tənliyinin həqiqi kökləri tapılır. Əgər $f'(x)$-yoxdursa, $f'(x)$-in kəsilmə nöqtələri tapılır.

3) Böhran nöqtəsindən solda və sağda törəmənin işarəsi araşdırılır. (Artma və azalma aralığı).

4) $y=f(x)$ funksiyasının hər bir böhran nöqtəsində qiyməti hesablanır.

Sonra qrafiki qurmaq olar.

Misal 1 $f(x)=(x-2)^2\cdot(x+1)^2$ - araşdırılaraq qrafikini quraq.

1) $f'(x)-2\cdot(x-2)\cdot(x+1)^2+2(x-2)^2(x+1)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x-1)$

2) $f'(x)=0$ yəni

$$2(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x-1)=0$$

$$2\neq 0$$

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = \frac{1}{2}$$

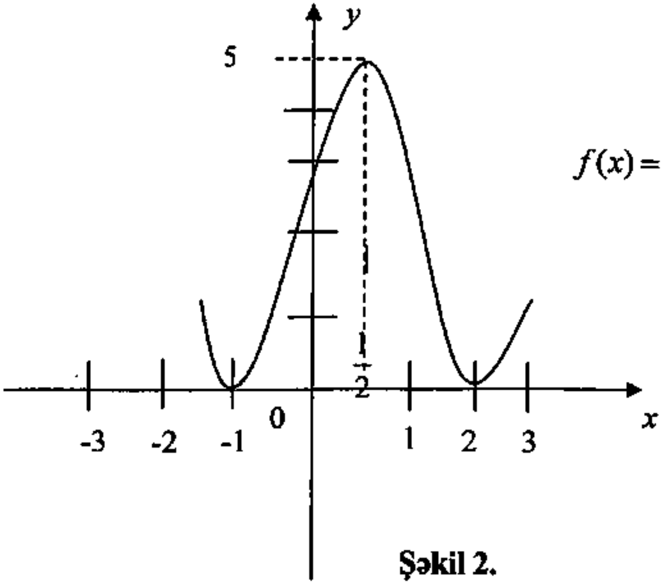
$$f(2) = 0; f(-1) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = 5{,}06$$

3)

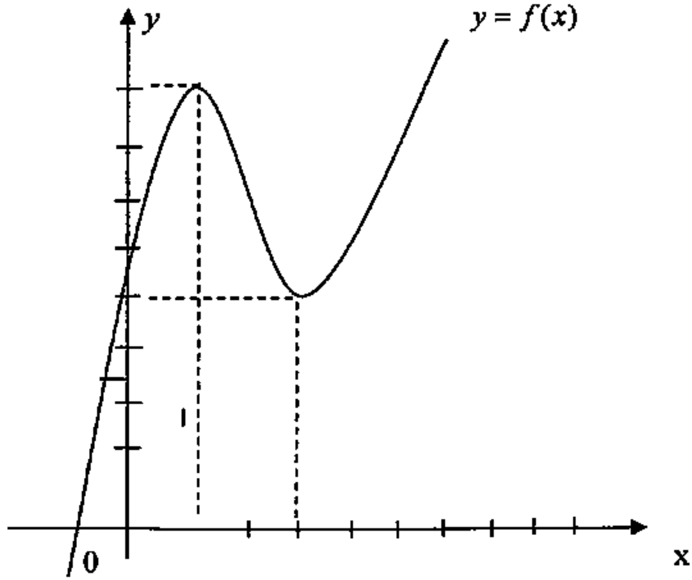
$$f(2) = 0; f(-1) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = 5{,}06$$

4) Cədvəl tərtib edib qrafiki quraq.

x	$(-\infty:-1)$	-1	$-1;\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}:2$	2	$(2:+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	5,06	↘	0	↗
	min		max		min		



Şəkil 2.



Misal: 2 $f(x)=3x-x^3$-nin $[-2:3]$ max və min qiymətlərini hesablayaq.

Həlli: $f'(x)=3x-x^2$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3-3x^2=0$$

$$3(1-x^2)=0$$

$$3\neq 0$$

$$1-x^2=0$$

$$x_1=-1$$

$$x_2=+1$$

$$f(-1)=-2$$

$$f(1)=2$$

Parçanın üç nöqtələrini hesablayaq $[-2:3]$

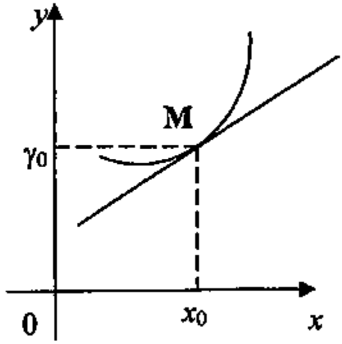
$$f(-2)=2$$
$$f(3)=-18$$
$$f(\max)=2$$
$$f(\min)-18$$

5.3. Əyrinin nöqtədə qabarıqlığı və çöküklüyü

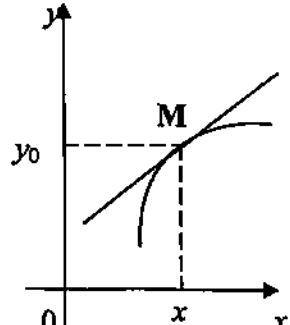
Tutaq ki $y=f(x)$ fuksiyası $[a,b]$ parcasında diferensialanandır. Əyri üzərində ixtiyari M nöqtəsi qötürüb. əyriyə toxunan cəkək, əgər M nöqtəsinin yaxın ətrafı ücün toxunandan yuxarıda yerləşərsə həmin nöqtədə əyri cökük, əks halda isə qabariq olar.

Teorem 1 (qabariq və cöküklük ücün kafi əlamət)

Fərz edək ki, $y=f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsinin $U_\delta(x_0)$ ətrafında- ikinci tərtib törəməsi varsa və bu törəmə x_0 nöqtəsində kəsilməz və sifir deyilsə, onda $f''(x_0)>0$ olarsa x_0 nöqtəsində funksiya cökük (şək.1), $f''(x_0)<0$ olarsa fuksiya qabariq olar (şək.2).



Şəkil 1.



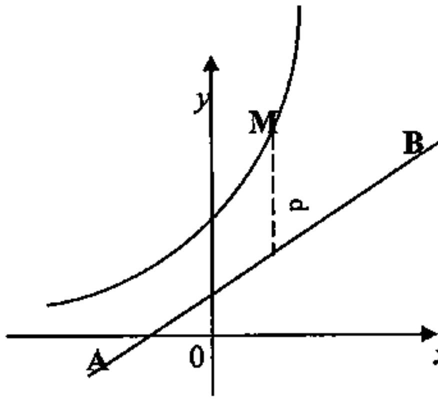
Şəkil 2.

Tərif. Kəsilməyən əyrinin qabariq və cökükü hissələrinin sərhəd nöqtəsinə dönmə nöqtəsi deyilir.

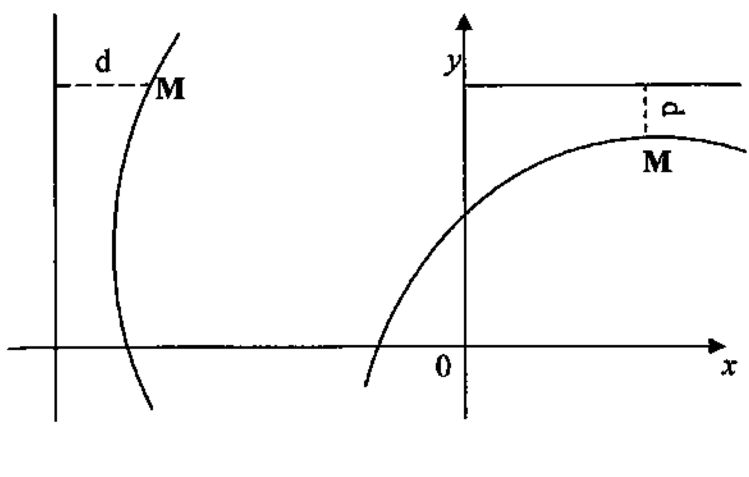
5.4 Əyrinin asimtotları

Tərif 1. Əyri üzərində yerləşən M nöqtəsi əyri üzrə sonsuzluğa yaxınlaşarkən **M** nöqtəsindən verilmiş AB düz xəttinə qədər olan məsafəsi sıfıra yaxınlaşarsa onda AB xəttinə həmin əyrinin **asimtotu** deyilir.

Üc növ asimtot məvcudu: şaquli (şək.3), üfuqi və maili (şək.4).



Şəkil 3. (Şaquli)



Şəkil 4. (üfuqi və maila)

Tapşırıq: **Funksiyanın max və min nöqtələrinin tapılmasına aid misallar.**

1) $y=2x^2+5x^2-4x$ $\qquad C: y(\min)=-\frac{19}{27}; y(\max)=20$

2) $y=\frac{1}{5}x^5-4x^2$ $\qquad C: y_{(\min)}=-9{,}6; y_{(\max)}=0$

3) $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{4}$ $\qquad C: y_{(\min)}=-3;\ y_{(\max)}=3$

4) $y=2x^2+3x^2,\ [-1:1]$ $\qquad y_{\min}=-1;\ y_{\max}=1$

5) $y=x+\frac{1}{x};\quad [0{,}5:4]$ $\qquad y\max=4; y\,(\min)=2.$

6) $y=x^3-6x+1,\ [-1:2]$ $\qquad C: y(\max)=-1; y\,(\min)=\sqrt{2}.$

5.6. Funksiyanın asimptotlarının tapılması

Misal 1

1) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$

Həlli: $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ üçün $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\frac{1}{(x-3)}=\infty$ olduğundan x=3 düz xətti $f(x)$-nin şaquli asimptotudur.

$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}=0$ olduğundan $y=0$ düz xətti verilmiş funksiyanın üfiqi asimptotudur.

Misal 2 $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ funksiyası üçün

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+2}{x+1}=\infty$ olduğundan x=-1 xətti bu funksiyanın şaquli asimptotudur.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1+0}=1$ olduğundan y=1 düz xətti bu funksiyanın üfiqi asimptotudur. Bu funksiyanın maili asimptotu yoxdur.

Misal 3. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+9}$; $x\in R$ -də $x^2+9\neq 0$ olduğundan verilmiş funksiyanın şaquli asimptotu yoxdur. Funksiyanın üfiqi asimptotu isə

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x^2+9)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x_2}{x^2+9}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\dfrac{9}{x^2}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-9x}{x^2+9}=-9\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+9}=$$

$$-9\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{9}{x^2}}=-9\cdot 0=0 \text{ olar.}$$

Funksiyanın asimpitotu $y=kx+b$ və $y=x$ düz xəttdir.

Misal 4. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$-si üçün $\lim\limits_{x\to\pm 1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty$ olduğundan

x=-1; x=1 xətti şaquli asimptotdur.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm 1}\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\pm\infty$ olduğundan üfiqi asimpitotları yoxdur. Maili asimpitotları tapaq.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

olduğundan $y=kx+b$ və deməli y=x düz xətti funksiyanın asimpitotudur.

Aşağıdakı verilmiş funksiyaları tədqiq edin və qrafiklərini qurun.

1) $f(x)=x^2-2$

2) $f(x)=2-x+x^2$

3) $f(x)=x^3-3x$

4) $f(x)=3x^2-x^3$

5) $f(x)=4x^5-5x^4$

6) $f(x)=2x^3-3x^2$

7) $f(x)=x^3+2x^2$

8) $\frac{1}{4}x^4-x^3$

9) $f(x)=\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}-x$

10) $f(x)=x^4-2x^2-3$

11) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

12) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

13) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+4}$

14) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x}$

15) $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2}$

16) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

20) $f(x)=3x^4-4x^3-6$

21) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2-1$

22) $f(x)=x^3-3x^2+1$

23) $\frac{1}{3}x^3-4x+2=f(x)$

24) $f(x)=(x-2)^2\cdot(x-1)$

25) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+4}$

26) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}$

17) $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$

18) $f(x)=\dfrac{2x^2}{3-x}$

19) $f(x)=\dfrac{2}{3}x(x-2)^3$

§6 İBTİDAİ FUNKSİYA VƏ İNTEQRAL

6.1 İbtidai funksiya və inteqral.

Bir çox məsələlərdə törəməsi məlum olan funksiyanın özünü tapmaq tələb olunur. Məsələn, tutaq ki, düzxətli hərəkət edən nöqtənin $v(t)$ sürəti məlumdur, onun $t_1 \le t \le t_2$ zaman aralığında getdiyi $S(t)$ yolunu tapmaq lazımdır.

Burada $v(t)$ məlumdur, elə $S(t)$ funksiyası tapılmalıdır ki, ixtiyari $t \in \lfloor t_1 ;t_2 \rfloor$ üçün $S'(t)=v(t)$ olsun.

İnteqral hesabında belə məsələlər öyrənilir. Yəni, inteqral hesabında-diferensial hesabında baxılan məsələnin «tərs» məsələsinə baxılır.

Tərif Verilmiş aralıqdan götrülən bütün x – lər üçün $F'(x)=f(x)$ olarsa, onda F-funksiyasına həmin aralıqda f-funksiyasının ibtidai funksiyası deyilir. Qeyd edək ki, ixtiyari elementar funksiyanın təyin olunduğu oblastda ibtidai funksiyası olsa da bu ibtidai fnksiya elementar funksiya olmayada bilər.

$f(x)=5x^4$-na baxaq. Bu funksiya $F(x)=x^5$ - funksiyanın törəməsidir:

$(x^5)'=5x^4$ deməli $F(x)=x^5$-sı funksiyası $(-\infty:+\infty)$ intervalında $f(x)=5x^4$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır.

$x^5+4;\quad x^5-\dfrac{1}{4};\quad x^5+16$ və s. funksiyaları üçün

$(x^5+4)'=(x^5-\dfrac{1}{2})'=(x^5+17)'=5x^4$ olduğundan bu funksiyalar da $f(x)=5x^4$-ün ibtidai funksiyalardır. Bu onu göstərir ki, baxılan funksiyanın ibtidai funksiyalarının sayı bir deyil, çox ola bilər.

Ümumiyyətlə $F(x)$-sı müəyyən $f(x)-$in bu aralıqda ibtidai funksiyadır. Doğrudan da, baxılan aralıqdan olan ixtiyari x üçün

$$(F(x)+c)'=(F(x)'+c')=F'(x)=f(x)$$

Deməli; funksiyanın heç olmazsa bir ibtidai funksiyası varsa, onun sonsuz sayda ibtidai funksiyası var.

Teorem 1 Müəyyən aralıqda təyin olunmuş funksiyanın ixtiyari iki müxtəlif ibtidai funksyası bu aralıqda bir-birindən sabit qədər fərqlənir. İbtidai funksiyanın ümumi ifadəsi də belə olur $F(x)+C$

Teorem 2 Hər bir kəsilməz funksiyanın ibtidai funksiysı var və bunlar sonsuz saydadır. Bunlardan ixtiyari 2-si bir-birindən sabit qədər fərqlənir.

İbtidai funksiyanın tapılması 3 qaydaya əsaslanır. Bunlar aşağıdakılardır.

1) $F(x)$ funksiyası $f(x)-$in, $G(x)-$funksiyası $g(x)-$in ibtidai funksiyasıdırsa, onda $F(x)\pm G(x)$ funksiyaları $f(x)\pm g(x)$-in ibtidai funksiyasıdır.

2) $F(x)$ funksiyası $f(x)-$in ibtidai funksiyasıdırsa,

$kF'(x)=kf(x)$ olar.

3) $F(x)$ funksiyası $f(x)-$in ibtidai funksiyasıdırsa, onda $F(y(t))$ funksiyası $f(y(t))\cdot y'(t)$-nin ibtidai funksiyasıdır.

Tərif: Verilmiş $f(x)-$ funksiyasının bütün ibtidai funksiyaları üçün ümumi ifadəyə $f(x)-$ funksiyasının qeyri-müəyyən inteqralı deyilir və $\int f(x)\,dx$ kimi yazılır.

Başqa sözlə $[a:b]$ intervalında verilmiş $f(x)$ funksiyasının bütün ibtidai funksiyalar küllüsünə (çoxluğuna) həmin funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralı deyilir. $\int f(x)\,dx$ olur, burada, $f(x)$-ə inteqralaltı funksiya.

$f(x)\,dx$-ə inteqralaltı ifadə.

x - ə isə inteqrallama dəyişən deyilir. $\int$ - inteqral işarəsidir.

Qeyri-müəyyən inteqralın tərifinə əsasən $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ yazılır.

Çünki $f(x)$ -in ibtidai funksiyalarından biri $F(x)$ digərləri isə $F(x) + C$ -dir.

6.2 Qeyri-müəyyən inteqralın xassələri

Xassə 1 Qeyri-müəyyən inteqralın törəməsi inteqralaltı funksiyaya diferensialı isə inteqralaltı ifadəyə bərabərdir.

$$(\int f(x)\,dx)' = f(x)$$

$$d(\int f(x)\,dx) = f(x)dx$$

Xassə 2 Funksiyanın diferensialının qeyri-müəyyən inteqralı funksiyanın özündən sabit toplanan qədər fərqlidir.

$\int df(x) = f(x) + c$ (burada $f(x)$ -sı kəsilməzdir).

Xassə 3 Sıfırdan fərqli sabit vurğu qeyri-müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxmaq olar.

$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, burada C – sabit vurğu

Xassə 4 Verilən aralıqda kəsilməz olan sonlu sayda funksiyaların cəbri cəminin qeyri-müəyyən inteqralı, onların qeyri-müəyyən inteqralının cəbri cəminə bərabərdir.

$$\int (f(x) + \varphi(x) - g(x))dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + ... + a_n f_n(x)) =$$
$$= a_1 \int f_1(x)dx + a_2 \int f_2(x)dx + ... + a_n \int f_n(x)dx$$

6.3 İnteqrallanma cədvəli

İnteqrallama əməlinin diferensiallaşmasının təsiri olması faktına əsaslanaraq əsas elementar funksiyaların qeyri-müəyyən inteqralları cədvəlini tərtib etmək olar.

$dF(x)F(x)dx$ və $\int f(x)dx = F(x) + c$ əsasən

1) $d\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n dx$ $\qquad \displaystyle\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad (n\neq -1)$

2) $d(\ln|x|)=\dfrac{1}{x}dx$ $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

3) $d\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)=a^x dx$ $\qquad \displaystyle\int a^n dx=\frac{a^x}{\ln a}+c \quad (a>0, a\neq 1)$

4) $de^x=e^x dx$ $\qquad \displaystyle\int e^x dx=e^x+c$

5) $d(\sin x)=\cos x dx$ $\qquad \displaystyle\int \cos x dx=\sin x+c$

6) $d(-\cos x)=\sin x dx$ $\qquad \displaystyle\int \sin x dx=-\cos x+c$

7) $d(tgx)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c$

8) $d(-ctgx)=\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-tgx+c$

9) $d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c=-ar\cos x+c$

10) $d(arctgx)=\dfrac{dx}{1+x^2}$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} arctgx+c=-arctg+c$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c \qquad (a\neq 0)$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c \qquad (a\neq 0)$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm \alpha}\right|+c \qquad (\alpha\neq 0)$

6.4. İnteqrallama üsulları

Bütün inteqrallama üsullarında məqsəd müəyyən çevirmələr vasitəsilə inteqralaltı ifadəni elə şəklə gətirməkdən ibarətdir ki, orada yuxarıdakı inteqrallama düsturlarından birini tətbiq etmək mümkün olsun. Belə üsullardan dəyişənin əvəz edilməsi və hissə-hissə inteqrallamanı göstərmək olar.

(1) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ -dəyişənin əvəz edilməsi üsulu.

Misal 1

$$\int x\, l^{-x^2} dx = \int l^{-x^2}, xdX = -\frac{1}{2}\int l^t dt = -\frac{1}{2}\int l^t dt = -\frac{1}{2} l^t + c = -\frac{1}{2} l^{-x^2} + c$$

($t = -x^2$ əvəz olunub).

(2) $\int udv = uv - \int \vartheta dn$: hissə-hissə inteqrallama üsuludur.

Burada $\begin{matrix} u = u(x) & : & \vartheta = \vartheta(x) \\ u' = u'(x) & : & \vartheta = \vartheta'(x) \end{matrix}$ kəsilməzdir.

Misal 2 $\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$

$u = x, \quad dv = \sin x dx$

İbtidai funksiyanın və inteqralın tapılmasına aid misallar.

Aşağıdakı funksiyaların ibtidaisini tapaq.

1) $f(x) = 3 \rightarrow F(x) = 3x + c$

2) $f(x) = 6x \rightarrow F(x) = \frac{6x^2}{2} + c = 3x^2 + c$

3) $f(x) = 3x^2 + 4x + 5 \rightarrow F(x) = 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 5x = x^3 + 2x^2 + 5x + c$

4) $f(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow F(x) = x^{-2} = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{x} + c$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow F(x) = 2\sqrt{x} + c$

6) $f(x) = x^4 - 3 \rightarrow F(x) = \frac{x^5}{5} - 3x + c$

Qeyri-müəyyən inteqralın tapılmasına aid misallar.

1) $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{x} + c$

2) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$

3) $\int \dfrac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \dfrac{x^{-5+1}}{-5+1} = \dfrac{x^{-4}}{-4} + c = \dfrac{4}{4x^4} = \dfrac{1}{x^4} + c$

4) $\int 4^x dx = \dfrac{4^x}{\ln^4} + c$

5) $\int \dfrac{4}{5} x^7 dx = \dfrac{4}{5} \int x^7 dx = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{x^8}{8} = \dfrac{x^8}{10} + c$

6) $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$

7) $\int\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right) dx = \int\left(2 \cdot \dfrac{1}{x} - 4 \cdot \dfrac{1}{x^2}\right) dx = 2\int \dfrac{1}{x} dx - 4\int \dfrac{1}{x^2} dx = 2 \cdot \ln x - 4 \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} =$

$= 2\ln x - 4\dfrac{x^{-1}}{-1} = 2\ln x - 4\dfrac{x}{-1} = 2\ln x + \dfrac{4}{x} + c$

8) $\int\left(\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}\right) dx = \int \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} dx = \int (x-3) dx = \dfrac{x^2}{2} - 3x + c$

9) $\int\left(\dfrac{x^3 + 6}{x}\right) dx = \int \dfrac{x^3}{x} dx + \int \dfrac{6}{x} dx = \int\left(x^2 + \dfrac{6}{x}\right) dx = \dfrac{x^3}{3} + 6\ln|x| + c$

10) $\int \cos^4 x \sin x dx = -\int \cos^4 x d(\cos x) = -\dfrac{\cos^5 x}{5} + c$

Tapşırıq: Aşağıdakı verilmiş qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın.

1) $\int x^7 dx$

2) $\int x^2 dx$

14) $\int (\sqrt{x} + 2x^2 - 4)\, dx$

15) $\int (5x - e^x) dx$

3) $\int (x^3 - 4x^2 + 2x + 1)dx$

4) $\int \left(\frac{x^3 + 5x + 7}{x} \right) dx$

5) $\int (2x + \sqrt{x} - 4)dx$

6) $\int (x-2)^2 dx$

7) $\int \frac{(x-1)^3}{x} dx$

8) $\int \frac{x^2 - 7x + 12}{x-3} dx$

9) $\int (2\sin x + 2\cos x)dx$

10) $\int (1 + ctgx)dx$

11) $\int \left(\frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{4}{x^3} \right) dx$

12) $\int (7-3x)^4 dx$

13) $\int (2x-3)^2 dx$

16) $\int e^{7x} dx$

17) $\int \frac{x^2}{4 + 3x^2} dx$

18) $\int 3^x dx$

19) $\int (2^2 + x^2)dx$

20) $\int \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x-2} \right) dx$

6.5 Müəyyən inteqral. Nyuton-Leybnis düsturu

Tutaq ki, $f(x)$-si $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir. $F(x)$ funksiyasında $[a,b]$-da həmin funksiyanın ixtiyari ibtidai funksiyasıdır. Yəni, $x \in [a,b]$ üçün $F'(x) = f(x)$

Tərif Verilmiş $[a,b]$ parçasında kəsilməz $f(x)$ funksiyasının $F(x)$ ibtidai funksiyasının bu parçaya uyğun $F(b)$ - $F(a)$ artımına $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında müəyyən inteqralı deyilir və $\int_a^b f(x)dx$ kimi yazılır.

a və *b* uyğun olaraq inteqrallamanın aşağı və yuxarı sərhədləri, *x*-ə inteqrallama dəyişəni deyilir.

Beləliklə $f(x)$-sinin ibtidai funksiyalarından biri $F(x)$ olduğundan, onda müəyyən inteqralın tərifinə əsasən

(1) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ bərabərliyinə

Nyuton-Leybnis düsturu deyilir. Əgər

$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ işarə etsək. (1)bərabərliyi

(2) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ kimi yazılır. Bu isə onu göstərir ki, $f(x)$-sının $[a,b]$ parçısında müəyyən inteqralını hesablamaq üçün onun ixtiyari ibtidai funksiyasını tapıb, ibtidai funksiyanın bu parçada artımını hesablamaq lazımdır.

Teorem: $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyanın bu parçada müəyyən inteqralı var.

6.6 Müəyyən inteqralın xassələri

Fərz edək ki, baxılan bütün funksiyalar uyğun parcada inteqrallanandır.

1) Müəyyən inteqralın qiyməti inteqrallama dəyişənindən asılı deyil. Yəni,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

2) İnteqrallama sərhədləri eyni olan müəyyən inteqral sıfıra (0) bərabərdir.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3) İnteqrallama sərhədlərinin yerini dəyişdikdə müəyyən inteqral işarəsini dəyişir.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4) İxtiyari a,b,c ədədləri üçün $f(x)$ funksiyası $[a,b]$, $[a,c]$,

$[c,b]$ parçasında inteqrallanandırsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5) Sabit vurğu müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \qquad (A = const)$$

6) Sonlu sayda funksiyaların cəbri cəminin müəyyən inteqralı, həmin funksiyaların baxılan parçada müəyyən inteqralının uyğun cəbri cəminə bərabərdir.

$$\int_a^b (f(x) + \varphi(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

7) Tək funksiyanın sıfra nəzarən simmetrik parça üzrə inteqralı sıfıra bərabərdir. Yəni $f(x)$ -funksiyası tək funksiyadırsa

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

8) $f(x)$ -funksiyası çüt funksiyadırsa

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Misal:1 $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Misal:2 $\int_1^3 2^x dx = \frac{2^x}{en2}\Big|_1^3 = \frac{1}{en2}(2^3 - 2) = \frac{6}{en^2}$

6.7 Dəyişənin əvəz edilməsi üsulu

Tutaq ki, $f(x)$ -funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir və $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı verilir. $x = \varphi(t)$ düsturu ilə yeni t dəyişəni daxil edək. Əgər

a) $\begin{matrix} a=\varphi(a) \\ b=\varphi(\beta) \end{matrix}$

b) $g(t)$ və $g'(t)$ funksiyaları $[\alpha,\beta]$ parçasında kəsilməzdir.

C) $f(g(t))$ funksiyası $[\alpha:\beta]$-da təyin olunub və kəsilməzdirsə, onda.

$$(1)\ \int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\varphi'(t)dt$$

bərabərliyi doğrudur. (1) bərabərliyi dəyişənin əvəz olunması üsullarıdır.

Misal 1. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$

Həlli. $1+2x=t$, t dəyişəni daxil edək onda $x=\frac{t-1}{2}$ $dx=\frac{1}{2}dt$.

Yeni inteqralama sərhədlərini tapaq: $x=0$ olduqda $t=1$; $x=1$ olduqda $t=3$ş Deməli,

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}=\frac{1}{4}\int_1^3 \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{4}\int_1^3 (t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})dt=\frac{1}{4}(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}})\Big/_1^3=\frac{1}{3}$$

6.8 Hissə-hissə inteqrallama üsulu

Tutaq ki, $u=u(x)$, $\varphi=\varphi(x)-$ nın özləri $u'(x_1)$; $\vartheta'(x)$ törəmələri $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirlər. Onda .

$(2)\ \int_a^b udv=uv\cdot\Big|_a^b-\int_a^b vdu$ - hissə-hissə inteqrallama düsturudur.

Misal 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos dx$

Həlli. $u=x$, $dv=cosxdx$ işarə edək, onda $du=2xdx$ $v=sinx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos xdx=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx=\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ yenidən hissə-hissə inteqrallama düstürunu tətbiq edək.

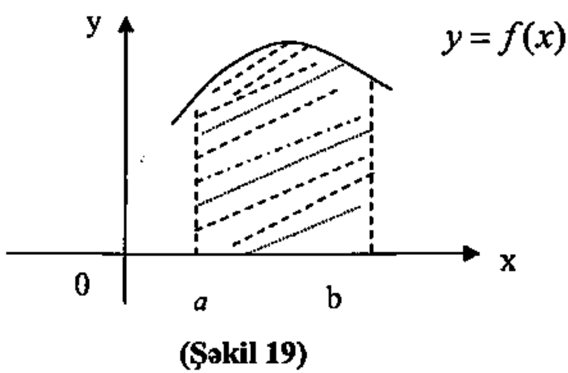
$$u_1 = x, dv_1 = \sin x dx, du_1 = dx, v_1 = -\cos x$$

və

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

6.9 Əyrixətli trapesiyanın sahəsi

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında kəsilməz və mənfi olmayan $f(x)$-funksiyası verilib. Müstəvinin $y = f(x)$ əyrisi, Ox obsis oxu və $x = a$, $x = b$, düz xəttləri ilə hüdudlanmış hissəsinə əyrixətli trapesiya deyilir. Asanlıqla göstərmək olar ki, bu əyrixətli trapesiyanın sahəsi, $S = \int_a^b f(x)dx$ düsturu ilə hesablanır.



(Şəkil 19)

Tapşırıq: müəyyən inteqralın hesablanmasına aid misallar.

1) $\int_1^3 dx$ 2) $\int_0^1 (1-3x)^2 dx$

3) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$ 4) $\int_0^2 (3x-4)dx$

5) $\int_0^1 x^2(1+4x)dx$ 6) $\int_0^1 (x^2+2x+c)dx$

7) $\int_{-1}^1 (x^2-3x+2)dx$ 8) $\int_{-2}^1 (2-4x+3x^2)dx$

9) $\int_{-1}^3 (1-4dx$ 10) $\int_0^1 (2-4x+3x^3)dx$

11) $\int_{-1}^2 (3x^2+4x+6)dx$ 12) $\int_{-1}^3 (x\ \ -3)^2 dx$

13) $\int_{-2}^2 \left(\frac{x^2-5x+6}{x-3}\right)dx$ 14) $\int_{-1}^3 \left(\frac{x^2-6x^2+5}{x-1}\right)dx$

15) $\int_0^2 \left(\frac{(x-1)^2}{x-1}\right)dx$ 16) $\int_{-1}^1 (3x^2+2x+4)dx$

Əyrixəttli trapesiyanın sahəsinin hesablanmasına aid misallar.

Misal 1. $y=x^2-2x+3$; $x=0$; $x=3$ hüdudlanan sahəni hesablayaq.

Həlli:

$$S=\int_0^3 (x^2-2x+3)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2 3x\right)\Big|_0^3=\frac{27}{3}-9+9=9$$

Misal:2 $y=2x-x^2$ parabolası və Ox ilə hüdudlanan sahəni hesablayaq.

Həlli:

$$2x-x^2=0$$
$$x(2-x)=0$$

$$x=0$$
$$x=2$$
$$S=\int_0^2(2x-x^2)dx=x^2\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\left(4-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{4}{3}$$

Misal 3. $y=x^2 6x+8$ parabolası Ox oxu $x=1; x=6$ düz xətləri ilə hüdudlanan fiqurun sahəsini tapaq.

Həlli:

$$x^2-6x+8$$
$$x_1=2$$
$$x_2=4$$

deməli $(x_1=1; x_2=2; x_3=4; x_4=6$-dır.)

$$S=\int_1^2(x^2-6x+8)dx-\int_2^4(x^2-6x+8)+\int_4^6(x^2-6x+8)dx=\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right)\Big|_1^2-$$
$$\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right)\Big|_1^2-\left(\frac{x^3}{3}-3x^2 8x\right)\Big|_2^4+\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right)\Big|_4^6=$$
$$\frac{8}{3}-12+16-\frac{1}{3}+3-8-\frac{64}{3}+48-32+\frac{8}{3}-12+16+\frac{216}{3}-108+48-\frac{64}{3}+48-32=$$
$$\frac{103}{3}-25=\frac{28}{3}=9\frac{1}{3}$$

Misal 4 $y=x,\quad y=2-x^2,\ x=2$ xəttləri ilə hüdudlanan sahəni tapaq

$$x=2-x^2$$
$$2-x^2-x=0$$

Həlli: $$x^2-2+x=0$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-2$$

$$S=\int_{-2}^1(2-x^2-x)dx+\int_1^2(x^2+x-2)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^1+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2=$$
$$2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}+2-4+\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}=6\frac{1}{3}$$

Misal 5. $y=6-2x;\ y=6+x-x^2$ hüdudlanan sahəni tapaq.

Həlli:

$$6-2x=6+x-x^2$$
$$6-2x-6-x+x^2=0$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0$$
$$x=0$$
$$x=3$$

$$S=\int_0^3(6+x-x^2-6+2x)dx=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^3=4,5$$

Tapşırıq. Verilmiş xətlərlə hüdudlanan sahəni hesablayın.

1) $y=-2x+x^2+2$ ilə $x=1; x=3$ hüdud sahəni tapın.

2) $y=4-3x^2$ ilə $x=-3; x=2 y=0$

3) $y=(x-3)^2$ ilə $x=0; y=0$

4) $y=x^2+2x$ ilə $x=3; y=0$

5) $y=\frac{4}{x^2}$ və $y=\frac{x}{2}$: $x=1$

6) $y=\frac{x^2}{8}$ və $y=\frac{2}{x^2}$: $x=1$

7) $y=x^2$ və $y=-2$

8) $y=2x$ və $y=5x-x^2$

9) $y=9x^2-4$ və $y=x^2+8x+12$

10) $y=2-x^2$ və $y=-x$

11) $y=1-x^2$ və $y=x^2-1$

12) $y=x^2+1$ və $y=3-x$

13) $y=x^2-2x+2$ və $y=2+4x-x^2$

14) $y=3x-x^2$ və $y=0$

15) $y=\frac{3}{x}$ və $y=4-x$

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN ELEMENTLƏRİ

§1.Təsadüfi hadisələr və onlar üzərində əməllər

1.1. Ehtimalın klassik tərifi

Hər bir eksperiment, təcrübə və sınağın nəticəsinə bir hadisə kimi baxmaq olar. Sınağın icrası zamanı alınan nəticəyə hadisə deyllir. Sınağın icrası zamanı nəzərdə tutulan hadisənin baş verib-verməməsi haqqında əvvəlcədən qəti fikir söyləmək mümkün deyilsə, həmin hadisəyə təsadüfi hadisə deyilir.

Əgər S sınağının hər-bir icrasında $\omega_i (i=1,2,...)$ hadisələrindən yalnız biri hökmən baş verirsə, onda ω_i nəticələrindən hər birinə S sınağının elementar hadisəsi, bütün belə elementar hadisələr çoxluğuna isə S sınağının elementar hadisələr fəzası deyilir və $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...\}$ kimi işarə olunur.

Elementar hadisələr fəzasının hər bir altçoxluğuna təsadüfi hadisə deyilir. Ω - nın özü yəqin hadisə, boş çoxluq ($\varnothing$) isə mümkün olmayan hadisədir.

Təsadüfi hadisələr elementar fəzanın altçoxluqları olduqları üçün çoxluqların üzərindəki əməllərə uyğun olaraq təsadüfi hadisələr üzərində aşağıdakı əməllərin təyin edirlər.

1. A hadisəsi baş verdikdə B hadisəsi də baş verirsə, deyirlər ki, A hadisəsi B hadisəsini doğurur və bunu $A \subset B$ kimi yazırlar.

2. $A \subset B$ və $B \subset A$ münasibətləri hər ikisi eyni zamanda ödənilərsə, A və B-yə eynigüclü və ya bərabər hadisələr deyilir.

3. A və B hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəyə bu hadisələrin cəmi (birləşməsi) deyilir və $A+B$ $(A \cup B)$ kimi işarə olunur.

4. A və B hadisələrinin hər ikisi baş verdikdə baş verən hadisəyə bu hadisələrin hasili (kəsişməsi) deyilir və AB $(A \cap B)$ kimi işarə olunur.

5. A hadisəsi baş verib, B hadisəsi baş vermədikdə baş verən

hadisəyə A ilə B-nin fərqi deyilir və $A-B$ $(A\setminus B)$ kimi işarə olunur.

6. A hadisəsi baş verdikdə baş verməyən, A hadisəsi baş vermədikdə isə baş verən hadisəyə A-nın əksi (inkarı) deyilir və A kimi işarə olunur.

Təsadüfi hadisələr üzərində əməllər, çoxluqlar üzərində əməllərin malik olduğu oxşar xassələrə malikdirlər.

Hər-bir təsadüfi A hadisəsinə onun ehtimalı adlanan müəyyən P(A) ədədini qarşı qoyurlar. Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfır (P(Ø)=0), yəqin hadisənin ehtimalı vahid $(P(\Omega)=1)$ hesab olunur. İxtiyari təsadüfi A hadisəsi üçün $0 \le P(A) \le 1$ münasibəti ödənilir.

Fərz edək ki, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$ eyni ehtimallı hadisələrdən ibarət fəza, A isə Ω-nın m dənə elementar hadisəsindən ibarət olan altçoxluqdur, yəni müəyyən təsadüfi hadisədir.

$P(A) = \frac{m}{n}$ düsturu ilə təyin olunan kəmiyyətə A hadisəsinin ehtimalı, bu tərifə isə ehtimalın klassik tərifi deyilir. Burada n – sınaq zamanı baş verə biləcək hadisələrin ümumi sayı (mümkün hallar sayı), m isə A-nın təyin olunduğu altçoxluqlara daxil olan elementar hadisələrin sayıdır (A üçün əlverişli hallar sayı).

Tapşırıq.

Məsələ 1. *A, B, C* ixtiyari üç təsadüfi hadisə olduqda aşağıdakı hadisələri *A, B, C* təsadüfi hadisələri üzərindəki əməl simvollarının köməyi ilə yazın:

a) yalnız A hadlsəsi baş vermişdir;

b) yalnız A və B baş vermişdir;

v) hər üç hadisə baş vermişdir;

q) bu üç hadisədən heç olmazsa biri baş vermişdir;

d) bu hadisələrdən heç olmazsa ikisi baş vermişdir;

e) yalnız bir dənə hadisə baş vermişdir;

j) yalnız iki dənə hadisə baş vermişdir;

z) heç-bir hadisə baş verməmişdir;

i) ikidən çox olmayan sayda hadisə baş vermişdir.

Cavab: a) $A\overline{B}\,\overline{C}$; b) $AB\overline{C}$; v) ABC; q) $A+B+C$;

d) $AB+AC+BC$; e) $A\overline{B}\,\overline{C}+B\overline{A}\,\overline{C}+C\overline{B}\,\overline{A}$;

j) $AB\overline{C}+AC\overline{B}+BC\overline{A}$; z) $\overline{ABC}$; i) $(A+B+C)$-ABC.

Məsələ 2. Qutuda 1-dən 10-a qədər nömrələnmiş 10 dənə kürə vardır. Qutudan təsadüfi olaraq bir kürə çıxarılır. Çıxarılan bu kürənin nömrəsinin 10-dan böyük olmaması ehtimalını tapın.

Cavab: 1.

Məsələ 3. Qutuda 15 kürə vardır. Bunlardan 5-i ağ,10-u qara rənglidir. Bu qutudan təsadüfən çıxarılan kürənin göy rəngli olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Cavab: 0.

Məsələ 4. Qutuda olan 12 kürədən 3-ü ağ, 9-u qara rənglidir. Qutudan təsadüfən çıxarılan kürənin qara rəngli olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Cavab: 0,75.

Məsələ 5. Hamar lövhə üzərinə iki nərd zəri atılmışdır. Yuxarı üzlərdə düşən xallar cəminin 4-ə bərabər olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli: Ehtimalın klassik tərifindən istifadə edək. İki zər atılarkən mümkün hadisələr sayı 6 x 6 = 36 götürülməlidir. Belə ki, birinci zərin yuxarı üzündə düşən, hər-bir xal ikincinin yuxarı üzündə düşə bilən 6 xaldan hər-biri ilə qruplaşa bilər. Yuxarı üzlərdəki xallar cəminin 4-ə bərabər olması hadisəsini A ilə işarə edək. A üçün əlverişli hallar (1;3), (2;2), (3;1) olur. Burada mötərizə daxilindəki rəqəmlər uyğun olaraq birinci və ikinci zərin yuxarı üzündə düşən xalları göstərir. Beləliklə, mümkün hallar sayı 36, əlverişli hallar sayı 3 olduğu üçün $P(A)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$ alınır.

Məsələ 6.

Hamar lövhə üzərinə iki nərd zəri atılır. Aşağıdakı hadisələrin ehtimallarını tapın:

A={hər iki zərdə eyni xal düşür};

B={birinci zərdə düşən xal ikincidə düşəndən böyükdür};

C={xalların cəmi cütdür};

D={xalların cəmi ikidən böyükdür};

E={xalların cəmi 5-dən kiçik deyil};
F={heç olmazsa bir zərdə 6 xalı düşüb};
G={xalların hasili 6-ya bərabərdir}.
Cavab:

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{5}{12},\ P(C)=\frac{1}{2},\ P(D)=\frac{35}{36},\ P(E)=\frac{5}{6},$$

$$P(F)=\frac{11}{36},\ P(G)=\frac{1}{9}$$

Məsələ 7. Dörd cilddən ibarət seçilmiş əsərlər təsadüfi ardıcıllıqla kitab rəfinə yanaşı qoyulmuşdur. Əsərlərin kitab rəfində soldan sağa, artan və ya azalan cild nömrələrinə görə düzülmələri ehtimalını tapın.

Həlli: Məlum olduğu kimi, dörd ədədi müxtəlif düzülüş sıralarına görə $P_4=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ sayda üsulla qruplaşdırmaq olar. Deməli, kitab rəfində 4 kitabı 24 müxtəlif usulla düzmək olar. Yəni baxılan hadisə üçün mümkün halların sayı 24-dür. Bu hadisə üçün (1 2 3 4) və (4 3 2 1) düzülüşləri əlverişli haldır. Ona görə

$$P=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

Məsələ 8. Qutuda üzərində 1,2,3,4,5 yazılmış 5 dənə eyni ölçülü karton vərəqlər vardır. Bu qutudan təsadüfən 3 karton vərəq çıxarılıb yanaşı düzülürlər. Bu zaman alınmış üçrəqəmli ədədin cüt olması ehtimalını tapın.

Cavab: $P=\frac{24}{60}=0,4$

Məsələ 9. Qutudakı 10 kürədən 6-sı ağ, 4-ü qaradır. Bu qutudan təsadüfən çıxarılan iki kürənin hər ikisinin ağ olması ehtimalını tapın.

Cavab: a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{18}$.

Məsələ 10. 8 nəfər adam düzbucaqlı şəklində olan stolun bir tərəfində əyləşirlər. Nəzərdə tutulan iki adamın: a) stolun bir tərəfindəki yerlərin sayı 8; b) stolun bir tərəfindəki yerlərin sayı 12 olduqda yanaşı əyləşmələri ehtimalını tapın.

Cavab: a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{6}$

1.2 Həndəsi ehtimal

Hadisə üçün əlverişli və mümkün hallar sayından biri və ya hər ikisi sonlu olmadıqla ehtimalın klassik tərifindən istifadə etmək mümkün deyil. Bəzi belə ehtımalları hesablamaq üçün ehtimalın aşağıdakı həndəsi tərifindən istifadə olunur.

Fərz edək ki, l düz xətt parçası L düz xətt parçasının daxilində yerləşir. L parçasından təsadüfi olaraq götürülən nöqtənin l parçasından olması ehtimalını tapmaq tələb olunur.

Götürülən nöqtənin l parçasından olması ehtimalı L parçasının uzunluğu ilə mütənasib olub, l-in L parçası daxilində necə yerləşməsindən asılı olmamasını qəbul etdikdə bu ehtimal

$$P=\frac{\text{uzunluq } \ell}{\text{uzunluq } L}$$

düsturu üzrə hesablanır.

Ehtimalın bu həndəsi tərifi müstəvi fiqurlar və fəza cisimləri üçün də ümumiləşdirilir.

Belə ki, g müstəvi fiquru G müstəvi fiqurunun daxilində yerləşmişdirsə, G-dən təsadüfən götürülmüş nöqtənin g-dən olması ehtimalı yuxarıdakı fərziyyələr qəbul edilməklə

$$P=\frac{\text{sahə } g}{\text{sahə } G}$$

düsturu üzrə, müstəvi fiqurlar əvəzinə v, V fəza cisimləri olduqda isə

$$P=\frac{\text{həcm } v}{\text{həcm } V}$$

düsturu üzrə hesablanır.

Bu paraqrafda baxılan məsələlərdə həndəsi ehtimal düsturundan istifadə üçün zəruri olan yuxarıdakı iki fərziyyənin ödənildiyi qəbul edilir.

Tapşırıq.

Məsələ 19. 30 sm. uzunluğu olan L parçasında uzunluğu 10 sm. olan l parçası yerləşdirilmişdir. Təsadüfi olaraq böyük parça üzərinə qoyulmuş nöqtənin kiçik parçadan olması ehtimalını tapın.

Cavab: $\frac{1}{3}$

Məsələ 20. R radiuslu dairənin daxilində r radiuslu dairə yerləşdirilmişdir. Böyük dairəyə təsadüfən qoyulmuş nöqtənin kiçik dairədən olması ehtimalını tapın.

Cavab: r^2 / R^2

Məsələ 21. Müstəvi üzərində radiusları 3 sm. və 5 sm. olan iki konsentrik çevrə çəkilmişdir. Təsadüfi olaraq böyük dairəyə qoyulmuş nöqtənin çevrələrin əmələ gətirdiyi dairəvi halqaya düşməsi ehtimalını tapın.

Cavab: $\frac{16}{25}$

Məsələ 22. Sürətlə fırlanan disk cüt sayda bərabər sektorlara bölünmüş və bu sektorlar növbə ilə ağ və qara rənglərlə boyanmışdır. Diskə atılan güllənin ağ rəngli sektora dəyməsi ehtimalını tapın.

Cavab: $\frac{1}{2}$

1.3. Ehtimalın toplama və vurma teoremləri

Əgər $A_1, A_2, \ldots A_n$ hadisələrindən ixtiyari ikisi eyni zamanda baş verə bilməzsə, onda ehtimalların toplama teoremi adlanan

$P(A_1+A_2+A_3+ \ldots +A_N)=P(A_1)+P(A_2)+ \ldots +P(A_n)$

düsturu doğrudur. Bu halda $A_1, A_2, \ldots A_n$ uyuşmayan hadisələr adlanırlar.

İxtiyari iki A və B hadisələri üçün

$P(A + B)=P(A) + P(B) - P(AB)$ düsturu doğrudur.

A hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində B hadisəsinin baş vermə ehtimalı $PA(B)$ və ya $P(B/A)$ kimi işarə olunur və şərti ehtimal adlanır.

İki hadisənin eyni zamanda baş verməsinin ehtimalı onlardan birinin baş vermə ehtimalı ilə digərinin əvvəlkinə nəzərən şərti ehtimalı hasilinə bərabərdir. Yəni $P(AB)=P(A)\bullet P(B/A)=P(B)\bullet P(A/B)$.

Bu bərabərlik ehtimalların vurma teoremini ifadə edir.

Sonuncu düstur ikidən çox sayda hadisələr üçün aşağıdakı şəkildə ümumiləşdirilir:

$P(A_1A_2 \ldots A_n)= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1})$

Əgər $P(A/B)=P(A)$ olarsa, onda A və B asılı olmayan hadisələr adlanırlar. Bu halda $P(AB) = P(A) \bullet P(B)$ düsturu doğrudur.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin hər hansı biri yerdə qalan hadisələrinin hər biri ilə və onların istənilən kombinasiyası ilə asılı olmadıqda $A_1, A_2, \dots, A_n$ asılı olmayan hadisələr adlanırlar. Asılı obnayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri üçün

$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$ düsturu doğrudur.

Tapşırıq.

Məsələ 23. Qutuda 10 ağ, 15 qara, 20 göy və 25 sarı kürə vardır. Qutudan təsadüfi olaraq bir kürə götürülür. Aşağıdakı hadisələrin ehtimallarını tapın: a) çıxarılan kürə ya ağ, ya da qaradır; b) çıxarılan kürə ya göy, ya da sarıdır; v) çıxarılan kürə ya ağ, ya qara, ya da göydür.

Həlli: Aşağıdakı işarələri qəbul edək: A={çıxarılan kürə ağdır), Γ={çıxarılan kürə qaradır}, G={çıxarılan kürə göydür}, S={çıxarılan kürə sarıdır}.

Onda aydındır ki, $P(A) = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$; $P(\Gamma) = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$;

$$P(G) = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}; \; P(S) = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$$

Çıxarılan kürənin: a) ya ağ, ya da qara olması hadisəsinə $A + \Gamma$; b) ya göy, ya da sarı olması hadisəsinə G + S; v) ya ağ, ya qara, ya da göy olması hadisəsinə $A + \Gamma + G$ kimi baxmaq olar. Aydındır ki, A, Γ, G, S asılı olmayan hadisələrdir. Ona görə

a) $P(A+\Gamma) = P(A) + P(\Gamma) = \frac{1}{7} = \frac{3}{14} = \frac{5}{14}$

b) $P(G+S) = P(G) + P(S) = \frac{2}{7} = \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$

v) $P(A+\Gamma+G) = P(A) + P(\Gamma) + P(G) = \frac{1}{7} = \frac{3}{14} = \frac{2}{7} = \frac{9}{14}$

Məsələ 24. İki qutudan birincisində 2 ağ, 10 qara, ikıncisində 8 ağ, 4 qara kürə vardır. Hər qutudan təsadüfi olaraq bir kürə çıxarılır. Çıxarılan hər iki kürənin ağ olması ehtimalını tapın.

Cavab: $\frac{1}{9}$.

Məsələ 25. Qutuda 6 ağ və 8 qara kürə vardır. Qutudan təsadüfi olaraq dalbadal iki kürə çıxarılır. Çıxarılan hər iki kürənin ağ olması ehtimalını tapın.

Cavab: $\frac{15}{91}$ **Göstəriş:** A={çıxarılan I kürə ağdır}, 6={çıxarılan II kürə ağdır} işarə edib, $P(AB)=P(A) \bullet P(B/A)$ düsturundan istifadə edin.

Məsələ 26: Bir qutuda 3 ağ və 4 qara kürə vardır. Qutudan təsadüfi olaraq dalbadal iki kürə çıxarılır. Çıxarılan birinci kürənin ağ olduğunu bilərək, ikinci çıxarılan kürənin qara olması ehtimalını tapın.

Cavab: $\frac{2}{3}$

Məsələ 27: Tələbə proqramda olan 25 sualdan 20-ni bilir. Tələbəyə imtahan götürən müəllim tərəfindən verilən hər üç sualı tələbənin bilməsi ehtimalını tapın.

Cavab: $P=\frac{20}{25}\bullet\frac{19}{24}\bullet\frac{18}{23}=\frac{57}{115}$

1.4. Tam ehtimal və Bayes düsturları

Əgər $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hadisələri cüt-cüt uyuşmayan olub, tam qrup təşkil edirsə, A hadisəsi isə $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hadisələrindən hər biri (yalnız biri) ilə eyni zamanda baş verə bilirsə, onda tam ehtimal düsturu adlanan

$$P(A)=P(B_1)\bullet P(A/B_1)+P(B_2)\bullet P(A/B_2)+\ldots+P(B_n)\bullet P(A/B_n)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\bullet P(A/B_i)$$

bərabərliyi doğrudur.

Həmin şərtlər daxilində

$$P(B_j/A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(B_j)\bullet P(A/B_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\bullet P(A/B_j)}$$

Bayes düsturu ödənilir.

Tapşırıqlar:

Məsələ 28. Eyni şəklldə olan dörd qutu vardır. Birinci qutuda 1 ağ, 1 qara, ikincidə 2 ağ, 3 qara, üçüncü qutuda 3 ağ, 5 qara, dördüncüdə 4 ağ, 7 qara kürə vardır. Bu qutulardan biri təsadüfən götürülüb, ondan bir kürə çıxarılır. Çıxarılan bu kürənin ağ olması ehtimalını tapın.

Həlli: Qutular eyni şəkilli olduqları üçün onların seçilmə imkanları bərabərdir.

Ona görə əgər B_1, B_2, B_3, B_4 ilə uyğun olaraq I, II, III, IV qutunun seçilməsi hadisələrini işarə etsək, aydındır ki, B_1, B_2, B_3, B_4 cüt-cüt uyuşmayan hadisələr olub, tam qrup təşkil edərlər.

$$B_1+B_2+B_3+B_4=\Omega, P(B_1+B_2+B_3+B_4)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=1.$$

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4),$$

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)\frac{1}{4}$$

Çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsini A ilə işarə edək. $P(A/B_i)$ - şərti ehtimalı i-ci qutudan çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalını göstərir (i=1, 2, 3, 4). Ona görə

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A/B_i)=\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bullet\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\bullet\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\bullet\frac{4}{11}=$$

$$=\frac{1}{4}\bullet\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}\right)=\frac{1}{4}\bullet\frac{220+176+165+160}{440}=$$

$$=\frac{1}{4}\bullet\frac{721}{440}=\frac{721}{1760}$$

Cavab: $\frac{721}{1760}$

Məsələ 29: İki qutudan birincidə 5 ağ, 10 qara, ikincidə 3 ağ, 7 qara kürə vardır. İkinci qutudan təsadüfi olaraq bir kürə götörülüb birinci qutuya qoyulduqdan sonra, birinci qutudan təsadüfi şəkildə bir kürə çıxarılır. Çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalını tapın.

Həlli: İkinci qutudan birinci qutuya bir kürə qoyduqdan sonra birinci qutudan bir kürə çıxardıqda aşağıdakı iki hadisədən biri baş verə bilər:

B_1 - çıxarılan kürə birinci qutuda əvvəl olan kürələrdən biridir.

B_2 - çıxarılan kürə sonradan ikinci qutudan birinci qutuya qoyulan kürədir.

Aydındır ki, $P(B_1)=\frac{15}{16}$; $P(B_2)=\frac{1}{16}$

A ilə çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsini işarə etsək, onda $P(A/B_1)$ şərti ehtimalı çıxarılan ağ kürənin birinci qutuda əvvəldən olan ağ kürələrdən birinin olması ehtimalıdır. Ona görə $P(A/B_1)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$. $P(A/B_2)$ şərti ehtimalı isə çıxarılan ağ kürənin, sonradan ikinci qutudakı ağ kürələrdən birinin birinci qutuya qoyulanın olması ehtimalıdır:

$$P(A/B_2)=\frac{3}{10}$$

Tam ehtimal düsturuna görə

$$P(A)=P(B_1)\bullet P(A/B_1)+P(B_2)\bullet P(A/B_2)=$$
$$=\frac{5}{15}\bullet\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\bullet\frac{3}{10}=\frac{159}{480}=\frac{53}{160}$$

RİYAZİ STATİSTİKA

Bu fəsildə ölçülər zamanı alınmış ilkin məlumatın emalının üsulları nəzərdən keçiriləcək. Bu üsulları düzgün tətbiq etmək və dəqiq nəticələrə gəlmək üçün statistikanın rolunu və gətirilmiş üsulların mahiyyətini anlamaq lazımdır.

Statistika kütləvi oxşar halların cəmlərini tətbiq edən bilik sahəsini təşkil edir. Bu halların xüsusiyyəti, bir tərəfdən, onların oxşarlığındadır, digər tərəfdən isə onlar bir-birindən kəmiyyət göstəriciləri ilə fərqlənir. Məsələn, eyni yaşlı, cinsli, idman kvalifikasiyalı və stajlı idmançıların böyük qrupunu tətbiq edəndə, oksigenin maksimal şərfti (OMS) ölçüsünü öyrənmək lazımdır. Birinci halda biz kütləvi oxşar göstəriciləri əldə edəcəyik, ikincidə isə OMS göstəricisi konkret idmançıya məxsus olduğu və bir-birindən fərqlənən fərdi göstəricilər alınacaq.

Beləliklə, *statistikanın tədqiqat obyekti* qismində bir-birindən fərqlənən və ya statistikada deyildiyi kimi, ayrı göstəriciyə görə dəyişən kütləvi oxşar hallar çıxış edəcək.

Statistikanın tədqiqat mövzusu statistik cəmlərin qiymətləndirilməsidir. Burada xüsusi riyazi üsullardan istifadə olunur. Dəqiq desək, kütləvi statistik cəmlərin ölçülməsi elə göstəricilərlə əvəz olunur ki, onların tətbiqi zamanı ilkin məlumatın itkisi baş vermir. Beləliklə, rəqəmlərin böyük (baş cəm) cəmləri özündə bütün ilkin məlumatı daşıyan bir neçə parlamentlərlə əvəz olunur.

Məlumatın tədqiq olunacaq ölçülərə qədər sıxılması öyrənilən halı təhlil etmək və ona adekvat qiymət vermək zamanını yaradır, bu isə bütün statistik cəminin nəzərdən keçirilməsi zamanı həyata keçirmək mümkün olmur. Bundan başqa, cəmin parlamentlərini aşkar etmək bəzi hallarda ilkin məlumatın onun konkret təhlili sahəsində, habelə digər cəmlərlə müqayisədə qiymətləndirilməsi zamanı qanunauyğunluğu təyin etməkdə kömək edir.

Bu mülahizələrin hamısı idman tədqiqatların təcrübəsində özünə məxsus yerə malikdir. Nadir istisnaları çıxmaqla, bədən tərbiyəsi və idmanda aparılan tədqiqatlar – müşahidələrə, eksperiment və testlərin icrasına əsaslanır. Elmi üsulların əksər hissəsi idmançıların böyük qruplarının ölçülmələrinin nəticələrinə söykənir. Belə, BTİ praktikası statistik cəminin şəklində olan ilkin məlumata malikdir, burada onun ayrı-ayrı göstəriciləri konkret idmançının nailiyyətlərini əks edir, onların dəyişkənliyi isə ölçülən göstərici üzrə idmançıların fərdi fərqlənməsinə dəlalət edir.

Beləliklə, *idman statistikası* BTİ təcrübəsində kütləvi oxşar hallar haqda elmdir.

§1. Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanma qanunu

$\Omega = \{\omega_i\}$ elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş həqiqi qiymətli $X = X\{\omega\}$ funksiyasına təsadüfi kəmiyyət deyilir. Təsadüfi kəmiyyətlər müəyyən ədədi çoxluqlardan olan müxtəlif qiymətləri ala bilərlər. Təsadüfi kəmiyyətin hansı qiyməti aldığını əvvəlcədən qəti söyləmək mümkün deyil. Lakin təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu əvvəcədən məlum ola bilər.

Əgər təsadüfi kəmiyyət sonlu və ya hesabi sayda izolə edilmiş $x_1, x_2,...,x_n,...$ qiymətlərini ala bilirsə, ona diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlər hər hansı sonlu və ya sonsuz interval təşkil edirsə, ona kəsilməz təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətin verilməsi üçün yalnız bir təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlər çoxluğunun göstərilməsi kifayət deyildir. Həm də bu təsadüfi kəmiyyətin həmin qiymətləri hansı ehtimalla alması məlum olmalıdır.

Təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər ilə bu qiymətləri alma ehtimalları arasında əlaqə yaradan hər bir münasibətə təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu deyilir.

Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu bir qayda olaraq aşağıdakı cədvəl şəklində verilir:

Təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri	x_1	x_2	...	x_n	...
Bu qiymətləri alma ehtimalları	P_1	P_2	...	P_n	...

Burada $\sum_{(i)}^{n} P_i = 1$ şərti ödənilməlidir.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin *(a,b)* intervalına düşməsi ehtimalı $P = (a < X < b)$ kimi işarə olunur. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu vermək üçün $P(x)$ sıxlıq funksiyası məlum olmalıdır. Sıxlıq funksiyası aşağıdakı iki xassəyə malikdir:

1) $P(x) \geq 0$; 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1$

X təsadüfi kəmiyyətinin *P(x)* sıxlıq funksiyası məlum olduqda, *X*-in *(a,b)* intervalından qiymət alması ehtimalı

$$P = (a < X < b) = \int_{a}^{b} P(x)dx$$

düsturu ilə, *X*-in istənilən *x* həqiqi ədədindən kiçik qiymət alması ehtimalı isə

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^{b} P(t)dt$$

düsturu ilə təyin oluna bilər.

$F(x) = P(X < x)$ funksiyasına *X*-in paylnma funksiyası deyilir. *F(x)*-in tərifindən və (2)-dən çıxır ki, *P(x)* sıxlıq funksiyası kəsilməyən olduqda $F'(x) = P(x)$.

Paylanma funksiyasının aşağıdakı üç əsas xassəsi vardır:

1) $F(x)$ – azalmayan funksiyadır;

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Tapşırıq.

Məsələ. *X* diskret təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylanma qanununa əsasən verilmişdir:

a)	X	2	4	5	6		b)	X	10	15	20
	P	0,3	0,1	0,2	0,4			P	0,1	0,7	0,2

Paylanma sınıq xəttini qurun

a)-nın həlli

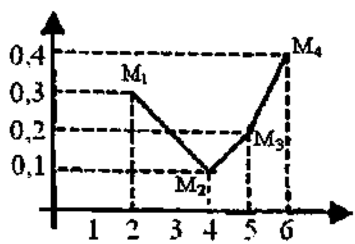
Düzbucaqlı koordinat sisteminnin absis oxu üzərində X təsadüfi kəmiyyətinin x_i qiymətlərini, ordinat oxu üzərində isə bu qiymətləri alma ehtimallarını göstərilir

M_1 (2; 0,3), M_2(4;0,1),

M_3 (5;0,2), M_4(6;0,4)

nöqtələrini qurub, bu nöqtələri ardıcıl olaraq düz xett parçaları ilə birləşdirək.

$M_1 M_2 M_3 M_4$ paylanma sınıq xəttidir.



Məsələ: Atıcının hədəfi vurma ehtimalı 0,7-dir. 25 dəfə atəş açılmışdır. Hədəfi vurmanın ən böyük ehtimalı ədədini tapın.

Həlli: Şərtə görə $n = 25$; $p= 0,7$; $q = 1 - 0,7 = 0,3$.

$$(n+1)\bullet p = 26\bullet\frac{7}{10} = \frac{13\bullet 7}{5} = \frac{91}{5} = 18\frac{1}{5}$$

kəsr ədəd olduğundan bir dənə ən böyük ehtimallı ədəd vardır:

$$m_0 = [(n+1)p] = \left[18\frac{1}{5}\right] = 18$$

Məsələ: Bəzilərinin içərisində standart, bəzilərinin içərisində isə qeyri-standart detallar olan eyni formalı 20 qutu vardır. içərisində standart detallar olan qutunun götürülmə ehtimalı 0,75-dir. İçərisində standart detallar olan qutunun götürülməsinin ən böyük ehtimalı ədədini lapın.

Cavab: 15.

Məsələ: Nərd zəri hamar lövhə üzərinə 5 dəfə atılmışdır. Yuxarı üzdə 2 dəfə 3-ə bölünən xalın düşməsi ehtimalını tapın.

Cavab: $\frac{80}{243}$

Məsələ: Eyni güclü iki rəqib şahmat oynayır. Bu rəqiblərdən hər hansı birinin: a) iki partiyadan birində və ya dörd partiyadan ikisində; b) dörd partiyadan ən azı ikisində və ya beş partiyadan ən azı üçündə qalib gəlməsi ehtimallarından hansı böyükdür? Heç-heçələr nəzərə alınmır.

Cavab: a) iki partiyadan birində udması daha ehtimallıdır:

$$\frac{1}{2}=P_2(1)>P_4(2)=\frac{3}{8}$$

b) dörd partiyadan ən azı ikisində udması daha ehtimallıdır:

$$P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-\left[P_4(0)+P_4(1)\right]=$$
$$=\frac{11}{16}>\frac{8}{16}=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$$

Məsələ: Uzunluğu a olan AB parçası üzərində təsadüfi olaraq 5 nöqtə götürülmüşdür. x isə $0<x<a$ şərtini ödəyən ədəddir. Bu 5 nöqtədən ikisinin A-dan olan məsafəsinin x-dən kiçik, üçünün isə A-dan olan məsafəsinin x-dən böyük olması ehtimalını tapın.

$P_5(2)=C_5^2\left(\frac{x}{a}\right)^2\left(\frac{a-x}{a}\right)^3$ Göstəriş:həndəsi ehtimalın tərifinə əsasən nöqtənin A-dan olan məsafəsinin x-dən kiçik olması ehtimalının $p=\frac{x}{a}$, böyük olması ehtimalının isə

$$q=1-p=1-\frac{x}{a}=\frac{a-x}{a}$$

olduğunu nəzərə alıb, Bernulli düsturundan istifadə edin.

Məsələ. Çoxillik müşahidələr əsasında müəyyən edilmişdir ki, müşahidələr aparılan şəhərdə 1 oktyabrda yağış yağması ehtimallı $\frac{1}{7}$-ə bərabərdir. 40 il ərzində yağış yağan 1 oktyabr günlərinin ən böyük ehtimalı ədədini tapın.

Cavab: $m_0=5$

Məsələ: Qutuda 100 ağ və 80 qara kürə vardır. Hər biri sonradan geri qaytarılmaq şərti ilə qutudan dalbadal n kürə çıxarılır. Bu zaman ağ kürə çıxmasının ən böyük ehtimallı ədadi 11 olur. n-i tapın.

Həlli: Hər dəfə qutudan çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalı $P=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$ olar. Çıxarılan 4 kürədən ikisinin ağ olması (1) Bernulli düsturu üzrə tapıla bilər. $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$; n=4, k=2 olduğu üçün.

$$P_4(2)=C_4^2p^2\cdot q^{4-2}=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{27}^{2}.$$

Cavab: $\frac{8}{27}$

Məsələ: Hədəfə tək-tək 6 dənə bomba atılır. Hər bir bombanın hədəfə düşmə ehtimalının P=0,3 olduğunu bilərək, hədəfə 4 bomba düşmə ehtimalını tapın.

Cavab: 0,059535≈0,06.

Məsələ: Eyni güclü iki rəqib şahmat oynayır. Bu şahmatçılardan hər hansı birinin dörd partiyadan ikisində, yoxsa altı partiyadan üçündə qalib gəlməsi ehtimalı böyükdür (heç-heçə oyunlar nəzərə alınmır)?

Cavab: Dörd partiyadan ikisindən udması, altı partiyadan üçündə udması ehtimalınından böyükdür. **Göstəriş:** Şahmatçıların qalib gəlmə ehtimalını $p=\frac{1}{2}$ götürüb, Bernulli düsturu üzrə $P_4(2)$ və $P_6(3)$ ehtimallarını hesablayıb müqayisə edin.

Məsələ: Müəyyən məmulatın ümumi istehsalının 5%-i keyfiyyətsizdir. Bu məmulatın 5-i təsadüfi olaraq götürülür. Götürülən bu

5 məmulatın içərisində: *a)* keyfiyyətsiz məmulatın olmaması; *b)* 2 dənə keyfiyyətsiz məmulatın olması ehtimalını tapın.

Cavab: *a)* $\approx 0{,}774$; *b)* $\approx 0{,}0021$.

Məsələ: Auditoriyada 20 oğlan, 10 qız vardır. Müəllimin verdiyi 3 sualın hərəsinə bir tələbə cavab verdi. Cavab verənlərdən ikisinin oğlan, birinin qız olması ehtimalını tapın.

Cavab: $P = P_3(2) = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$.

Məsələ: AB parçası C nöqtəsi ilə 2:1 nisbətində bölünmüşdür. Bu parçadan təsadüfi olaraq 4 nöqtə götürülmüşdür. Bu nöqtələrdən ikisinin S nöqtəsindən solda, ikisinin isə sağda olması ehtimalını tapın.

Cavab: $P_4(2) = C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27}$.

Məsələ: Qutuda 10 ağ və 40 qara kürə vardır. Qutudan ardıcıl olaraq 14 kürə çıxarılır və rənginə baxmayaraq qutuya qaytarılır. Ağ kürə çıxması hadisəsi üçün ən böyük ehtimallı ədədi tapın.

Həlli: Aydındır ki, ağ kürə çıxması ehtimalı

$$p = \frac{10}{10+40} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \text{ olar.}$$

Digər tərəfdən, $n = 14$, $np + p = 15\cdot\frac{1}{5} = 3$ tam ədəd olduğu üçün 2 dənə ən böyük ehtimallı ədəd vardır:

Məsələ: Bir partiya detaldan 10%-i qeyri-standartdır. Təsadüfi olaraq 4 detal götürülür. Götürülmüş 4 detaldan qeyri standartların sayını göstərən X təsadüfi kəmiyyətinin binomial paylanma qanununu yazın.

Həlli: Götürülmüş 4 detaldan qeyri-standartların sayını göstərən X təsadüfi kəmiyyəti 0, 1, 2, 3, 4 qiymətlərini ala bilər. X-in 0-a bərabər qiymət alması götürülmüş 4 detalın içərisində qeyri-standartının olmamasını göstərir.

X təsadüfi kəmiyyətinin 0,1,2,3,4 qiymətlərini alma ehtimallarını tapaq.

Şərtə görə detalların 10%-i qeyri-standart olduğundan bu partiya detaldan götürülmüş hər bir detalın qeyri-standart olması ehtimalı p=0,1-dir. Bernulli düsturundan istifadə edək.

n=4; p=0,1 q=1-0,1=0,9 olduğu üçün

$$P=(X=0)=P_4(0)=C_4^0p^0p^{4-0}=q^{4-0}=q^4=0{,}6561;$$

$$P=(X=1)=P_4(1)=C_4^1p^1p^3=4\cdot 0{,}1\cdot(0{,}9)^4=0{,}2916;$$

$$P=(X=2)=P_4(2)=C_4^2p^2p^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(0{,}1)^2\cdot(0{,}9)^2=0{,}0486;$$

$$P=(X=3)=P_4(3)=C_4^3p^3p=4\cdot(0{,}1)^3\cdot 0{,}9=0{,}0036;$$

$$P=(X=4)=P_4(4)=C_4^4p^4=1\cdot(0{,}1)^4=0{,}0001.$$

Bu ehtimalların cəmi vahidə bərabər olmalıdır. Doğrudan da;
0,6561+0,2916+0,0486+0,0036+0,0001=1.

Qeyd edək ki, asılı olmayan n sınaqda A hadisəsinin baş verməsinin sayını göstərən X təsadüfi kəmiyyətinin k-ya bərabər qiymət alması ehtimalı

$$P=(X=k)=P_n(k)=C_n^kp^kp^{n-k}$$

Bernulli düsturu üzrə tapıldıqda X diskret təsadüfi kəmiyyətinə binomial qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Bu misalda verilən X təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı binomial qanunla paylanmışdır:

X	1	2	3	4	5
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Məsələ: Hamar lövhə üzərinə 2 zər eyni zamanda iki dəfə dalbadal atılır. Bu iki dəfədə hər iki zərin yuxarı üzlərində cüt xalların düşdüyü halların sayını göstərən X təsadüfi kəmiyyətinin binomial paylanma qanununu tapın.

Cavab:

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

Məsələ: Bir partiya 6 detaldan 4-ü standartdır. Təsadüfi olaraq 3 detal götürülür. Götürülmüş bu 3 detaldan standart olanların sayını göstərən X diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu tapın.

Cavab:

X	0	1	2	3
P	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Göstəriş: X təsadüfi kəmiyyətinin $X = k (k = 1,2,3)$ qiymətlərini alma ehtimallarını hesablayarkən $P(X = k) = \frac{C_4^k C_2^{3-k}}{C_6^3}$, $(k = 1,2,3)$ düsturundan istifadə edin.

Məsələ: Bir atəşdə atıcının hədəfi vurması ehtimalı 0,8-ə bərabərdir. Bu atıcıya hədəfi vurana qədər güllə verilir:

a) Atıcıya verilən güllələrin sayını göstərən X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu qurun;

b) Atıcıya verilən güllələrin ən böyük ehtimallı ədədini tapın.

Həlli: i-ci atəşdə atıcının hədəfi vurması hadisəsini A_i ilə işarə edək.

Şərtə görə

$$P(A_i) = 0,8; \ P(\overline{A_i}) = 1 - 0,8 = 0,2, \ i = 1,2,...$$

X təsadüfi kəmiyyətinin 1-ə bərabər qiymət alması o deməkdir ki, atıcı cəmisi 1 güllə almışdır. Deməli, birinci atəşdə hədəf vurulmuşdur. Ona görə $P(X = 1) = P(A_1) = 0,8$.

X-in 2-yə bərabər olması o deməkdir ki, birinci atəşdə hədəf vurulmayıb, ikinci atəşdə isə vurulub. Yəni $\overline{A_1}A_2$ hadisəsi baş verib. Ona görə

$$P(X = 2) = P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$$

Oxşar qayda ilə

$$P(X = 3) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,32 \text{ alınq.}$$

Prosesi bu qayda üzrə davam etdirməklə X təsadüfi kəmiyyətinin aşağıdakı paylanma qanununu alırıq.

X	1	2	3	4	...	k ...
P	0,8	$0{,}2\cdot 0{,}8$	$(0{,}2)^2\cdot 0{,}8$	$(0{,}2)^3\cdot 0{,}8$	...	$(0{,}2)^{k-1}\cdot 0{,}8$ ...

Bu paylanma qanunundan göründüyü kimi, X üçün ən böyük ehtimallı ədəd 1-dir.

Məsələ: İki bombardmançı təyyarə birinin ilk bombası hədəfə dəyənə qədər növbə ilə bomba atırlar. Əvvəlcə bombaları birinci təyyarə atır. Birinci təyyarənin hədəfi vurması ehtimalı 0,7; ikincininki isə 0,8-ə bərabərdir. Atılan bombaların sayından düzəldilmiş X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununun ilk 4 həddini yazın.

Cavab:

X	1	2	3	4
P	0,7	0,24	0,042	0,0144

Məsələ: Mağaza 1000 ədəd mineral su butulkası almışdır. Daşınma zamanı gətirilən butulkanın sınma ehtimalı 0,003-ə bərabərdir. Mağazanın aldığı butulkaların içərisində:

a) düz iki; b) ikidən az; v) heç olmazsa bir sınıq butulka olması ehtimalını tapın.

Cavab: a) $P_{1000}(2)=0.224$; b) $P_{1000}(0)+P_{1000}(1)=0{,}1992$;
b) $P=1-P_{1000}(0)=0{,}95$.

Məsələ: X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a(3x-x^2), & 0\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

düsturu ilə verilmişdir.

a) a əmsalını tapın;

b) X təsadüfi kəmiyyətinin (1,2) intervalına düşməsi ehtimalını tapın.

Həlli: a) Sıxlıq funksiyasının xassəsinə görə $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ olmalıdır.

Buradan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{3} a(3x - x^2)dx + 0 = a\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3 = a \cdot \left(\frac{27}{2} - 9\right) = \frac{9}{2}a$$

alınır.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ olması şərtindən $\frac{9}{2}a = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{9}$ tapırıq.

b) Məlumdur ki, sıxlıq funksiyası $f(x)$ olan X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin (a,b) intervalına düşməsi ehtimalı

$$P(a < X < b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

düsturu üzrə tapılır. Buradan

$$P(1 < X < 2) = \int_{1}^{2} \frac{2}{9}(3x - x^2)dx = \int_{1}^{2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{3} - \frac{16}{27} - \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{13}{27}$$

Məsələ: X kəsilməz təsadüfi kəmiyyəti $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ intervalında

sıxlıq funksiyası ilə verilmişdir. Bu interval xaricində $f(x) = 0$ X-in

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$$

intervalından qiymət alması ehtimalını tapın.

Cavab: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Məsələ: X diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

şəklində verilmişdir. X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını tapın.

Həlli: X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını $F(x)$ ilə işarə edək. Paylanma funksiyasının tərifinə görə $F(x)=P(X<x)$

X təsadüfi kəmiyyəti 4 dənə 3, 4, 7, 10 qiymətlərini alır. Bu təsadüfi kəmiyyət 3-dən kiçik qiymət almadığı üçün $x\le 3$ olduqda "$X<x$" mümkün olmayan hadisədir. Ona görə də $x\le 3$ olduqda $P(X<x)=0$, buradan isə alınır ki, $x\le 3$ olduqda $F(x)=0$.

$3<x\le 4$ olduqda "$X<x$" hadisəsi X-in 3-ə bərabər qiymət alması deməkdir. Ona görə $3<x\le 4$ olarsa, $F(x)=P(X<x)=2$ olur.

$4<x\le 7$ olduqda "$X<x$" hadisəsi X-in P=0,2 ehtimalı ilə 3-ə bərabər qiymət alması və X-in P=0,1 ehtimalı ilə 4-ə bərabər qiymət alması hadisələrinin cəmidir. Ona görə $4<x\le 7$ olarsa,

$F(x)=P(X<x)=P(X=3)+P(X=4)=0{,}2+0{,}1=0{,}3$ olar.

$7<x\le 10$ olarsa,

$$F(x)=P(X<x)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=7)=$$
$$=0{,}2+0{,}1+0{,}4=0{,}7$$

alınır.

Nəhayət, x>10 olarsa, $F(x)=P(X<x)=1$, "$X<x$" yəqin hadisə olduğundan və ya

$$F(x)=P(X<x)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=7)+$$
$$+P(X=10)=0{,}2+0{,}1+0{,}4+0{,}3=1$$

münasibətinə əsasən yazmaq olar.

Beləliklə, verilmiş X təsadüfi kəmiyyətinin F(x) paylanma funksiyası

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<3,\\ 0,2 & 3<x\le 4,\\ 0,3, & 4<x\le 7,\\ 0,7, & 7<x\le 10,\\ 1, & x>10\end{cases}$$

şəklindədir.

Məsələ: X təsadüfi kəmiyyəti

X	10	20	30	40	50
P	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

paylanma qanunu ilə verilmişdir. X-in paylanma funksiyasını tapın.

Cavab:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 10,\\ 0,2 & 10<x\le 20,\\ 0,5 & 20<x\le 30,\\ 0,85 & 30<x\le 40,\\ 0,95 & 40<x\le 50,\\ 1, & x>50\end{cases}$$

Məsələ: X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<2,\\ (x-2)^2 & 2\le x\le 3,\\ 1 & x>3\end{cases}$$

düsturu ilə verilmişdir. Bu təsadüfi kəmiyyətin: a) (1; 2,5) və (2,5; 3,5) intervallarına düşmə ehtimallarını; b) sıxlıq funksiyasını tapın.

Cavab: a) $P_1=F(2,5)-F(1)=0,25$

$$P_2=F(3,5)-F(2,5)=0,75$$

b) $f(x)=\begin{cases}0 & x<2,\\ 2(x-2), & 2\le x\le 3,\\ 0, & x>3\end{cases}$

Məsələ: X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası verilmişdir:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 2,\\ 0{,}5, & 2\le x\le 4,\\ 1, & x>4\end{cases}$$

X-in: a) 0,2-dən kiçik; b) 3-dən kiçik; v) 3-dən kiçik olmayan; q) 5-dən kiçik olmayan qiymət alması ehtimalını tapın.

Cavab: a) $P(X<0{,}2)=0$; b) $P(X<3)=F(3)=0{,}5$;

v) $P(X\le 3)=1-P(X<3)=1-F(3)=0{,}5$;

q) $P(X\le 5)=1-P(X<5)=1-F(5)=0$

Məsələ: X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası verilmişdir:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 1,\\ x-\dfrac{1}{2} & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasını tapın.

Həlli: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ düsturuna və $f(x)$-in verilən ifadəsinə görə yaza bilərik:

$x\le 1$ olarsa, $\qquad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0$,

$1<x\le 2$ olarsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1}0\cdot dt+\int_{0}^{x}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right)\Big|_0^x=$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x(x-1)$$

$x>2$ olarsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1}0\cdot dt+\int_{1}^{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt+\int_{2}^{x}0\cdot dt=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}(t^2-t)\Big|_1^2=\frac{1}{2}\cdot(4-2-1+1)=1$$

Beləliklə, $F(x)$ paylanma funksiyası

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 1,\\ \frac{1}{2}x(x-1) & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Məsələ: Bir partiyada 10 detaldan 8-i standartdır. Təsadüfi olaraq 2 detal götürülür. Götürülən detallardan standart olanların təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu yazın.

Cavab:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Göstəriş: Məsələ 46-a bax!

Məsələ: İmtahan qəbul edən müəllim tələbəyə əlavə suallar verir. Tələbə verilən suala cavab verə bilmədikdə müəllim başqa əlavə sual vermir. Tələbənin ixtiyari əlavə suala cavab verməsi ehtimalı 0,9-a bərabərdir.

a) Müəllimin tələbəyə verəcəyi əlavə sualların sayını göstərən təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu yazın;

b) Tələbəyə veriləcək suallar sayının ən böyük ehtimallı ədədini tapın.

Cavab:* *a)

X	1	2	3	4	... k
P	0,1	0,09	$(0,09)^2$	$(0,09)^3\cdot 0,1$	... $(0,9)^{k-1}\cdot 0,1$

b) 1. ***Göstəriş:*** Məsələ əvvəlkinin həllinə bax!

Məsələ: İki topdan növbə ilə hədəfə atəş açılır və atəş hər hansı bir top ilə hədəfin vurulmasına qədər davam etdirilir. Birinci topun hədəfi vurma ehtimalı 0,3; ikincininki isə 0,7-dir. Atəş birinci topla başlanır. a) Birinci topdan atılmış mərmilərin sayını göstərən X təsadüfi kəmiyyətinin; b) İkinci topdan atılmış mərmilərin sayını göstərən Y təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu yazın.

Cavab: *a)* X 1 2 3 ... κ ...P 0,79 0,79·0,21 0,79·$(0,21)^2$ ... 0,79·$(0,21)^{k-1}$ ...;

b) Y 0 1 2 ... κ ...

P 0,3 0,553 0,553·0,21 ... 0,553·$(0,21)^{k-1}$ ...;

Göstəriş: Əvvəlki məsələlərə bax!

Məsələ: X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<1, \\ (x-1)/2 & 1\le x\le 3, \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

düsturu ilə verilmişdir. *X-in* (1,5; 2,5) və (2,5; 3,5) intervallarına düşmə ehtimallarını tapın.

Cavab: $P(1,5<X<2,5)=0,5$; $P(2,5<X<3,5)=0,25$

Məsələ: X diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

şəklində verilmişdir. Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasını tapın.

Cavab:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x\le 2, \\ 0,5 & 2<x\le 4; \\ 0,7 & 4<x\le 7, \\ 1 & x>7 \end{cases}$$

Məsələ: Qutuda 5 ağ, 25 qara kürə vardır. Bu qutudan təsadüfi olaraq bir kürə çıxarılır. X təsadüfi kəmiyyəti çıxarılan ağ kürənin sayını göstərirsə, bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasını tapın.

Cavab:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0, \\ 5/6 & 0\le x\le 1, \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

1.1 Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları

Təsadüfi kəmiyyətlərin ala bildiyi qiymətlərin necə paylandığını xarakterizə etmək üçün onun riyazi gözləmə, dispersiya, orta kvadratik meyl, momentlər adlanan ədədi xarakteristikalarından istifadə olunur.

Tərif 1. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ qiymətlərini uyğun olaraq $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi X kəmiyyəti üçün $\sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k$ ədədi sırası mütləq yığılan olduqda, onun cəminə X-in riyazi gözləməsi deyilir və

$$M[X]=\sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k$$

kimi işarə olunur.

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k$ ədədi sırası mütləq yığılan olmadıqda deyirlər ki, X-in riyazi gözləməsi yoxdur.

Diskret X təsadüfi kəmiyyəti yalnız sonlu sayda $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qiymətlərini uyğun olaraq $P_1, P_2, \ldots, P_n$, ehtimalları ilə alırsa, onda onun riyazi gözləməsi var və

$$M[X]=\sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k$$

Tərif 2. Sıxlıq funksiyası $P(x)$ olan kəsilməz X təsadüfi kəmiyyəti üçün $\int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx$ inteqralı mütləq yığılan olduqda bu inteqralın qiymətinə *X-in* riyazi gözləməsi deyilir və

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx$$

kimi işarə olunur.

$\int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx$ inteqralı mütləq yığılan olmadıqda deyirlər ki, X-in riyazi gözləməsi yoxdur.

Məlumdur ki, X-in sıxlıq funksiyası $P(x)$ kəsilməyən funksiya olduqda

$$F'(x)=P(x)\Rightarrow dF(x)=P(x)dx$$

münasibəti doğrudur (burada $F(x)$ X-in paylanma funksiyasıdır). Ona görə paylanma funksiyası $F(x)$ olan kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$$

düsturu ilə tapmaq olar.

Riyazi gözləmənin aşağıdakı xassələri vardır:

Xassə 1. $M[C]=C$; (C-ixtiyari sabitdir)

Xassə 2. $M[CX]=CM[X]$;

Xassə 3.

$M[C_1X_1+C_2X_2+...+C_nX_n]=C_1M[X_1]+C_2M[X_2]+...C_nM[X_n]$;

Xassə 4. $M[XY]=M[X]\cdot M[Y]$;

(X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir)

Xassə 5. $|M[X]|\le M[|X|]$

Binominal paylanmanın riyazi gözləməsi, sınaqların sayının bir sınaqda hadisənin baş verməsi ehtimalı hasilinə bərabərdir: $M[X]=np$.

Təsadüfi kəmiyyətin bütün qiymətləri onun riyazi gözləməsi ətrafında yerləşir. Təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında necə səpələnməsi təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası adlanan kəmiyyətlə xarakterizə olunur.

Tərif 3. X təsadüfi kəmiyyətinin $M[X]$ riyazi gözləməsi sonlu ədəd olduqda $(X-M[X])^2$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə X-in dispersiyası deyilir və

$$D[X]=M[(X-M[X])^2] \quad (4)$$

kimi işarə olunur.

Bu dispersiyanın ümumi tərifidir. Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək (4)-ü aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$D[X] = M[X^2]-(M[X]^2) \quad (5)$$

X diskret təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda (1) və (4)-ə əsasən

$$D[X]=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - M[X])^2 P_k \quad (6)$$

X sıxlıq funksiyası $P(x)$ olan kəsilməz təsadüfi kəmiyyət olduqda (2) və (4)-ə əsasən

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M[X])^2 P(x)dx \quad (7)$$

yazmaq olar.

Dispersiyanın aşağıdakı xassələri vardır:

Xassə 1. $D[C]=0;$

Xassə 2. $D[CX]=C^2D[X];$

Xassə 3. $D[X_1+X_2+...+X_n]=D[X_1]+D[X_2]+...+D[X_n];$
(burada $X_1, X_2, ... X_n$, - asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir).

Xassə 4. $D[X-Y]=D[X]+D[Y]$;
(X və U asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir)

Xassə 5. $D[XY]=M[X^2]M[Y^2]-(M[X])^2(M[Y])^2$;
(X və U asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir).

Binominal paylanmanın dispersiyası sınaqların sayı ilə bir sınaqda hadisənin baş verməsi və verməməsi hasilinə bərabərdir:

$$D[X]=npq \quad (8)$$

Təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərinin riyazi gözləmə ətrafında səpələnmə xarakteristikalarından biri də orta kvadratik meylidir.

Tərif 4. X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası sonlu ədəd olduqda onun kvadratik kökünə X-in orta kvadratik meyli deyilir və

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]} \quad (9)$$

kimi işarə olunur.

Riyazi gözləmə və dispersiya anlayışlarının ümumiləşməsi momentlərdir.

Tərif 5. X^n təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə X təsadüfi kəmiyyətinin n -tərtibli başlanğıc momenti deyilir və

$$\upsilon_n = M[X^n] \quad (10)$$

kimi işarə olunur.

Tərif 6. *$(X-M[X])^n$* kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə X təsadüfi kəmiyyətinin n -tərtibli mərkəzi momenti deyilir və

$$\mu_n = M[(X-M[X])^n] \quad (11)$$

kimi işarə olunur.

Aydındır ki,

$$M[X]=\upsilon_1, \qquad D[X]=\mu_2$$

Təsadüfi kəmiyyətin müxtəlif tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri arasında əlaqə düsturları vardır. Məsələn,

$$\mu_2=\upsilon_2-\upsilon_1^2; \mu_3=\upsilon_3-3\upsilon_1\upsilon_2+2\upsilon_1^3;$$
$$\mu_4=\upsilon_4-4\upsilon_3\upsilon_1+6\upsilon_2\upsilon_1^2-3\upsilon_1^4.$$

Tapşırıq

Məsələ: Aşağıdakı paylanma qanunu üzrə verilmiş X diskret təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapın:

X	-4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

Cavab: *$M[X]=6$*

Məsələ: *$M[X]=2$, $M[Y]=6$* olduğunu bilərək, Z=3X+4Y düsturu ilə təyin olunan Z təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapın.

Cavab: *$M[Z]=30$.*

Məsələ: X diskret təsadüfi kəmiyyəti 3 dənə qiymət alır: $x_1=4$ qiymətini $P_1=0,5$ ehtimalı ilə, $x_2=6$ qiymətini $P_2=0,3$ ehtimalı ilə, naməlum x_3 qiymətini naməlum P_3 ehtimalı ilə alır. $M[X]=8$ olduğunu bilərək, x_3 və P_3-ü tapın.

Cavab: $x_3=21$, $P_3=0{,}2$.

Göstəriş: $P_1+P_2+P_3=1$ olmasından istifadə edin.

Məsələ: X diskret təsadüfi kəmiyyəti 3 dənə qiymət alır:

$$x_1=1, \quad x_2=2, \quad x_3=3$$

$M[X]=2{,}3$; $M[X^2]=5{,}9$ olduğunu bilərək, X-in x_1, x_2, x_3 qiymətlərini alma ehtimallarını tapın.

Həlli: Qeyd etmək lazımdır ki, X təsadüfi kəmiyyəti x_1, x_2, x_3 qiymətlərini hansı ehtimalla alırsa, X^2 təsadüfi kəmiyyəti də x_1^2, x_2^2, x_3^2 qiymətlərini həmin ehtimallar ilə alırlar. Əgər bu ehtimalları uyğun olaraq P_1, P_2, P_3 ilə işarə etsək, diskret təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinin tərifinə görə

$$M[X]=x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3=1\cdot P_1+2\cdot P_2+3\cdot P_3=P_1+2P_2+3P_3=2{,}3;$$
$$M[X^2]=x_1^2P_1+x_2^2P_2+x_3^2P_3=1^2\cdot P_1+2^2\cdot P_2+3^2\cdot P_3=P_1+4P_2+9P_3=5{,}9.$$

Digər tərəfdən $P_1+P_2+P_3=1$ olmalıdır.

Beləliklə, P_1, P_2, P_3-ü tapmaq üçün aşağıdakı xətti tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} P_1+P_2+P_3=1, \\ P_1+2P_2+3P_3=2{,}3, \\ P_1+4P_2+9P_3=5{,}9. \end{cases}$$

Bu sistemi həll edərək $P_1=0{,}2$; $P_2=0{,}3$; $P_3=0{,}5$ tapırıq.

Məsələ: X təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı sıxlıq funksiyası ilə verilmişdir:

$$\text{a)}\ p(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0<x<2 \\ 0, & x\ge 2; \end{cases}$$

$$\text{b)}\ p(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}x & 0\le x\le \pi \\ 0, & x>\pi \end{cases}$$

X-in riyazi gözləməsini tapın.

a)-nın həlli: (2) düsturuna əsasən

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{0}xp(x)dx+\int_{0}^{2}xp(x)dx+\int_{2}^{+\infty}xp(x)dx=0+\int_{0}^{2}x\cdot\frac{1}{2}xdx+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}$$

$$\Big|_0^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

Cavab: b) $\frac{\pi}{6}$.

Məsələ 39. Normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapın.

Cavab: a. ***Göstəriş:*** Normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyasının

$$P(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

düsturu üzrə təyin olduğunu nəzərə alıb, (2) düsturunda inteqralda $\frac{x-a}{\sigma}=t$ əvəzləməsindən və $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$ münasibətindən istifadə edin.

Məsələ 40. Sıxlıq funksiyası

$$P(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, x\notin[a,b]\end{cases}$$

düsturu ilə verilən müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapın.

Cavab: $\frac{a+b}{2}$.

Məsələ: X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası verilmişdir:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ \frac{x}{4}, 0 < x \le 4, \\ 1, x > 4 \end{cases}$$

Bu təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapın.

Cavab: 2. ***Göstəriş:*** *P(x)=F'(x)* düsturu üzrə sıxlıq funksiyasını tapın.

Məsələ: *X* təsadüfi kəmiyyəti

a)

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

b)

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

paylanma qanunu ilə verilmişdir. *X*-in dispersiyasını tapın.

a)-nın Həlli: Dispersiyanı tapmaq üçün (5) düsturundan istifadə edək:

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2.$$

Məlumdur ki,

$$M[X]=(-5)\cdot 0,4+2\cdot 0,3+3\cdot 0,1+4\cdot 0,2=-0,3$$

İndi isə $M[X^2]$-in tapaq. Bunun üçün X^2-nın paylanma qanununu yazaq.

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Buradan riyazi gözləmənin tərifinə görə

$$M[X^2]=25\cdot 0,4+4\cdot 0,3+9\cdot 0,1+16\cdot 0,2=15,3$$

alırıq. Yuxarıda yazdığımız düstura əsasən axtarılan dispersiyanı tapaq:

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=15,3-(-0,3)^2=15,3-0,09=15,21.$$

Cavab: b) $D[X]\approx 8,545$

EVƏ MÜSTƏQİL İŞLƏMƏK ÜÇÜN VERİLƏN MƏSƏLƏLƏR

Məsələ.1 Paylanma qanunu

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

olan təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapın.

Cavab: $M[X]=0,535$

Məsələ 2: $M[X]=5, M[Y]=3$ olduğunu bilərək, $Z=X+2Y$ düsturu ilə təyin olunan Z təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapın.

Cavab: $M[X]=11$

Məsələ 3: X diskret kəmiyyəti 3 dənə $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ qiymətlərini ala bilir. $M[X]=0,1$ və $M[X^2]=9$ olduğunu bilərək, X təsadüfi kəmiyyətinin bu 3 qiymətləri alma ehtimallarını tapın.

Cavab: $P_1=4$; $P_2=0,1$; $P_3=0,5$

Məsələ 4: Paylanma funksiyası

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le -2, \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, -2 < x \le 2, \\ 1, x > 2 \end{cases}$$

olan X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapın.

Cavab: $M[X]=0$

1.2 Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər $(-\infty)$ -dan $(+\infty)$-ya kimi ixtisarı qiymət ala bilər. Məsələn, müxtəlif idman növləri, harada kq, km, saniyə, temperatur ölçülür. Əgər təsadüfi kəmiyyət kəsilməzdir, onda onun hər konkret qiymətinə müəyyən ehtimalı mənimsəmək mümkün deyil (bu ehtimal bərabərdir sıfra). Bu halda kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin ehtimalı ixtiyarı intervala düşür.

$$\left.\begin{array}{l} P\,(x<x_1) = P_1 \\ P\,(x<x_2) = P_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ P\,(x<x_n) = P_n \end{array}\right\} \quad (11)$$

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyət verilən məhdud intervalda ($x_1<x<x_2$) müxtəlif qiymət ala bilər. Təsadüfi kəmiyyətin $x_1 \leq x \leq x_2$ intervalındakı ehtimalı axır qiymət ola bilər.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyət üçün hadisə ehtimalı $P\ (x=x_i)$ istifadə oluna bilməz.

$P\ (x<x_i)$ ehtimalından istifadə etmək olar. Burada x_i – dəyişənin qiyməti. Bu halda hadisənin ehtimalı x-dən asılı olacaq və bu asılılığı paylanma funksiyası F(x) və ya inteqral paylanma qanunu xarakterizə edir. Bu qanun təsadüfi kəmiyyəti tamamilə əhatə edir. Lakin hər bir funksiya kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası kimi istifadə oluna bilməz. O, aşağıdakı şərtləri ödəməlidir:

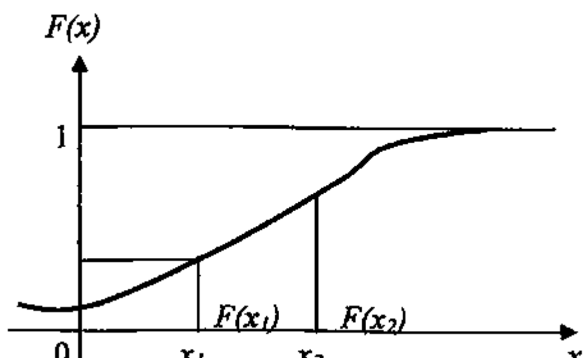
a) funksiya kəsilməz olmalıdır,

b) $x_2 \geq x_1$, $F(x_2) \geq F(x_1)$, yəni monoton artan olmalıdır,

c) şərti ödəməlidir.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = -\infty \\ 1, & x = +\infty \\ F(x), & -\infty<x<\infty \end{cases} \qquad (12)$$

Aşağıdakı qrafikada *a, b, c* şərtlərini ödəyən əyri göstərilib.



Şəkil 3.

Paylanma funksiyası ehtimalı məlum edir:

$$P(x_1<x<x_2) = F(x_2) - F(x_1) \qquad (13)$$

Qrafikdən və düsturdan görünür ki, kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin qiymətinin ehtimalı həqiqətən bərabərdir sıfıra.

Fərz edək ki,

$$x_1=x_2=x, \text{ onda}$$

$$P\,(x_1<x<x_2) = F(x) - F(x) = 0$$

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanma qanunu ehtimalın sıxlığı ilə təsvir olunur:

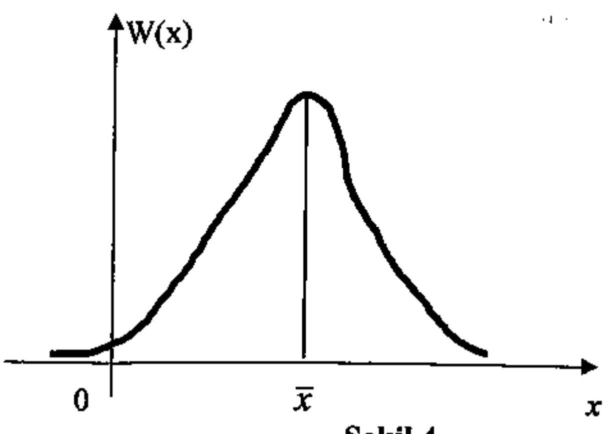
$$W(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \qquad (14)$$

Ehtimal paylanmasının sıxlığı paylanma funksiyasının təsadüfi kəmiyyətin artımın nisbətinin limitinə bərabərdir.

(14) düsturun sağ tərəfi paylanma funksiyasının törəməsidir, yəni

$$W(x) = F^I(x) \qquad (15)$$

(15) düstur əsasında paylanma sıxlığı paylanma funksiyasının törəməsi kimi təsvir etmək olar.



Şəkil 4.

(15)-cı düsturdan görünür:

$$dF(x) = W(x)dx$$

x_1-dən x_2 kimi inteqralla yanda, alınır:

$$\int_{x_1}^{x_2} dF(x) = \int_{x_1}^{x_2} W(x)dx \qquad (16)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} W(x)dx \qquad (17)$$

(13)-cü düstur əsasında (17) sol tərəfi təsadüfi kəmiyyətin $[x_1, x_2]$ intervala düşməsinin ehtimalı kimi təsvir olunur.

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} W(x)dx \qquad (18)$$

Beləliklə, paylanma funksiyasını bilərək, x – kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin $[x_1,x_2]$ intervalına düşməsinin ehtimalını (13)-cü düstur ilə hesablamaq mümkündür. Əgər paylanma sıxlığı W(x) məlumdursa, onda kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin ehtimalını (18) düstur ilə hesablamaq olar. (18) düsturdakı inteqral əyrixətli trapesiyanın sahəsi W(x) kimi təsvir olunur.

1.3 Empirik paylanma funksiyası

Hər bir x-in qiyməti üçün $X<x$ hadisənin nisbi tezliyini təyin edən. F(x) funksiyasına empirik paylanma funksiyası deyilir.

$$F(x) = \frac{n_x}{n}, \text{ burada}$$

n_x – x-dən kiçik olan variantların sayıdır,

n – seçmənin həcmidir.

Empirik paylanma funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir.

Xassə 1. Empirik funksiyasının qiymətləri [0,1] parçasına daxildir.

Xassə 2. $F(x)$ azalmayan funksiyadır.

Xassə 3. Əgər x_1 – ən kiçik, x_k – ən böyük variantdırsa, onda $x \le x_1$ olduqda $F(x)=0$ və $x<x_k$ olduqda $F(x)=1$

Məsələ1. Verilmiş seçmənin paylanmasına görə empirik paylanma funksiyasını tapın.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Həlli. Seçmənin həcmini tapaq: n=10+15+25=50

Ən kiçik variant $x_1=1$, deməli, $x\leq1$ olduqda $F(x)=0$.

$x<4$, yəni $x_1=1$ qiyməti 10 dəfə müşahidə olunmuşdur, deməli, $1<x\leq4$ olduqda

$$F(x)=\frac{10}{50}=0{,}2$$

$x<6$, yəni $x_1=1$ və $x_2=4$ qiymətləri 10+15=25 dəfə müşahidə olunmuşdur, deməli $4<x\leq6$ olduqda

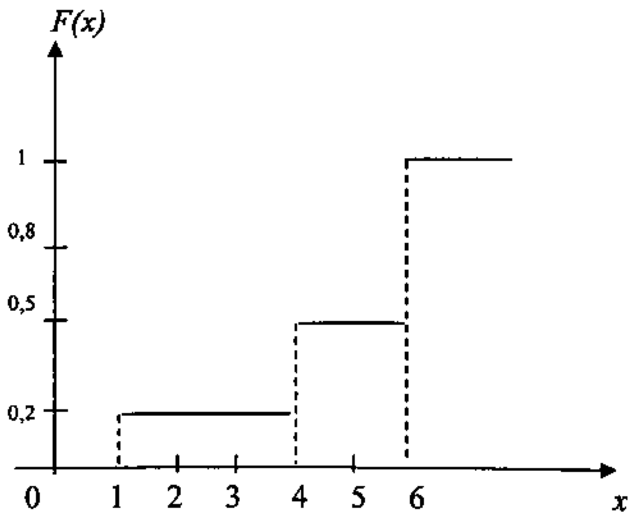
$$F(x)=\frac{25}{50}=0{,}5$$

$x=6$ – ən böyük variant olduğuna görə, $x>6$ olduqda $F(x)=1$.

Beləliklə, axtarılan empirik funksiyanı yazaq:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq1\\ 0{,}2, & 1<x\leq4\\ 0{,}5, & 4<x\leq6\\ 1, & x>6\end{cases}$$

Bu funksiyanın qrafikini quraq.



Məsələ 2. Aşağıda verilmiş seçmənin paylanmasına görə empirik paylanma funksiyasını tapın.

a)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

b)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

Məsələ 3. X – diskret təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylanma qanununa əsasən verilmişdir.

a)

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

b)

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2

Paylanma çoxbucaqlısını qurun.

Məsələ 4. X – diskret təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylanma qanunu ilə verilib.

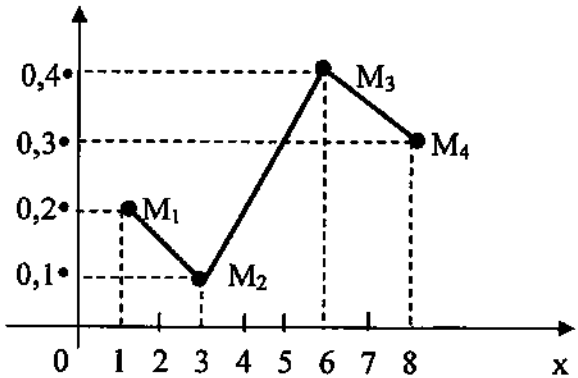
X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Paylanma çoxbucaqlısını qurun.

Həlli. Koordinat sistemində absis oxu üzərində X təsadüfi kəmiyyətinin x_i qiymətlərini, ordinat oxu üzərində isə bu qiymətləri alma ehtimallarını göstərək. Verilən qanunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

M_1 (1; 0,2), M_2 (3; 0,1), M_3 (6; 0,4), M_4 (8; 0,3).

Nöqtələri qurub və ardıcıl olaraq düz xətt parçaları ilə birləşdirək.



1.4 Variasiya sıraların əmələ gəlməsi

Bədən tərbiyəsi və idman praktikasında ən tanınmış statistika üsulu kimi orta ölçülər üsulu sayılır, bu üç əsas mərhələdən ibarətdir.

Məsələ 1. 43 yüngül atletlərin gələcək qaçışı 6 m olacaq start zamanı start reaksiyasının ölçüsü təyin edilmişdir (*san*):

1,25	1,36	1,38	1,32	1,32	1,36	1,40	1,30
1,38	1,30	1,40	1,36	1,42	1,45	1,38	1,36
1,42	1,38	1,32	1,25	1,38	1,36	1,30	1,40
1,32	1,36	1,45	1,38	1,42	1,40	1,36	1,42
1,38	1,40	1,36	1,30	1,32	1,36	1,38	1,42
1,32	1,25	1,30					

Statistik cəmlər rəqəmlərin iri massivlərini nəzərdə tutur: ilkin məlumat nə qədər çox olsa, son nəticə o dərəcədə dəqiq olur. Ümumiyyətlə, praktiki (seçmə) cəmlər 30-dan 200 vahidə qədər həcmə malikdir. Lakin idman təcrübəsində onların özünəməxsus xüsusiyyətləri var:

1. müəyyən idman növü üzrə məhdud sayda çempion olur (8-10 nəfər). Bu halda kiçik cəmlər üzrə statistik üsulları istifadə edirlər.

2. idman praktikasında yalnız idmançılar yox, halların özü də

unikal ola bilər. Çünki orta ölçülər üsulunun işləmə prinsipi həm böyük, həm də kiçik cəmlər üçün eyni qalır.

Misal 1. eyni tipli ölçülər seriyasını təşkil edir. Praktikada alınmış və yuxarıda təqdim edilmiş sistemsiz rəqəmlər qrupu sistemə çevrilməlidir, yəni bir-biri ilə əlaqədar göstəricilərin cəminə, onların xarakteristikaları sistem haqda, sonuncunun vasitəsilə isə ilkin məlumat qrupu haqda təsəvvürü yaradacaq.

Bu cür sistemin alınması məqsədilə düzlənmə əməliyyatını həyata keçirək.

Düzülüş – ədədlərin artma və ya azalma qaydasında yerləşdirilməsi əməliyyatıdır.

Misal 1. üçün ədədlərin artma üzrə düzülmüş əməliyyatı belədir:

1,25	1,25	1,25						
1,30	1,30	1,30	1,30	1,30				
1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32			
1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36
1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	
1,40	1,40	1,40	1,40	1,40				
1,42	1,42	1,42	1,42					
1,45	1,45	1,45						

İndi asanlıqla görmək olar ki, böyük cəm təhlil üçün yaramır və ona görə də təcrübədə səmərəsizdir.

Düzülmüş göstəriciləri maksimal dərəcədə sadələşdirək, hər göstəricinin miqdarını sayaq və onları sütunlara düzək:

x_i	n_i
1,25	3
1,30	5
1,32	6
1,36	9
1,38	8
1,40	5
1,42	4
1,45	3

burada x_i – variantlar, n_i – variantların tezliyi (x_i-lərin təkrar olunma sayına variantın tezliyi) deyilir.

Alınmış rəqəmlər qrupu variasiya sırası adlanır.

Variasiya sırası düzələn göstəricilərin ikili sütunu deməkdir, solda göstərici – *variant* – yerləşir, sağda isə onun miqdarı – *tezlik* – olur.

Tezliklərin yekunu *cəmin həcmi*, yəni ilkin məlumatların ümumi rəqəmi adlanır. Bütün tezliklərin miqdarı cəmin həcmini təşkil edir.

İndisə variasiya sırasının işarələrinə müraciət edək. Göstəricini hansısa bir hərflə (latın əlifbasının hərfi ilə) işarələmək adətdir, onun yanındakı i indeksi isə hazırkı qrupun göstəricilərinin çoxluğuna işarə edir; göstəricilərin hər biri icra olunmuş düzlənməyə əsasən müəyyən yeri tutur. Belə, 1,25 variantı variasiya sırasında birinci yerdədir və buna görə x_1, 1,30 variantı, x_2 1,32 variantı, x_3 və s., sırada sonuncu variant – 1,45- /x_8 uyğun olan/ x_n kimi, yəni sonuncu yerdə olan variant kimi, işarələnə bilər. Beləliklə, x_i sütununda müəyyən i sıra nömrəsinə malik olan rəqəmlər yerləşir. Ümumilikdə, bu sütunda sıra nömrələrlə fərqlənən göstəricilər – x_i yerləşir.

Variasiya sırasını yuxarıda göstəriləndən fərqli olan digər məna ölçüsü baxımından nəzərdən keçirsək, onu hərf, məsələn y_i, ilə işarələmək lazımdır. Yeni variasiya sırasının sıra nömrələri olacaq. Beləliklə, müxtəlif sıraların variant sütunları x_i, y_i, z_i və s. kimi təqdim oluna bilər.

Tezlikləri daxil edən variasiya sırasının sütunu n_i kimi işarələnir və düzlənməyə müvafiq duran tezliklərin olmasını əks edir: birinci yerdə n_1=3, ikinci yerdə n_2=5 və n_8=3 qədər; n_8, n_n kimi, yəni bu sırada sonuncu yerdə duran göstərici kimi, təqdim oluna bilər.

Göstərilmiş sıranın cəminin həcmi N=43 bir hərflə işarələnir, çünki sıra üçün heç bir sadalamaya malik olmayan cəm həcminin tək rəqəmi xarakterdir.

Tapılmış variasiya sırası üçün o da xarakterdir ki, əvvəlcə ölçülmüş göstəricilərin qrupundan fərqli olaraq sıra riyazi sistemini, yəni bir-birilə əlaqədar rəqəmlər qrupunu təşkil edir.

Bu əlaqə asanlıqla tezliklərin məcmusunu təşkil edən cəmin həcmi vasitəsilə müşahidə olunur. Başqa sözlərlə, sırada duran tezliklər ixtiyari deyil və ümumilikdə cəmin həcmini göstərir. Təqdim olunmuş sırada riyazi kəmiyyətlərdən istifadə edilir.

- orta ölçü $\bar{x}$;
- dispersiya σ^2;
- orta kvadratik yayınma σ;
- variasiya əmsalı V.

Sıranın digər xarakteristikaları da mövcuddur, lakin onlar burada nəzərdən keçirilmir, çünki BTİ tədqiqatlarında özünün praktiki tətbiqini tapmayıb.

$\bar{x}$, σ^2, σ və V göstəricilərinin anlayışlarına keçək.

Orta ölçü $\bar{x}$ – bütün sıra üçün ən tipik və xarakter sayılan orta səviyyəsinin göstəricisidir. Bu formula ilə təyin edilir:

$$\bar{x} = \sum_{1}^{n} x_i n_i / n, \qquad (1)$$

x_i – sırasının variantı, n_i – sırasının tezliyi, n isə cəmin həcmidir.

$\sum$ cəmi qismində onun sağında dayanan məlumatların cəmləşdirilməsi çıxış edir. $\sum$ yuxarıda və aşağıda göstəriciləri cəmləşdirmənin hansı rəqəmdən başlanmasına və ona hansı göstəricilərlə bitirməsinə işarə edir. Belə, kı $\sum_{1}^{7} x_i$ göstərir ki, 1-dən 7-yə qədər olan bütün x-ləri toplamaq lazımdır. $\sum_{1}^{n} x_i$ 1-cidən sonuncu göstəriciyə qədər olan bütün x-lərin toplanmasını göstərir.

Beləliklə, (1) formulası üzrə hesablamalar (1) əməllərin aşağıdakı qaydasını nəzərdə tutur:

1. x_i-nin hər variantını müvafiq n_i tezliyinə vururlar.
2. bütün alınmış hasilləri toplayırlar, yəni $\sum_{1}^{n} x_i n_i$

3. alınmış rəqəmi $\sum_{1}^{n} x_i n_i$ cəmin həcmini n-ə bölürlər.

Əməlin göstəriciləri ilə işin rahatlığı və əyaniliyi üçün cədvəl tərtib etmək zəruridir, çünki birincidən sonuncu rəqəmə qədər seçilən $x_i n_i$ toplanmalıdır.

Misal 1-in göstəricilərindən istifadə etməklə, 1 cədvəlini tərtib edək.

Cədvəl 1.

№	x_i	n_i	$x_i n_i$
1	1,25	3	3,75
2	1,30	5	6,50
3	1,32	6	7,92
4	1,36	9	12,14
5	1,38	8	11,04
6	1,40	5	7,00
7	1,42	4	5,68
8	1,45	3	4,35
Yekun	-	**43**	**58,48**

Orta ölçü formulaya (1) əsasən təyin edilir:

$$\bar{x} = \sum_{1}^{n} x_i n_i / n, = 58{,}48 / 43 = 1{,}36 \quad (n=43)$$

Diqqət yetirək ki, *hesablamaların dəqiqliyi və ölçülmələrin dəqiqliyi üst-üstə düşməlidir*: ölçülmüş qiymətlər yüzdə tama qədər dəqiqliyi malikdirsə, onda ara hesablamaları və yekun nəticə yüzdə tama qədər dəqiqliklə təqdim olunmalıdır.

Beləliklə, variasiya sırası ilə təqdim olunmuş göstəricilər bütün sıraya xas olan qiymətə $\bar{x} = 1{,}36$ sarı malikdir.

Variasiya sırasının digər göstəricisi dispersiyadır σ^2.

Dispersiya σ^2 dəyişkənliyə, yəni ilkin məlumatların orta ölçüyə nisbətdə seyrəlməsinə işarə edir (kvadratda).

Dispersiya bu formula ilə təyin edilir:

$$\sigma^2 = \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 n_i / n \qquad (2)$$

σ^2 hesablanması üçün bu əməlləri həyata keçirmək lazımdır:

1. orta ölçü $\bar{x}$ təyin edirlər

2. hər variantdan orta ölçünü çıxırlar: $x_i - \bar{x}$

3. alınmış fərqi kvadrat qüvvətinə salırlar: $(x_i - \bar{x})^2$

4. fərqlərin kvadratlarını müvafiq tezliklərə vururlar:

$$(x_i - \bar{x})^2 n_i$$

5. $\sum^{n} (x_i - \bar{x})^2 n_i$ hasillərin cəmini müəyyən edirlər.

6. Alınmış nəticəni N cəmin həcminə bölürlər.

İlkin məlumatların vasitəsilə 2 cədvəlini tərtib edək.

Cədvəl 2

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	1,25	3	3,75	- 0,11	0,0121	0,0363
2	1,30	5	6,50	- 0,06	0,0036	0,0180
3	1,32	6	7,92	- 0,04	0,0016	0,0096
4	1,36	9	12,14	0,00	0,0000	0,0000
5	1;38	8	11,04	0,02	0,0004	0,0032
6	1,40	5	7,00	0,04	0,0016	0,0080
7	1,42	4	5,68	0,06	0,0036	0,0144
8	1,45	3	4,35	0,09	0,0081	0,243
Yekun	-	**43**	**58,48**	-	-	**0,1138**

Dispersiyanın təyini zamanı 5-ci sütun böyük əhəmiyyətə malikdir, çünki onun daxilində hər variantdan orta ölçü çıxarılır. Beləliklə, 5-ci sütunun göstəriciləri ona işarə edir ki, hər konkret variant orta qiymətlə əlaqədədir. Orta qiymət düzgün təyin edilibsə, mənfi ölçülərin cəmi (misal 1-də bu 0,21) müsbət ölçülərin cəminə, yəni 0,21 bərabər olmalıdır.

$$\bar{x}=58{,}48/43=1{,}36; \ \sigma^2=0{,}1138/43=0{,}0026$$

Ümumilikdə, 5-ci sütunun məlumatları göstərir ki, bütün variantlar orta qiymətə nisbətində seyrəlir.

Orta ölçünü hesablayarkən, ilkin məlumat qrupunu ən tipik və xarakterik bir ölçü ilə əvəz etdilər. İndi seyrəlmənin bütün göstəricilərini bir göstərici ilə – seyrəlmənin bütün göstəricilərin orta ölçüsü ilə əvəz etmək lazımdır. Lakin düzgün hesablama aparılsa, mənfi göstəricilərin orta cəmi müsbət göstəricilərin cəminə bərabər olmalıdır, yəni orta ölçü hesablanarkən onların cəmi *0* bərabər olmalıdır. Buna görə də bütün nişan göstəricilərini kvadrata yüksəltmək, sonra isə bütün kvadratların orta ölçüsünü tapmaq lazımdır.

Məhz bu məqsədlə 6-cı sütunda fərqlərin kvadratları yerləşir $(x_i - \bar{x})^2$, 7-ci sütunda isə tezliklərə hasili aralarında orta ölçünün təyini məqsədilə verilib.

Beləliklə, dispersiya bütün $(x_i - \bar{x})^2$ orta ölçüsünü təşkil edir. Bu ölçü ilkin məlumatların orta ölçüyə nisbətdə seyrəlməsinə işarə edir (kvadratda).

Ona da diqqət yetirək ki, sıranın orta ölçüsü ilkin ölçülərin aparıldığı eyni vahidlərdə alınıb (1 misalında – saniyələrdə (san)), dispersiya isə bu ölçülərin kvadratında hesablanıb. Bu fakt alınmış göstəricilərin müqayisəsini çətinləşdirir.

Müqayisəni icra etmək üçün variasiya sırasının növbəti parametrinin – ***orta kvadratik yayılmasının σ***- təyininə keçək. Bunun üçün dispersiyadan kvadrat kökünü çıxardıb, yalnız müsbət kökü nəzərə almaq lazımdır:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (3)$$

Yuxarıda verilən sıra üçün orta kvadrat yayınma belədir:

$$\sigma = \sqrt{0{,}0026} = 0{,}05san$$

İndi isə variasiya sırasının iki vacib parametrini $\bar{x}$ və σ birləşdirək: $\bar{x} \pm \sigma$.

Variasiya sırası bu ölçülərlə təqdim oluna bilər:

$$\bar{x} \pm \sigma = (1{,}36 \pm 0{,}05)\text{san}$$

Seyrəlmənin xarakterini təyin etmək üçün variasiya sırasının parametri – ***variasiya əmsalını*** istifadə edirlər, o, bu formula ilə hesablanır:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (4)$$

Formulanın vasitəsilə (4) orta ölçüdən seyrəlmə əmsalı σ hansı faizini təşkil etdiyini müəyyənləşdirən variasiya əmsalının qiymətini tapırıq. Belə ki, misal 1.

V=0,05/1,36*100%=3,68%,

bu o deməkdir ki, orta ölçü ətrafında göstəricilərin səpələnməsi 3,68% təşkil edir.

Variasiya əmsalını V ilk dəfə biologiya elminin təcrübəsində istifadə olunub. Bu elm variasiya əmsalı 10-15% artıq olmayan qrupu eyni cins sayır. Deməli, V-nin böyüklüyü yığımın müxtəlifliyini göstərir.

Bədən tərbiyəsi və idman təcrübəsində bu cür meyar yoxdur, lakin variasiya əmsalı tez-tez istifadə olunur. Belə ki, məsələn, variasiya əmsalı sınaqdan keçirilənin kvalifikasiyasına işarə edə bilər. Məlumdur ki, yüksək ixtisaslı idmançılar çox yaxın nəticələr göstərir, yəni onların göstəricilərinin seyrəlməsi azdır və variasiya əmsalı yüksək olmalı deyil, halbuki yüksək olmayan kvalifikasiyalı idmançıların çox göstəriciləri fərqlənir, buna görə də onların variasiya əmsalları daha yüksək olmalıdır.

Məsələ 2 Cədvəl 3-də on gəncin 200 m-lik qaçışın nəticələrini (san) nəzərdən keçirək.

Gənclərin qaçış nəticələrinin emalı

Cədvəl 3

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - x)^2$	$(x_i - x)^2 n_i$
1	28,0	1	28,0	0,5	0,25	0,25
2	28,5	1	28,5	$1,\bar{0}$	$1,0\bar{0}$	$1,0\bar{0}$
3	27,8	3	83,4	0,3	00,09	0,27
4	27,4	2	54,8	-0,1	0,0	0,02
5	27,0	2	54,0	-0,5	0,25	0,50
6	26,8	1	26,8	00,7	0,49	0,49
Yekun	-	**10**	**275,5**	-	-	**2,53**

Orta qiyməti, dispersiyanı, orta kvadratik yayınma və variasiya əmsalını təyin edək:

$$\bar{x} = 275,5/10 = 27,55 \approx 27,5\text{san}; \qquad \sigma^2_x = 2,53/10 \approx 0,253 \text{ san}^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{0,253} = 0,5san; \qquad V_x = 0,5/27,5 * 100\% = 1,8\%$$

İndi isə yüksək dərəcəli idmançıların nəticələrinə baxış keçirək (cədvəl 4).

Orta qiyməti, dispersiyanı, orta kvadratın yayınma və variasiya əmsalını təyin edək:

$$\bar{y} = 213{,}4/10 = 21{,}34 \approx 21{,}3 san;$$

$$\sigma^2{}_x = 02{,}53/10 \approx 0{,}253 san^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}253} = 0{,}5 san;$$

$$V_x = 0{,}2/21{,}3 * 100\% = 0{,}94\% \approx 1\%$$

Yüksək dərəcəli idmançıların qaçışının nəticələri

Cədvəl 4

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	21,0	1	21,0	-0,3	0,9	0,09
2	21,2	2	-0,1	-0,1	0,01	0,02
3	21,3	3	0,0	0,0	0,00	0,00
4	21,4	2	0,1	0,1	0,01	0,02
5	21,6	1	0,3	0,3	0,09	0,09
6	21,7	1	0,4	0,4	0,16	0,16
Yekun	-	**10**	**213,4**	-	-	**0,38**

Beləliklə, variasiya əmsalı, dispersiya və orta kvadratik yayınma vasitəsilə idmançıların nəticələrini təhlil edib bu nəticəyə gəlmək olar ki, ilkin göstəricilərin onlara nisbətdə seyrəlməsi xeyli azdır, deməli, idmançıların ixtisası da daha yüksəkdir.

Variasiya əmsalı faizlərlə nisbi rəqəmlə ifadə olunur. Bu isə göstəricilərin müxtəlif məfhumlarla müqayisə etmək imkanını yaradır.

§2. Empirik göstəricilərin cədvəl şəkilində təsviri

2.1. Variasiya siralarının növləri və onların qrafik təsviri

Əsas *variasiya sıraları* 3 növdə olur.

a) sadə düzlənmiş; b) diskret; c) intervallı

Yuxarıdakı misallar diskret sıraların təzahürüdür. Diskret sıralarda variantlar bir rəqəmlə ifadə olunur.

43 yüngül atletlərdə start reaksiyasının qiymәti (san)

Cədvəl 5.

№	x_i	n_i
1	1,25	3
2	1,30	5
3	1,32	6
4	1,36	9
5	1,38	8
6	1,40	5
7	1,42	4
8	1,45	3
Yekun	-	**43**

8 yüngül atletlərdə start reaksiyasının qiymәti (san)

Cədvəl 6

№	x_i	n_i
1	1,25	1
2	1,30	1
3	1,32	1
4	1,36	1
5	1,38	1
6	1,40	1
7	1,42	1
8	1,45	1
Yekun	-	**8**

Hər varianta yalnız bir dəfə rast gəlinərsə, sıra sadə düzülmüş adlanardı.

Sadə düzlənmiş sıra adətən yalnız variantlar (cədvəl 7.) şəklində təqdim olunur və sıranın parametrlərinin sadə təyin formasına malikdir. Belə, cədvəl 7-də yuxarıda verilən sıra nəzərdən keçirilir.

$\bar{x}$, σ^2, σ və V parametrlərini təyin edək:

$$\bar{x}=10,88/8=1,36; \qquad \sigma^2=0,0310/8=0,0038$$

$$\sigma=\sqrt{0,0038}=0,06 san$$

$$V=0,06/1,36*100\%=4,4\%$$

$$\bar{x}\pm\sigma=1,36\pm0,06$$

Yüngül atletlərdə start reaksiyasının emalı (san)

Cədvəl 7

№	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1,25	-0,11	0,0121
2	1,30	-0,06	0,0036
3	1,32	-0,04	0,0016
4	1,36	0,00	0,0000
5	1,38	0,02	0,0004
6	1,40	0,04	0,0016
7	1,42	0,06	0,0036
8	1,45	0,09	0,0081
Yekun	**10,88**	-	**0,0310**

Diskret sıradan başqa, *interval sırası* da mövcuddur, burada hər variant interval şəklində ifadə olunur. İntervalın ölçüsü könüllü seçilə bilər: interval nə qədər böyük olsa, ilkin məlumatı təqdim edən sıranın göstəriciləri daha az dəqiqdir. Bir qayda olaraq, interval sırası diskret və ya sadə düzlənmiş sıranın dəyişdirilməsi yolu ilə alınır. Məsələn, k=0,05 interval vasitəsilə cədvəl 1.5-də verilən diskret sıranı interval sırasına çeviririk (cədvəl 8).

Cədvəl 8

№	x_i	n_i
1	1,25...1,30	8
2	1,30...1,35	6
3	1,32...1,40	22
4	1,40...1,45	7
Yekun	-	**43**

Bu cür dəyişiklik üçün birinci varianta intervalın qiymətini 1,25±0,05 əlavə etmək lazımdır ki, intervalın yuxarı həddi 1,30 alınsın. Sonra alınmış rəqəmə ardıcıl surətdə sonuncu interval sonuncu variantı daxil edənə qədər intervalın qiyməti əlavə olunur. Sərhədyanı qiymətlər qəbul olunmuş şərtdən asılı olaraq keçmiş və ya növbəti intervala aid edilə bilər. İntervalları əmələ gətirdikdə, onların hər birinə müvafiq tezlik n_i daxil etmək lazımdır ki, ümumilikdə bütün tezliklər cəmin həcmini təşkil etsin; məsələn, misal 1.1-də n=43. Məsələn, k=0,10 olanda cədvəl 1.6. üçün 9. cədvəlində təqdim edilmiş sıranı əldə edəcəyik.

k=0,10 olanda interval sırası

Cədvəl 9

№	x_i	n_i
1	1,25...1,35	14
2	1,35...1,45	29
Yekun	-	**43**

Daha az interval daha ətraflı sıranı verir, məsələn, k=0,03 olanda cədvəl 10-da verilən sıranı alırıq.

Beləliklə, interval sıra bir neçə cür olur.

Sıraların qrafiki təsviri 2 cür olur: 1) poliqon; 2) histoqram.

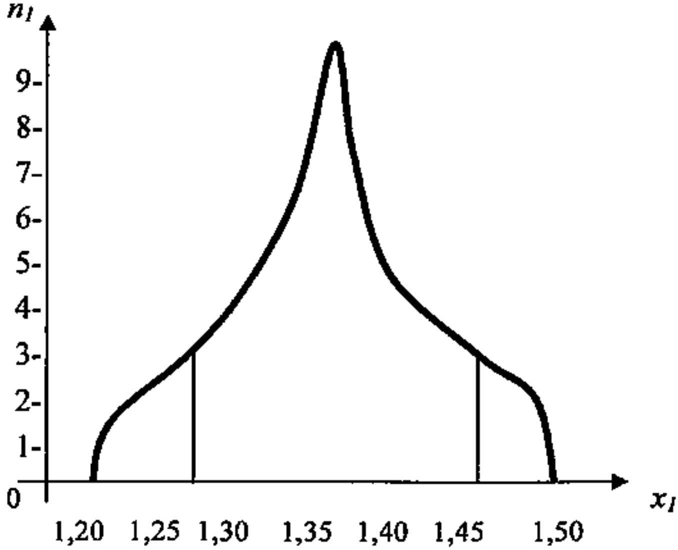
Diskret sıranı poliqon əks edir. Cədvəl 5-də verilən göstəricilər üzrə tərtib olunan poliqonu nəzərdən keçirək (şək.1.)

Şəkil 2-də histoqramı (sütunlu diaqrammanı) cədvəl 8-də verilən göstəricilər əsasında tərtib olunmuş interval sırası təqdim edir.

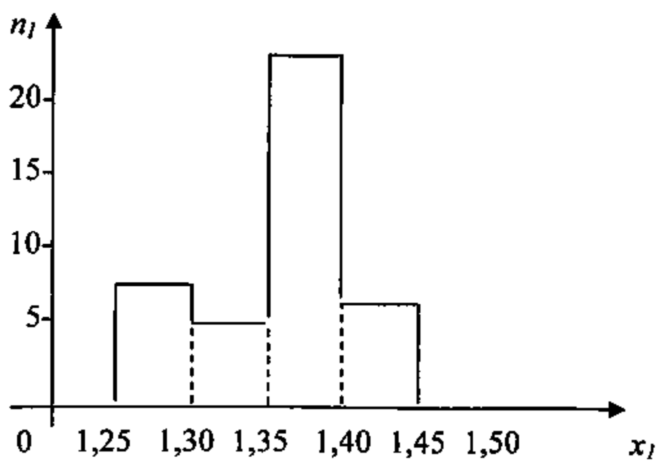
k=0,03 olanda interval sırası

Cədvəl 10

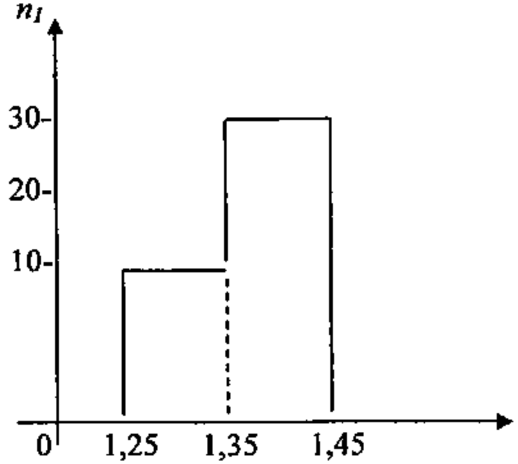
№	x_i	n_i
1	1,25...1,28	3
2	1,28...1,31	5
3	1,31...1,34	6
4	1,34...1,37	9
5	1,37...1,40	13
6	1,40...1,43	4
7	1,43...1,46	3
Yekun	-	**43**



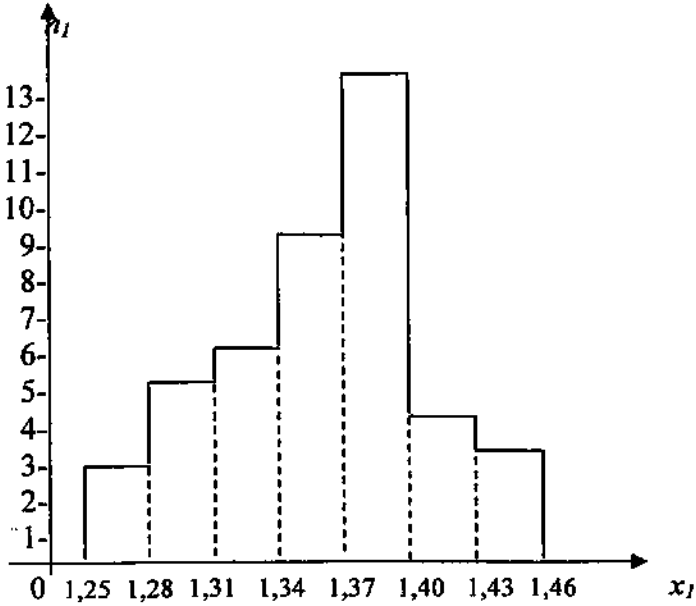
Şəkil 1. Poliqon (cədvəl 5 bax)



Şəkil 2. Histoqram (cədvəl 8. bax)



Şəkil 3. Histoqram (cədvəl 9. bax)



Şəkil 4. Histoqram (cədvəl 10. bax)

İnterval sırasının əsasında və cədvəl 1.9 verilən göstəricilər üzrə tərtib olunmuş histoqram 1.3 şəklində nəzərdən keçirilir.

Şəkil 1.4-də interval sırasının əsasında və cədvəl 1.10-da verilən göstəricilər üzrə tərtib olunmuş histoqram göstərilir.

İnterval sırası diskret sırasına çevrilə bilər, bunun üçün intervalın ortasına diskret sırasının variantı olacaq uyğun rəqəmi təyin etmək lazımdır.

2.2. Riyazi statistika metodlari vasitəsi ilə idman məsələlərinin həlli. Variasiya sırasının tərtibi və qrafiki göstərilməsi

Hər hansı göstəricini ölçərkən və ya müşahidə prosesində ədədlər cərgəsi alınır.

Ədədi nəticələrin tam ədədlər vasitəsi ilə ifadəsinə diskret deyilir, məsələn, vurulan və ya ötürülən topların sayı.

Kəsilməz fasiləsiz ədədlər isə ədədlərin kəsirlərlə qeyd olunmasına deyilir, məsələn, məsafənin keçilmə vaxtı, hərəkətin sürəti, reaksiya müddəti.

Ölçü nətcələrin təsadüfi ədədlərlə verilmiş cərgəsinə **seçmə cəm** deyilir.

Öyrənilən seçmə cəmlərin bütün kəmiyyətlərinin məcmusu **baş cəm** adlanır.

Müxtəlif göstəricilərin ölçülməsi nəticəsində çoxlu rəqəmlər alınır. Seçmənin həcmi böyük olduğda onu intervallara bölürük. İntervalların sayını K hərfi ilə işarə edirik və aşağıdakı düstur ilə hesablayırıq:

$$k = 1 + 3{,}3 \cdot \lg n,$$

burada n – seçmənin həcmidir,

k – intervalın sayı.

Ən böyük və ən kiçik ölçmələr arasındakı fərqə **variasiya genişliyi** deyilir.

$$R = X_{\max} - X_{\min},$$

burada R – variasiya genişliyi,

$X_{\min}$ – variantların ən kiçik qiyməti,

$X_{\max}$ – variantların ən böyük qiyməti.

Hər intervalda seçmənin eyni rəqəmlərin təkrarı **intervalın tezliyi** adlanır.

Ən böyük və ən kiçik variantlar arasında olan fərqin intervallar sayının nisbətnə **intervalın addımı** deyilir.

İntervalın addımı h hərfi ilə işarə edilir:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{R}{k},$$

R – variasiya genişliyi,

k – intervalın sayı.

Variantların tezliyinin göstərilməsi ilə onların qruplaşdırılması **variasiya sırası** adlanır.

Eyni cinsli yığımın tərkibindəki əlamətin fərdi qiymətlərinin müxtəlifliyi **əlamətin variasiyası** adlanır. Əlamətin variasiyası dedikdə, əlamətin dəyişməsini başa düşmək lazımdır. Əlamətin variasiyası müxtəlif amillərin birgə təsiri nətcəsində baş verir.

Tutaq ki, x-in miqdar əlamətlərini (diskret və ya kəsilməz) öyrənmək üçün həcmi n olan ümumi yığımdan $x_1, x_1, \ldots x_k$ seçmə ayrılmışdır. X əlamətinin müşahidə olunduğu x_i qiymətlərinə **variantlar** deyilir.

Variasiya sırasının x_i variantlar və onlara uyğun n_i tezlikləri (bütün tezliklərin cəmi seçmənin həcminə bərabərdir) və ya W_i nisbi tezlikləri (nisbi tezliklərin cəmi vahidə bərabərdir) cədvəlinə **seçmənin statistik paylanması** deyilir. Seçmənin statistik paylanmasının intervallar ardıcıllığı və onlara uyğun tezlikləri şəklində də vermək olar.

Seçmə tezliklərin paylanması:

x_i	2	5	7	11	15	18
n_i	1	3	5	2	6	3

burada x_i – variantların qiymətləri,

n_i – variantların tezlikləri seçmənin həcmi $n = 20$.

Nisbi tezliklərin paylanması

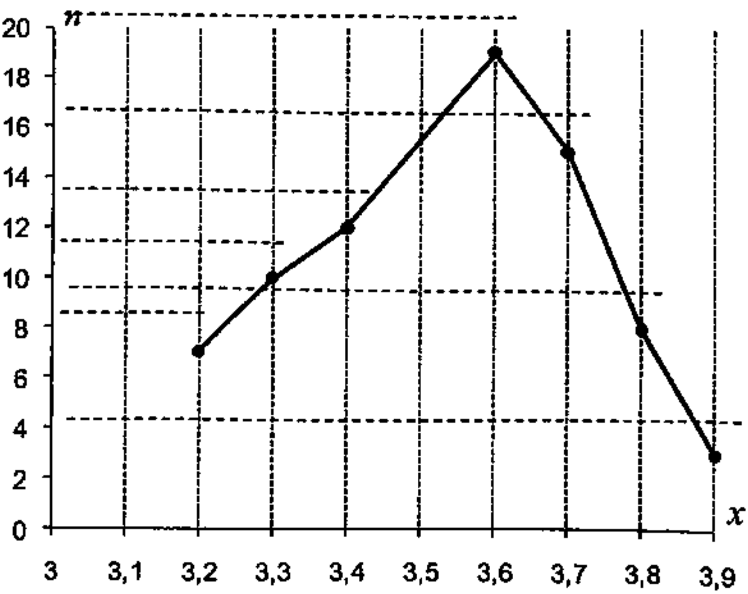
x_i	2	5	7	11	15	18
W_i	0,05	0,15	0,25	0,1	0,3	0,15

Empirik paylanmanı qrafiki şəkildə poliqon, histoqramma və kumulyata qrafikləri kimi təsvir etmək olar.

Paylanma poliqonu. Bu qrafik ölçü nəticələrinə əsasən dekort koordinat sistemi üzərində qurulur.

Absis oxu (*OX*) üzərində ölçülər nəticəsində alınmış ədədlər nöqtələr şəklində qeyd olunur. Ordinat oxu (*OY*) üzərində isə ədədlərin tezliyi yerləşdirilir.

Misal 1: Tutaq ki, uzunluğa tullananların yarışı zamanı aşağıdakı nəticələr alınmışdır: 3,20 3,30 3,40 3,60 3,70 3,80 3,90. Bu ədədlərin tezliyi aşağıdakı kimi olmuşdur: 7, 10, 10, 12, 19, 15, 8, 3. Alınmış nətcələr əsasında paylanma poliqonu qrafikini qururuq. Alınan əyri paylanma poliqonu qrafiki adlanır.

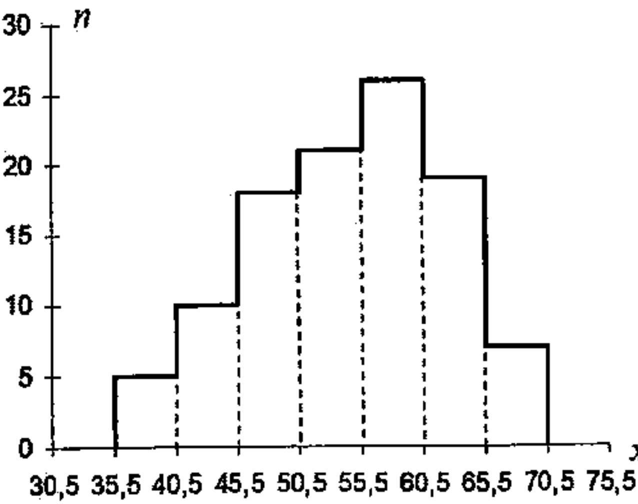


Paylanma histoqramı. Bu qrafik da paylanma poliqonu kimi dekart koordinat sistemi üzərində qurulur, ancaq fərqi ondan ibarətdir ki, ölçü nəticələri müəyyən intervallarla alındıqda qurulur.

Histoqrammanı almaq üçün absis oxunda (OX) hər bir intervalın üzərində hündürlüyü uyğun tezliyə mütənasib olan düzbucaqlılar qururuq.

Misal 2 Tutaq ki, ölçmə nəticəsində alınan ədədlər intervallarla verilib

I. 35,5 - 40,5
II. 40,5 – 45,5
III. 45,5 – 50,5
IV. 50,5 – 55,5

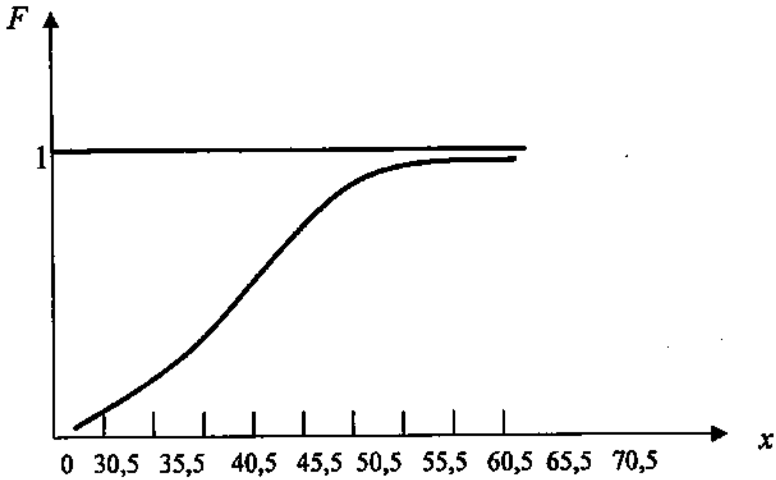


V. 55,5 – 60,5
VI. 60,5 – 65,5
VII. 65,5 – 70,5

Həmin intervallarda ədədlərin tezliyi:
I. – 5 Alınmış qrafik paylanma histoqramı adlanır.
II. – 10
III. – 18
IV. – 21
V. – 26
VI. – 19
VIII. – 7

Kumulyata. Bu qrafik da dekart koordinat sistemində qurulur. Ordinat oxu üzərində cəm tezlikləri qeyd olunur, absis oxunda isə – ölçü zamanı alınan nəticələr intervallar şəklində.

Alınan əyriyə kumulyata deyilir.



Ölçü nəticələrin qrafiki təsviri onların riyazi analizini asanlaşdırır və bəzi qanunlıqları aşkara çıxarmağa imkan yaradır.

Məsələ 1: Bir qrup şagırd idman dərsində topu uzağa ataraq aşağıdakı nəticələri göstəriblər:

18,2;	20,1;	19,5;	19,4;	18,0;	17,2;	17,8;	17,5;	17,7;
20,3;	20,5;	21,6;	23,7;	25,9;	14,0;	14,5;	13,5;	15,0;
15,0;	15,5;	16,5;	15,5;	12,5;	12,0;	15,5;	16,8;	12,0;
10,5;	9,5;	17,5;	$n = 30$					

Variasiya sırasını tərtib edin və paylanma qrafiklərini qurun.

Həlli: Ölçmə nəticəsində alınan nəticələri (variantları) ən kiçik variantdan başlayaraq artma qaydasında bir birinin ardınca yazırıq.

9,5	10,5	12,0	12,0	12,5	13,5	14,0	14,5	15,0
15,0	15,5	15,5	15,5	16,5	16,8	17,2	17,5	17,5
17,7	17,8	18,0	18,2	19,4	19,5	20,1	20,3	20,5
21,6	23,7	25,9						

Variasiya genişliyini hesablayaq

$$x_{min} = 9,5; \qquad x_{max} = 25,9$$

$$R = x_{max} - x_{min} = 25,9 - 9,5 = 16,4$$

Sıranı intervallara bölürük. İntervalların sayını

$K = 1 + 3,3 \cdot \lg n$ düsturu ilə tapırıq.

$k = 1 + 3,3 \cdot \lg 30 = 1 + 3,3 \cdot 1,48 = 5,88 \approx 6$

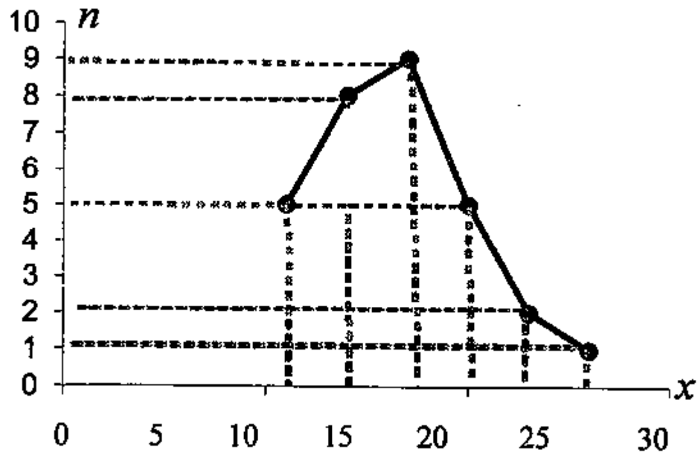
İntervalın addımı

$$h = \frac{R}{k} = \frac{16,4}{6} = 2,73 \approx 3$$

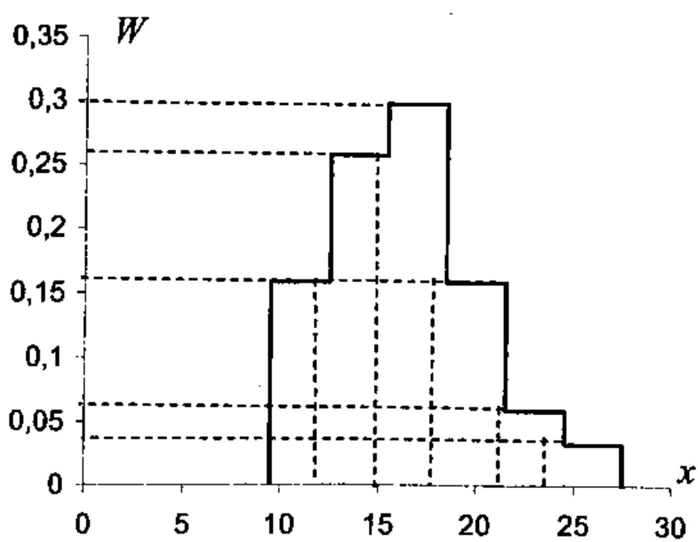
Hesabladığımız nəticələr əsasında cədvəl qururuq

№ inter.	İntervallar	İntervalın orta qiyməti	Tezlik n_i	Nisbi tezlik $W = \frac{n_i}{n}$	Cəm tezliyi $F = \sum W_i$
1.	9,5 – 12,5	11	5	0,16	0,16
2.	12,5 – 15,5	14	8	0,26	0,42
3.	15,5 – 18,5	17	9	0,30	0,72
4.	18,5 – 21,5	20	5	0,16	0,88
5.	21,5 – 24,5	23	2	0,06	0,94
6.	24,5 – 27,5	26	1	0,033	0,973

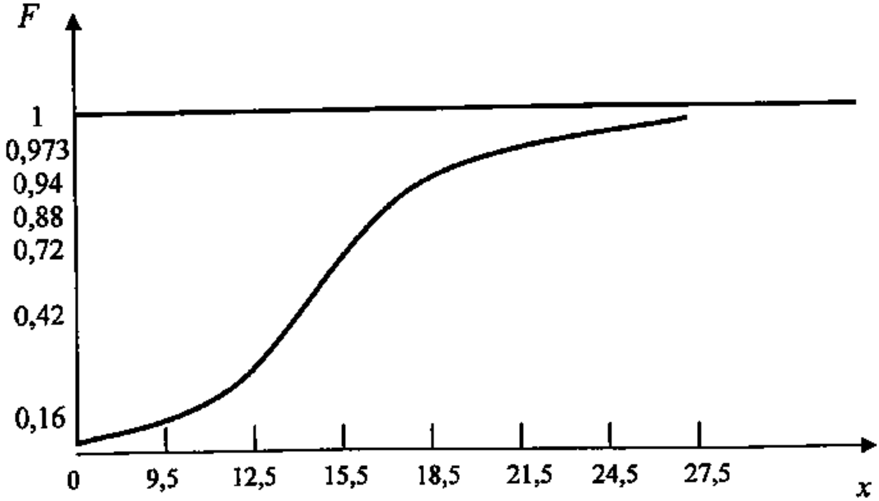
Cədvəlin 3-cü və 4-cü sütunları əsasında paylanma poliqonu qrafikini qururuq



Cədvəlin 2-ci və 5-ci sütunları əsasında paylanma histoqram qrafikini qururuq.



Cədvəlin 2-ci və 6-ci sütunları əsasında kumulyata qrafikini qururuq.



Məsələlər:

1. Konkisürən idmançıların boyu

192,	170,	181,	170,	184,	180,	175,	185,	180,	162,	172,	180,	182,
176,	167,	170,	182,	172,	182,	184,	172,	177,	173,	173,	183,	179,
184,	175,	177,	169,	170,	168,	180,	176,	177,	173,	168,	169,	176,
182.	$n=40$,		$\lg 40 = 1{,}6$									

Variasiya sırasını tərtib edin və paylanma funksiyanın qrafiklərini qurun.

2. Hündürlüyə tullanmada nəticələr göstərilib. Variasiya sırasını tərtib edin və qrafikləri qurun

175,	195,	186,	190,	192,	185,	160,	175,	180,	185,	165,
170,	172,	180,	170,	168,	170,	172,	172,	175,	174,	178,
180,	190,	184,	186,	187,	166,	170,	172,	180,	184,	180,
182,	174,	172,	170,	166,	170,					
172.	$n=40$,		$\lg 40 = 1{,}6$							

3. Məktəblilər hündürlüyə tullanankən aşağıdakı nəticələr göstəriblər.

30,	32,	33,	37,	40,	41,	34,	39,	38,	35,	40,	42,	39,	37,	36,	28,	30,	34,	39,
37,	40,	41,	40,	38,	33,	39,	41,	37,	36,	28.								
$n=30$,		$\lg 30 = 1{,}48$																

Paylanma funksiyasının qrafiklərini qurun.

4. 100 m qaçışda aşağıdakı nəticələr göstərilib (san):

10,5	12,0	10,7	10,6	11,0	10,8	10,7	11,1	11,3	10,8
11,2	11,8	11,2	10,9	11,1	10,8	10,6	11,0	11,1	10,2

Paylanma funksiyanın qrafiklərini qurun

$n = 20, \quad \lg 20 = 1{,}30$

5. Aşağıdakı verilmiş göstəricilər üçün variasiya sırasını düzün və qrafiki təsvir edin.

36	70	74	69	64	69	55	56	69	35	36	
35	39	38	37	38	37	40	39	41	44	43	
42	40	44	42	44	40	45	44	49	44	42	
49	48	45	60	50	54	48	53	52	61	64	62
$n = 55$,	$\lg 55 = 1{,}74$										

6. Yadro itələmədə idmançılar aşağıdakı nəticələri göstəriblər:

10,06	9,73	11,05	11,60	9,95	10,40	10,07	10,89	9,47
9,59	7,00	8,20	8,56	8,12	11,60	10,85	10,40	11,06
9,45	10,60							
$n = 20$,	$\lg 20 = 1{,}30$							

Paylanma funksiyanın qrafiklərini qurun.

7. İdmançıların boyu:

175	186	191	180	183	185	194	191	180	175	179	180
185	190	191	195	174	176	180	184	190	197	183	191
180	198	186	184	190	181						
$n = 30$,	$\lg 30 = 1{,}48$										

Paylanma funksiyanın qrafiklərini qurun.

8. Uzunluğa tullanmada aşağıdakı nəticələr göstərilib:

150	165	162	169	158	155	169	175	172	170
174	169	168	155	153	165	179	180	162	167
155	169	164	173	175					
$n = 25 \quad \lg 25 = 1{,}39 \approx 1{,}4$									

Paylanma funksiyanın qrafiklərini qurun.

9. 100 m məsafiyə üzərək idmançılar aşağıdakı nəticələri göstəriblər. Göstərilən nəticələr üçün variasiya sırasını tərtib edin və paylanma funksiyanın qrafiklərini qurun.

1,31	1,27	1,30	1,25	1,39	1,31	1,30	1,29	1,29	1,31
1,35	1,27	1,28	1,40	1,29	1,44	1,31	1,34	1,35	1,44
1,36	1,27	1,30	1,31	1,30	1,38	1,40	1,27	1,29	1,31
1,33	1,29	1,40	1,44	1,28	1,31	1,35	1,27	1,36	1,29
$n = 40$ $\lg 40 = 1,6$									

10. Məktəblilərin hündürliyə tullanma nəticələrini variasiya sırası şəklində göstərin və paylanma qrafiklərini təsvir edin.

75	70	79	73	70	85	80	82	71	90	78	82	80
68	75	68	72	75	79	76	70	72	74	76	72	82
80	69	74	83									
$n = 30$ $\lg 30 = 1,48$												

2.4. Paylanma sırasının ehtimal xarakteristikalarının hesablanması

Ölçü nəticələrin təsadüfi xətasını qiymətləndirmək üçün eyni bir obyektin, eyni bir cihazla, eyni bir şəraitdə bir neçə dəfə təkrar ölçüsü aparılır. Bundan sonra statistiki hesablama üsullarından istifadə edərək nəticələr analiz edilir. Statistik analiz üçün bir sıra riyazi kəmiyyətlərdən istifadə edilir: orta hesab kəmiyyəti, moda, mediana, dispersiya, orta kvadratik paylanma və s.

Orta hesab kəmiyyəti $(\overline{X})$– ilə işarə edilir. Orta hesab kəmiyyətini tapmaq üçün yığımda iştirak edən bütün variantların cəmini həmin variantların sayına bölmək lazımdır.

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Məsələn, tutaq ki, ölçmə apararaq aşağıdakı nəticələr alınmışdır

$X_1 = 1,27$ $X_2 = 1,33$ $X_3 = 1,29$ $X_4 = 1,31$ $X_5 = 1,30$

Tələb olunur ki, orta hesab kəmiyyətini tapmaq

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}=\frac{1{,}27+1{,}33+1{,}29+1{,}31+1{,}30}{5}=1{,}30$$

Öyrənilən hadisədə ən çox təsadüf edilən variant statistikada **moda** adlanır. Başqa sözlə, ən yüksək tezliyə malik olan varianta **moda deyilir**.

Məsələn,

X_i	17	19	24	25	29	30
n_i	3	2	5	4	9	1
$Mo=29$						

Variasiya sırasını iki bərabər hissəyə bölən ədədə **mediana** deyilir. Məsələn, tutaq ki, ölçü nəticəsində aşağıdakı ədədlər sırası alınıb

X_i	10	13	14	20	23	24	29
$Me=20$							

Əgər ədədlərin sayı sırada cüt olarsa onda iki mərkəzi ədədi toplayıb ikiyə bölməklə mediananı tapmaq olar.

X_i	10	13	14	20	23	24	29	33

$$Me=\frac{20+23}{2}=\frac{43}{2}=21{,}5$$

Variantların orta kəmiyyətdən uzaqlaşması kvadratların cəmindən hesablanmış orta ədəd **dispersiya** adlanır.

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n},$$

burada $\sum_{i=1}^{n}$ işarəsi 1-dən n-ə qədər ədədlərin cəminin işarəsidir.

Dispersiyə ölçü nəticələrinin dəyişmə intervalını və nəticələrin orta qiymət ətrafında sıxlığını xarakterizə edir.

Dispersiyanın böyüklüyü nəticələrin qeyri sıxlığını və dəyişmə intervalının böyüklüyünü göstərir.

Dispersiyanın kiçikliyi nəticələrin çox çıxlığını və bu sırada olan ən kiçik və ən böyük nəticələrinin bir-birindən az fərqli olduğunu göstərir.

Ölçmə nəticələrinin orta qiymətdən sola və sağa dəyişmə intervalını təyin etmək üçün orta kvadratik paylanmadan istifadə edirlər.

Dispersiyanın kvadrat kökü alınmış formasına **orta kvadratik paylanma** deyilir.

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Variasiya əmsalı nisbi kəmiyyətdir, orta kvadratik paylanmanın orta kəmiyyətə olan nisbəti kimi ifadə edilir, və düsturla hesablanır:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} 100\%$$

Variasiya əmsalı, müxtəlif ölçülərlə təsvir olunmuş, variasiya sırasının dəyişgənliyini müqaisə etməyə imkan verir.

Variasiya əmsalının kiçikliyi öyrənilən yığımın bircinsliyini (eyni cinsliyini) göstərir.

Variasiya əmsalının böyükliyi isə yığımın müxtəlifliyini göstərir.

İndi də aşağıdakı məsələnin həllinə nəzər etirək:

Məsələ: Yüngül atletlər məşq zamanı 60 m məsafəni qaçaraq aşağıdakı nəticələri göstərmişlər:

x_i	8,2	8,5	7,9	7,8	8,2	8,1	7,6	8,3	8,2	7,8

Göstərilən nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

Həlli: Hesablamaları asanlaşdırmaq məqsədi ilə cədvəl quraq

№	x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
1.	8,2	0,14	0,0196
2.	8,5	0,44	0,1936
3.	7,9	–0,16	0,0256
4.	7,8	–0,26	0,0676
5.	8,2	0,14	0,0196
6.	8,1	0,04	0,0016
7.	7,6	0,46	0,2116
8.	8,3	0,24	0,0576
9.	8,2	0,14	0,0196
10.	7,8	0,26	0,0676
$n=10$	$\sum x_i=80{,}6$	---	$\sum(x_i-\bar{x})^2=0{,}684$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{80{,}6}{10}=8{,}06$$

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{0{,}684}{10}=0{,}0684$$

$$\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{0{,}0684}=0{,}26$$

$$V=\frac{\sigma}{\bar{x}}\cdot 100\%=\frac{0{,}26}{8{,}06}\cdot 100\%=3{,}2\%$$

$$Mo=8{,}2$$

Mediananı tapmaq üçün göstərilən nəticələri ən kiçikdən başlayaraq artma qaydasında yazaq

X_i	7,6	7,8	7,8	7,9	8,1	8,2	8,2	8,2	8,3	8,5

$$Me=\frac{8{,}1+8{,}2}{2}=\frac{16{,}3}{2}=8{,}15$$

İndii isə orta qiymətin dəqiqliyini hesablayaq

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_{n,\alpha},$$

burada, $t_{n,\alpha}$ - styüdent ədədidir.

Styüdent cədvəlindən tapırıq $\alpha = 0{,}05$

$$t_{n,\alpha} = t_{10;\,0{,}05} = 1{,}81$$

$$\Delta\bar{x} = \frac{0{,}26}{\sqrt{n}} \cdot 1{,}81 = \frac{0{,}4}{3{,}16} = 0{,}15$$

Beləliklə, 95% ehtimalla demək olar ki, 60 m məsafəyə qaçısın nəticələrinin ölçülməsində təsadüfi xəta 0,15 saniyədən çox deyil, və həqiqi nəticə 8,06 ± 0,15 intervalında yerləşir.

Dispersiyanın kiçikliyi qaçış nəticələrinin sıxlığını və nəticələrin bir-birindən çox az fərqli olduğunu göstərir. Hesablamalar göstərir ki, yüngül atletlərin fiziki hazırlığı eyni səviyyəlidir.

MƏSƏLƏLƏR

1. Yüngül atletlər uzunluğa tullanmada aşağıdakı nəticələri göstəriblər:

7,2	7,6	6,9	7,1	7,4	6,8	7,5	7,3	6,9	8,2

Göstərilən nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

2. Yadro itələmədə idmançılar aşağıdakı nəticələri əldə etmişdilər:

18,2	18,3	18,1	18,8	17,8	18,4	17,4			

Nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

3. Hündürlüyə tullanmada göstərilən nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın:

19,2	1,98	1,96	1,94	2,0	1,97	1,94	1,96	2,02	1,98

4. Qumbaranı atmada nəticələr alınıb:

48	49	50	56	48	47	52	54	51	53

Statistik xarakteristikaları hesablayın.

5. 100 m qaçış zamanı aşağıdakı nəticələr alınıb (sek):

11,9	12,5	13,0	14,4	14,2	15,0	11,9	13,2	13,5	14,0

Göstərilən nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

6. Hündürlüyə tullanmada məktəblilərin nəticələri üçün statistik xarakteristikaları hesablayın (sm):

53	59	51	48	48	54	60	57	50	57

7. Yadronı itələmədə nəticələr göstərilib:

11,85	12,50	11,25	11,85	12,00	13,15	12,50	11,00	12,05	11,40

Nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

8. Konki sürənlər 500 m-də aşağıdakı nəticələri göstəriblər (sek):

49	48,4	48,5	50,5	52,4	51,5	51,0	53,2	49,3	51,0

Göstərilən nəticələr üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

9. Yüngül atletlərin çəkisi:

60	69	74	70	64	71	80	75	82	63

Statistik xarakteristikaları hesablayın.

10. Bədii gimnastika üzrə idmançıların boyları:

162	160	158	159	155	167	172	150	156	170

Verilən göstərilər üçün statistik xarakteristikaları hesablayın.

2.5. Misalların orta ölçülər üsulu vasitəsilə həlli

Orta ölçülər üsulu ilkin göstəricilərin emalı üsulu sayılır. Yuxarıda qeyd olunduğu kimi, onun əsas xüsusiyyəti ilkin materialın sıxılmasıdır. Əsasən isə, ilkin rəqəmlər $\bar{x}$, σ^2, σ və v göstəriciləri ilə məlumatın mühüm itkisi olmadan əvəz oluna bilər.

Belə ki, 1.1. misalında bu situasiya təsvir olunub: start reaksiyası 1,25 san 1,45 san qədər start reaksiyasını göstərən 43 idmançı $\bar{x}\pm\sigma$,v parametrləri, yəni (1,36±0,06) san ilə xarakterizə edilə bilər.

İlkin məlumatın bu şəkildə təqdim olunması təlim işi üçün xeyirli olan bir sıra praktiki məsələləri həll etmək imkanını verir: məs., iki qrup idmançıları bir-biri ilə müqayisə etmək. İdmanda bu cür məsələyə tez-tez rast gəlir, məs., idmançıların təcrübə aparılan və eksperimental qrupları aralarında olan prinsipial fərqlərin aşkar edilməsi üçün müqayisə olunur; yaş və cins üzrə fərqlənən idmançılar qrupunun göstəriciləri; müxtəlif proqramlar, metodikalar üzrə məşq edən idmançılar qrupu; müxtəlif şəraitdə, rejimlərdə, məşq yüklərinin ayrı-ayrı həcmi və intensivliyi ilə, müxtəlif vaxt, məkan və güc göstəricilərin istifadəsi vasitəsilə məşq edən idmançılar qrupu. Ən sonunda, yalnız sınaqdan keçirilən qruplar yox, habelə eyni göstərici üzrə nəticələri yoxlanılmış bir fərdin yekunları müqayisə olunmalıdır. Bu halda fərdi idman imkanlarının dinamikasını müşahidə etmək və beləliklə, onun məşq metodikasını mükəmməl etmək mümkündür.

Məsələ. Qaçış sürəti (m/san) üzrə kontrol (x_i) (cədv.11) və eksperimental (y_i) (cədv.12) idmançılar qruplarının nəticələrini müqayisə edin.

İdmançıların təcrübə aparılan qrupunun nəticələrinin emalı

Cədvəl 11

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	2,8	5	14,0	-0,3	0,09	0,45
2	3,0	7	21,0	-0,1	0,01	0,07
3	3,1	9	27,9	0,0	0,00	0,00
4	3,2	8	25,6	0,1	0,01	0,08
5	3,3	6	19,8	0,2	0,04	0,24
6	3,4	5	17,8	0,3	0,09	0,45
Yekun	-	**40**	**125,3**	-	-	**1,29**

$$\bar{x} = 125{,}3/40 = 3{,}13 \approx 3{,}1 m/san;$$

$$\sigma^2_x = 1{,}29/40 \approx 0{,}3 (m/san^2)$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}3} \approx 0{,}18 \approx 0{,}2 m/san;$$

$$V_x = 0{,}2/3{,}1 * 100\% \approx 6{,}5\%$$

İdmançıların kontrol qrupunun xarakteristikası:

$$\bar{x} \pm \sigma_x = (3{,}1 \pm 0{,}2) m/san; v_x = 6{,}5\%$$

İdmançıların eksperimental qrupunun nəticələrinin emalı

Cədvəl 12

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	3,1	7	21,7	-0,2	0,04	0,28
2	3,2	12	38,4	-0,1	0,01	0,12
3	3,3	11	36,3	0,0	0,00	0,00
4	3,4	10	34,0	0,1	0,01	0,10
Yekun	-	**40**	**130,4**	-	-	**0,50**

$$y = 130,4/40 = 3,26 \approx 3,3m/san;$$
$$\sigma^2{}_y = 0,50/40 \approx 0,01(m/san^2)$$
$$\sigma_y = \sqrt{0,01} = 0,1m/san;$$
$$V_y = 0,1/3,3 * 100\% \approx 3,0\%$$

İdmançıların eksperimental qrupunun xarakteristikası:

$$\bar{y} \pm \sigma_y = (3,3 \pm 0,1)m/san; v_y = 3,0\%$$

Eksperimental və kontrol qrup idmançıların nəticələrini əldə edərək, iki sıranın parametrlərini müqayisə etmək və nəticələrə gəlmək imkanı yaranır.

Eksperimental qrup daha yüksək nəticələr göstərib $(\bar{y} = 3,3m/san > \bar{x} = 3,1m/san)$, bu halda hazırkı qrupda ilkin göstəricilərin yayınma əmsalı daha azdır $(\sigma = 0,1m/san, v = 3,0\%)$, nəinki kontrolda $(\sigma = 0,2m/san, v = 6,5\%)$. Bu uğurlu eksperiment haqda dəlalət edir, onun nəticəsi beledir: idmançılar qaçışın daha yüksək sürətini göstəricilərin daha yüksək sabitliyi şərtilə göstərdilər.

İdmançıların yaş qruplarını müqayisə edən və onların əsas göstəricilərinin dinamikasını təyin edək.

Məsələ. 14 (xi) və 15 (yi) yaşlı iki qrup sınaqdan keçirilənlərdə əllərin yellənməsi ilə yerdən tullanmağın hündürlüyü (sm) ölçülmüşdür. Tullanmağın hündürlüyünü yaşdan asılı olaraq dəyişilməsini təhlil edin.

14 yaşlı məktəblilərin tullanma hündürlüyünün nəticələrinin emalı

Cədvəl 14

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	30,2	5	151,0	34,8	0,09	174,0
2	32,4	7	226,8	13,7	0,01	95,9
3	35,0	9	315,0	1,2	0,00	10,8
4	38,0	8	304,0	1,9	0,01	15,2
5	40,0	4	160,0	15,2	0,04	60,8
6	41,2	7	288,4	26,0	0,09	182,0
Yekun	-	**40**	**1445,2**	-	-	**538,7**

$$\bar{x} = 1445,2/40 = 36,13 \approx 36,1sm;$$
$$\sigma^2_x = 538,7/40 \approx 0,03sm$$
$$\sigma_x = \sqrt{13,47} \approx 3,7sm;$$
$$V_x = 3,7/36,1 * 100\% \approx 10,2\%$$
$$\bar{x} \pm \sigma_x = (36,1 \pm 3,7)sm$$

15 yaşlı məktəblilərin tullanma hündürlüyünün nəticələrinin emalı

Cədvəl 15

№	y_i	n_i	y_in_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(y_i-\bar{y})^2n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	33,0	4	136,0	-2,2	4,84	19,36
2	35,2	9	316,8	-1,0	1,00	9,00
3	36,0	10	360,0	-0,2	0,04	0,40
4	36,4	8	291,2	0,2	0,04	0,32
5	38,0	7	266,0	1,8	3,24	22,68
6	39,5	2	79,0	3,3	9,00	18,00
Yekun	-	**40**	**1449,0**	-	-	**69,76**

$$\bar{y} = 1449,0/40 = 36,22 \approx 36,2sm;$$
$$\sigma^2_y = 69,76/40 \approx 1,74sm$$
$$\sigma_u = \sqrt{1,74} = 1,34sm;$$
$$V_y = 1,3/36,2 * 100\% \approx 3,6\%$$
$$\bar{y} \pm \sigma_y = (36,2 \pm 3,6)sm$$

14 və 15 cədvəllərində verilən məlumatların müqayisəsi göstərir ki, 14 yaşlı tullananların nəticələri bir ildən sonra azca yaxşılaşıb, daha sabit olub.

Məsələ. Sınaqdan keçirilənlərdə məşqdən əvvəl (x_i) (cədvəl 16) və sonra (y_i) (cədvəl 17) idmançıların ÜVT (vur/dəq.) ölçülmüşdür. Məşqin xarakterini qiymətləndirin.

Məşqdən əvvəl idmançılarda ÜVT ölçülmələrin emalı

Cədvəl 16

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	106	6	636	-5,5	30,25	181,5
2	109	9	981	-2,5	6,25	56,25
3	110	11	1210	-1,5	2,25	24,75
4	113	12	1356	1,5	2,25	27,10
5	115	7	805	3,5	12,25	8,75
6	117	5	585	5,5	30,25	151,25
Yekun	-	**50**	**5573**	-	-	**449,5**

$$\bar{x} = 5573/50 \approx 111{,}5 \text{ vur/dəq};$$

$$\sigma^2_x = 449{,}5/50 \approx 8{,}99 \text{ vur/dəq}^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{8{,}99} \approx 3{,}0 \text{ vur/dəq};$$

$$V_x = 3{,}0/111{,}5 * 100\% \approx 2{,}7\%$$

$$\bar{x} \pm \sigma_x = (111{,}5 \pm 3{,}0) \text{ vur/dəq}$$

Məşqdən sonra idmançılarda ÜVT ölçülmələrin emalı

Cədvəl 1.17

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	165	5	825,0	-11,8	139,24	696,20
2	172	9	1548,0	-4,8	23,04	207,36
3	175	14	2450,0	-1,8	3,24	45,36
4	180	10	1800,0	3,2	10,24	102,40
5	184	8	1472,0	7,2	51,84	414,72
6	186	4	744,0	9,2	86,64	338,56
Yekun	-	**50**	**8839,0**	-	-	**1804,6**

$$y = 8839{,}0/50 = 176{,}78 \approx 176{,}8 \text{ vur/dəq};$$

$$\sigma^2_y = 1804{,}6/50 \approx 36{,}09 \text{ vur/dəq}^2; \ \sigma_y = \sqrt{36{,}09} = 6$$

vur/dəq;

$$V_y = 6{,}0/176{,}8 * 100\% \approx 3{,}4\%;$$

$$\bar{y} \pm \sigma_y = (176{,}8 \pm 6{,}0) \text{ vur/dəq}$$

Alınmış məlumatlar ona dəlalət edir ki, ÜVT mühüm dərəcədə 111,5-dən 176,8 (vur/dəq) qədər artıb. Bununla belə nəticələrin sabitliyi heç dəyişməyib: 3,4-2,7=0,7%. Bu sübut edir ki, məşq intensiv, idmançılar isə eyni dərəcəyə aiddirlər.

Yalnız iki sınaqdan keçirilənlərin qrupunu yox, habelə iki idmançını aralarında müqayisə etmək olar, onların hər biri eyni göstərici üzrə dəfələrlə ölçülə bilər.

Məsələ. Xokkey oyunu zamanı 30 gün ərzində iki qapıçı hərəsi 100 şaybanın atımlarını əks edir. Birinci qapıçının əks olunmuş atımlarının (x_i) sayı cədvəl 18-də, ikinci qapıçının (y_i) isə cədvəl 19-da verilib. Sınaqdan keçirilən qapıçıların kvalifikasiyasını müqayisə edin.

Birinci qapıçının nəticələrinin emalı

Cədvəl 18

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	65	5	325	-6,5	42,25	211,25
2	68	4	272	-3,5	12,25	49,00
3	72	7	5-4	-0,5	0,25	1,75
4	73	8	584	1,5	2,25	18,00
5	75	3	225	3,5	12,25	36,75
6	78	3	234	6,5	42,25	126,75
Yekun	-	**30**	**2144**	-	-	**443,50**

$$\bar{x} = 2144/30 \approx 71{,}5; \qquad \sigma^2_x = 443{,}5/30 \approx 14{,}78$$

$$\sigma_x = \sqrt{14{,}78} \approx 3{,}8;$$

$$V_x = 3{,}8/71{,}5 * 100\% \approx 5{,}3\%$$

$$\bar{x} \pm \sigma_x = 71{,}5 \pm 3{,}8$$

İkinci qapıçının nəticələrinin emalı

Cədvəl 19

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(y_i-\bar{y})^2 n_i$
1	64	6	384	-6,2	37,20	223,2
2	69	7	483	-1,2	1,44	10,08
3	70	8	560	-0,2	0,04	0,32
4	72	4	300	1,8	3,24	12,96
5	75	2	150	4,8	23,04	46,08
6	76	3	228	5,8	33,64	100,92
Yekun	-	**30**	**2105**	-	-	**393,56**

$$\bar{y} = 2105/30 \approx 70{,}2; \qquad \sigma^2_y = 393{,}56/30 \approx 13{,}12$$

$$\sigma_y = \sqrt{13{,}12} = 3{,}6;$$

$$V_y = 3{,}6/70{,}2 * 100\% \approx 5{,}1\%$$

$$\bar{y} \pm \sigma_y = 70{,}2 \pm 3{,}6$$

18 və 19 cədvəllərində göstəriciləri müqayisə edərkən bu nəticəyə gəlirik ki, qapıçının ikisi də eyni dərəcəlidir, çünki əks olunmuş şaybaların sayı faktiki üst-üstə düşür: 71,5±3,8 və 70,2±3,6 və onların nəticələrin stabilliyi də praktiki olaraq eynidir: 5,3 və 5,1%.

Beləliklə, variasiya əmsalı və ya orta kvadratik yayınma vasitəsilə məşq işi üçün nəticələrin stabilliyini qiymətləndirmək mümkündür.

Məsələ. Birinci (x_i) və ikinci üzgüçünün (y_i) üzmə sürətində sabitliyi müqayisə edin (cədvəl 20 və 21).

Birinci üzgüçünün nəticələrinin emalı

Cədvəl 20

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 n_i$
1	1,00	2	2,00	-0,10	0,0100	0,0200
2	1,05	3	3,15	-0,05	0,0025	0,0075
3	1,08	5	5,40	-0,02	0,0004	0,0020
4	1,10	4	4,40	0,00	0,0000	0,0000
5	1,15	3	3,45	0,05	0,0025	0,0075
6	1,20	3	3,60	0,10	0,0100	0,0300
Yekun	-	**20**	**21,95**	-	-	**0,0670**

$$\bar{x} = 22{,}00/20 \approx 1{,}1 m/san;$$
$$\sigma^2_x = 0{,}0670/20 \approx 0{,}00335(m/san)^2$$
$$\sigma_x = \sqrt{0{,}00335} \approx 0{,}06 m/san;$$
$$V_x = 0{,}6/1{,}1 * 100\% \approx 5{,}5\%$$
$$\bar{x} \pm \sigma_x = (1{,}1 \pm 0{,}06) m/san$$

İkinci üzgüçünün nəticələrinin emalı

Cədvəl 21

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
1	1,00	4	4,00	-0,20	0,0400	0,1600
2	1,12	5	5,60	-0,08	0,0064	0,0320
3	1,20	4	4,80	0,00	0,0000	0,0000
4	1,26	3	3,78	0,06	0,0036	0,0108
5	1,30	2	2,60	0,10	0,0100	0,0200
6	1,32	2	2,64	0,12	0,0120	0,0240
Yekun	-	**20**	**23,42**	-	-	**0,2468**

$$\bar{y} = 23{,}42/20 = 1{,}17 \approx 1{,}2 m/san;$$
$$\sigma^2_y = 0{,}2468/20 \approx 0{,}012349(m/san)^2$$
$$\sigma_y = \sqrt{0{,}01234} \approx 0{,}11 m/san;$$
$$V_y = 0{,}11/1{,}2 * 100\% \approx 9{,}2\%$$
$$\bar{y} \pm \sigma_y = (1{,}2 \pm 0{,}11) m/san$$

Cədvəl 20 və 21-də verilən məlumatları müqayisə edərkən, bu nəticəyə gəlmək olar ki, hər iki idmançının üzmə sürətinin göstəriciləri kifayət qədər sabitdir və birinci üçün 5,5%, ikinci üçün isə 9,2% təşkil edib, yəni birinci üzgüçünün nəticələri ikincisindən daha sabitdir.

§3 Seçmənin ədədi xarakteristikaları

Praktikada bəzən təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarını bilmək kifayətdir, çünki onlar təsadüfi kəmiyyətin paylanması haqda təsəvvür yaradırlar. Bu parametrlər ortaq qiymət ətrafında qruplaşmış təsadüfi kəmiyyətlərin səpələnməsini göstərir.

Variasiya sırası və empirik paylanmaların qrafikləri seçmənin əlamətlərinin dəyişməsini göstərir. Lakin onlar seçməni tam xarakterizə etmək üçün kifayət deyirlər.

Seçmənin ədədi xarakteristikaları – empirik göstəriciləri (ölçmə zamanı əldə edilmiş nəticələr) ifadə edir və onları bir-biri ilə müqayisə etməyə imkan verir.

Seçmənin ədədi xarakteristikalarına yerləşmə və səpələnmə xarakteristikaları aiddir.

Əvvəlcə seçmənin yerləşmə xarakteristikalarını nəzərdən keçirək.

Seçmənin yerləşmə xarakteristikalarına aiddir:

1) orta qiymət
2) moda
3) median

Eyni obyekt daxili və xarici amillərin təsirindən asılı olaraq dəyişdiyinə görə, bizi maraqlandıran kəmiyyət və keyfiyyət göstəriciləri müxtəlif qiymətdə olurlar.

Əgər $x_1, x_2, ..., x_k$ – öyrənilən əlamətin qiymətləridir və onların uyğun tezlikləri $n_1, n_2, ..., n_k$ (burada $n_1+n_2+...+n_k=N$ – seçmənin həcmi), onda

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N}$$

Misal

x_i	2	4	5	6
n_i	8	9	10	3

Orta qiyməti tapın.

Həlli.

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 10 + 6\cdot 3}{8+9+10+3} = \frac{120}{30} = 4$$

Statistikada moda – verilmiş cəmlərdə tez-tez təsadüf edilən əlamətə deyilir.

Təcrübə zamanı məlum olur ki, modanın qiyməti təxminən orta qiymətə bərabərdir.

Misal x_i	17	20	23	24	30
n_i	3	2	5	3	4

Median statistikada elə bir orta kəmiyyətin qiymətinə deyilir ki, variasiya sırasının tən ortadan yerləşərək, sıranı artan və azalan istiqamətdə iki bərabər hissəyə bölsün.

Əgər variantlar sayı sırada cüt olarsa, onda iki mərkəzi variantı toplayıb ikiyə bölməklə medianı hesablamaq olar.

x_i	10	13	15	19	20	23

$$Me=\frac{15+19}{2}=\frac{34}{2}=17$$

Orta qiymət dəyişən əlamət haqqında tam məlumat vermir. Ola bilər ki, iki empirik paylanmanın orta qiymətləri eyni olsun. Bunlardan birində əlamətin qiymətləri orta qiymət ətrafında dar diapazonda, ikincidə isə geniş diapazonda səpələnə bilər. Ona görə də orta qiymətlərlə yanaşı seçmənin səpələnmə xarakteristikalarını da hesablanır.

Paylanma genişliyi seçmənin ən böyük və ən kiçik variantları arasındakı fərqə deyilir.

$$R=X_{max}-X_{min}$$

Dispersiya hər variantdan orta qiyməti çıxıb, onların kvadrat cəminin variantlar sayına bölünməsinə bərabərdir.

$$D=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} \qquad D=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2\cdot n_i}{n}$$

Dispersiya ölçü nəticələrinin dəyişmə intervalını və nəticələrin orta qiymət ətrafında səpələnməsini xarakterizə edir. Dispersiyanın böyüklüyü nəticələrin bir-birindən aralı və dəyişmə intervalının böyüklüyünü göstərir.

Dispersiyanın kiçikliyi isə nəticələrin çox sıxlığını və bu sırada olan ən kiçik və ən böyük nəticələrinin bir-birindən az fərqli olduğunu göstərir.

Ölçü nəticələrinin orta qiymətdən sola və sağa dəyişmə intervalını təyin etmək üçün orta kvadratik yayınma anlayışından istifadə edirlər.

Dispersiyanın kvadrat kökü alınmış formasına orta kvadratik yayınma deyilir.

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Variasiya əmsalı nisbi kəmiyyətdir, orta kvadratik yayınmanın orta qiymətə olan nisbəti kimi ifadə edilir və düsturla hesablanır.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Variasiya əmsalı müxtəlif ölçülərlə təsvir olunmuş variasiya sırasının dəyişkənliyini müqayisə etməyə imkan verir.

Variasiya əmsalın kiçikliyi öyrənilən yığımın (seçmənin) bircinsliyini (eyni cinsliyini) göstərir, böyüklüyü isə yığımın (seçmənin) müxtəlifliyini göstərir.

Seçmənin səpələnmə xarakteristikalarına dispersiya, orta kvadratik yayınma (meyl) və variasiya əmsalı aiddir.

3.1. Orta qiymətin xətası

Seçmənin xarakteristikaları ($\bar{x}$ və σ) ümumi yığım parametrlərindən fərqli olur. Bu parametrlərin həqiqi qiymətləri məlum olmadığından onları yoxlamaq mümkün deyil. Lakin həmin ümumi yığımdan təkrarən seçmələr götürülərsə, onda onların bir yığımdan olmasına baxmayaraq $\bar{x}$ və σ qiymətləri müxtəlif seçmələr üçün üst-üstə düşmür.

Ümumi yığım parametrlərinin həqiqi qiymətdən olan fərqə statistik xəta deyilir. Bu xəta (fərq) seçmədə ümumi yığımın obyektlərinin tam həcmdə əks olunmadığından alınır (meydana çıxır).

Müəyyən ümumi yığımdan n – həcmli asılı olmayan çoxlu sayda seçmələr götürüb, onların orta qiymətlərini tapsaq, görərik ki, bu qiymətlər üçün onların orta ədədindən olan fərqləri seçmənin ayrı-ayrı variantların fərqlənmələrindən $\sqrt{n}$ dəfə kiçikdir.

Beləliklə, orta qiymətin standart xətası $S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ düsturu ilə hesablanılır.

Burada σ - ümumi yığımın orta kvadratik yayınmasıdır (meyllidir);

n – seçmənin həcmi

Hesablamaların dəqiqliyini qiymətləndirmək üçün orta qiyməti $\overline{X} \pm S_x$ göstərmək olar.

Düsturdan göründüyü kimi seçmənin həcmi (n) artdıqda, standart xətanın qiyməti (S_x) azalır,($\sqrt{n}$)-ə mütənasib.

3.2. Riyazi gözləmənin hesablanması

X əlamətinin diskret paylanması

(x_1,n_1), (x_2,n_2), ... , (x_k,n_k) nöqtələrini birləşdirən sınıq xəttə tezliyin poliqonu deyilir, burada x_i - seçmənin varianlarıdır; n_i - variantların uyğun tezlikləridir.

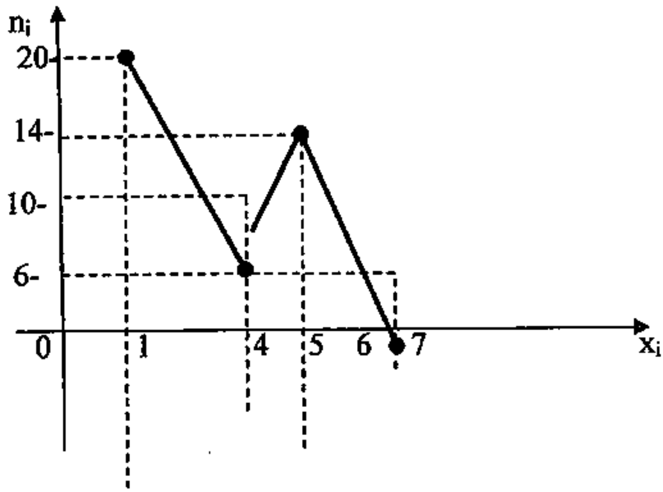
(x_1, ω_1), (x_1, ω_2), ... (x_k, ω_k) nöqtələrini birləşdirən sınıq xətt nisbi tezliyin poliqonu deyilir, burada x_i - seçmənin variantları, ω_i – variantların uyğun nisbi tezlikləri.

Əlamətin paylanması kəsilməz olduqda, əlamətin qiymətləri müşahidə olunan bütöv interval uzunluğu ***h*** olan xüsusi intervallara bölünür və ***i***-ci intervala düşən variantların tezliklərinin cəmini tapırıq. Uzunluğu ***h*** və hündürlüyü $\frac{n_i}{n}$ olan pilləvari düzbucaqlardan düzəldilmiş fiqura tezliyin histoqramı deyilir.

Məsələ. Verilmiş seçmənin paylanmasına görə tezliklərin poliqonunu qurun.

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

Həlli. x_i variantlarını absis oxu üzərində, uyğun n_i tezlikləri isə ordinat oxu üzərində (x_i, n_i) nöqtələri şəklində qeyd edib düz xətlərlə birləşdirdikdə, axtarılan tezliklərin poliqonunu alırıq.



Məsələ. Aşağıda verilmiş seçmənin paylanmasına görə tezliklərin poliqonunu qurun.

a)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

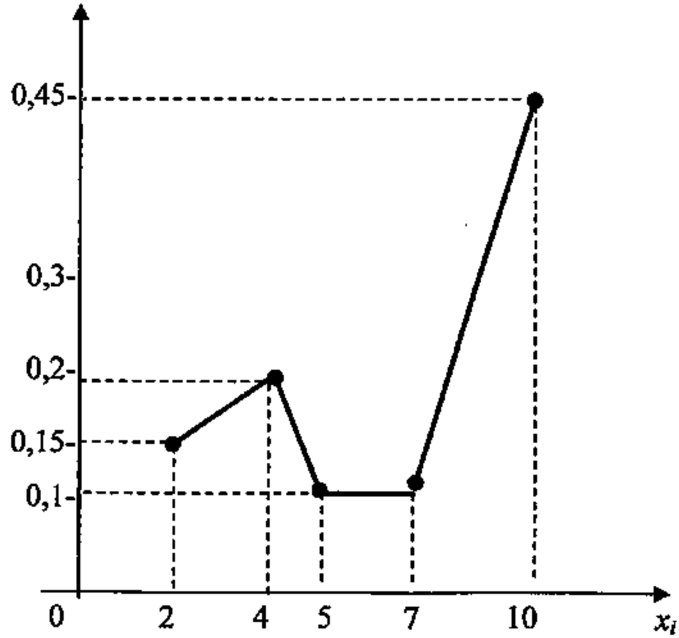
b)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	25	15	10	5

Məsələ. Aşağıda verilmiş seçmənin paylanmasına görə nisbi tezliklərin poliqonunu qurun.

x_i	2	4	5	7	10
ω	10	25	15	10	5

Həlli. Absis oxu üzərində x_i variantlarını uyğun ω_i nisbi tezliklərini isə ordinat oxu üzərində ayıraq (x_i, ω_i) nöqtələrini düz xətlərlə birləşdirdikdə, axtarılan nisbi tezliklərin poliqonu alınır.



Məsələ. Aşağıda verilmiş seçmənin paylanmasına görə nisbi tezliklərin poliqonunu qurun.

a)

x_i	1	4	5	8	9
ω_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

b)

x_i	4	7	10	12	13
ω_i	0,03	0,3	0,1	0,17	0,4

3.3 Normal paylanma qanunu

Fiziki tərbiyyə və idmanda əksər tədqiqatlar ölçülər ilə bağlıdır. Onlar verilən intervalda müxtəlif qiymət qəbul edə bilərlər. Bu qiymətlər kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin modeli ilə əhatə olunurlar. Ona görə də biz kəsilməz təsadüfi kəmiyyətləri və onlarla bağlı kəsilməz paylanmaları nəzərdən keçirəcəyik.

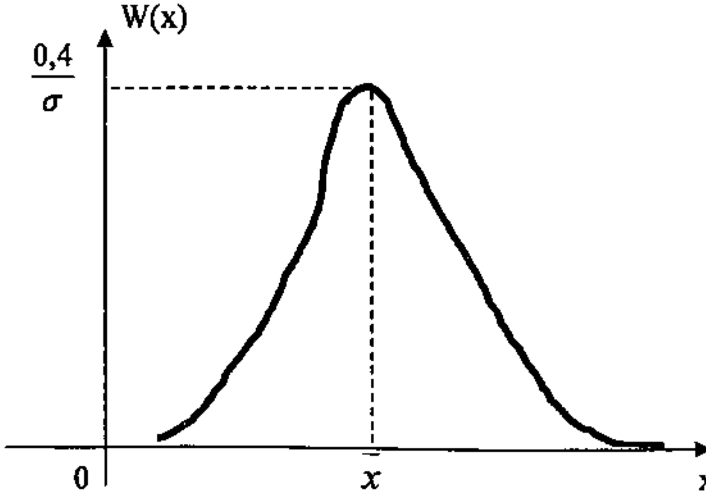
Riyazi statistikada böyük rol oynayan kəsilməz paylanmalardan biri normal paylanmadır (Qayış paylanması)

Əgər X paylanma mütləq kəsilməzdirsə, ehtimal paylanma sıxlığı isə

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

onda təsadüfi kəmiyyət normal paylanma qanununa tabedir. Normal qanunlar bütün tədqiqat sahələrində empirik paylanma sinfini təşkil edir. Ona görə bəzi məsələlərin ehtimal modelinin qurulmasında fərz edilir ki, hər kəmiyyətin ehtimalı normaldır.

(5)-ci düstura uyğun paylanma əyrisi aşağıdakı qrafikada göstərilib.



Şəkil 5.

$\bar{x}$ və σ kəmiyyətləri paylanma parametrləri adlanırlar. Deməli, normalar qanun ikiparametrli qanundur.

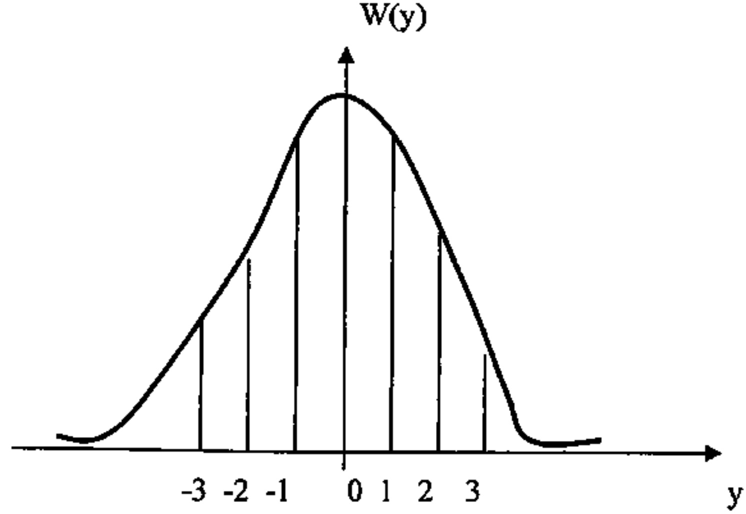
$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$ düsturu əsasında inteqral paylanma funksiyası aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi \cdot \sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\bar{x})}{2\sigma^2}} dx \qquad (6)$$

Təsadüfi kəmiyyətin ehtimalını asanlıqla hesablamaq üçün aşağıdakı düsturla normalaşdırırlar.

$$y = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \qquad (7)$$

$\bar{x} = 0$ və $\sigma = 1$ parametrləri ilə normal paylanmaya normalanmış deyirlər. Qrafikada paylanma əyrisinin növünə parametrlərin təsiri göstərilib (şəkil 2)



Şəkil 2.

(3)-cü düsturu nəzərə alaraq normalanmış normal paylanmanın ehtimal sıxlığını belə təsvir etmək olar.

$$W(y) = \frac{2}{\sqrt{2\Pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Normal paylanmanın aşağıdakı xassələri var:

1. normal paylanma əyrisi x= $\bar{x}$ nöqtəsinə nəzərən simmetrik olur;

2. normal paylanma $\bar{x}$ və σ parametrləri ilə tam təyin olunur;

3. normal paylanmanın moda və medianı eyni göstəricidir və riyazi gözləməyə bərabərdir.

3.4 Empirik paylanmanın normallığının yoxlanması

Empirik paylanma sıxlığının qrafikini qurduqda, qurulan əyrini tədqiq etmək lazımdır, yəni aydınlaşdırmalıyıq ki, alınan paylanma Qaussun normal paylanma qanununa nə dərəcədə uyğundur.

Bu məqsədlə empirik paylanmanın assimetriya A və eksesa E əmsallarını hesablayaq.

Assimetriya əmsalı aşağıdakı düsturla hesablanır.

$$A = \frac{\mu_3}{S^3} \qquad (8)$$

burada

$\mu_3 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^3}{n}$ - üçtərkibli mərkəzi empirik momentdir.

Bu əmsal göstərir ki, empirik paylanma orta qiymətdən nə qədər sola və ya sağa əyilib. Əgər A=0, onda empirik paylanma orta qiymətə nisbətən simmetrikdir.

Əgər $A \neq 0$, onda A<0 və ya A>0 ola bilər.

A<0 göstərir ki, paylanma əyrisi sağtərəfli simmetrikdir; A<0 isə göstərir ki, əyri soltərəfli simmetrikdir.

Təsadüfi kəmiyyətin eksesası aşağıdakı düsturla təyin edilir.

$$E = \frac{\mu_4}{S_x^{\,4}} - 3 \qquad (9)$$

Burada $\mu_4 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^4}{n}$ dördtərtibli mərkəzi empirik momentdir.

Əgər $E \neq 0$, onda E<0 və ya E>0.

E<0 olduqda – paylanma düztəpəli;

E>0 olduqda – paylanma ititəpəli alınır.

Əgər aşağıdakı şərt yerinə yetirilirsə

$$\begin{cases} |A| \le 1{,}5\sigma_A \\ \left|E - \dfrac{6}{n+1}\right| \le 1{,}5\sigma_E \end{cases} \qquad (10)$$

onda seçmə paylanmanı təqribən normal hesab etmək olar. Burada σ_A və σ_E - assimetriya və eksesa əmsalların orta kvadratik xətası. Onlar aşağıdakı düsturla hesablanırlar.

$$S_A = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}$$

$$S_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2 \cdot (n+3)(n+5)}}$$

Əgər aşağıdakı bərabərsizliklərdən heç olmasa biri yerinə yetirilir:

$$|A| \geq 2\sigma_A \text{ və ya } \left|E - \frac{6}{n+1}\right| \geq 2\sigma_E$$

onda paylanma heç təqribən də normal ola bilməz.

Məsələ. Bir qrup tələbə hündürlüyə tullanmada aşağıdakı nəticələri göstəriblər.

x_i = 1,92	1,48	1,41	1,65
1,39	1,72	1,33	1,56
1,53 2,00	1,00	1,78	
1,25 1,49	1,45	1,44	
1,47 1,28	1,55	1,52	

Göstəricilərin ehtimal xarakteristikalarını hesablayıb, paylanma histoqramını (empirik paylanma sıxlığını) qurun.

Həlli

№	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^3$	$(x_i-\bar{x})^4$
1	1,92	0,33	0,1521	0,0593	0,0231
2	1,39	-0,14	0,0196	-0,0027	0,00038
3	1,53	0	0	0	0
4	1,47	-0,06	0,0036	-0,0002	0,000013
5	1,25	-0,28	0,0784	-0,0219	0,0061
6	1,48	-0,05	0,0025	-0,00012	0,000006

7	1,72	0,19	0,0361	0,0069	0,0013
8	2,0	0,47	0,2209	0,1038	0,00488
9	1,49	-0,04	0,0016	-0,00006	0,000002
10	1,28	-0,25	0,0625	-0,0156	0,0039
11	1,41	-0,12	0,0144	-0,0017	0,00021
12	1,33	-0,20	0,04	-0,008	0,0016
13	1,0	-0,53	0,2809	-0,1489	0,0789
14	1,45	-0,08	0,0064	-0,0005	0,0041
15	1,55	0,02	0,0004	0,00001	0,0000001
16	1,65	0,12	0,0144	0,0017	0,00021
17	1,56	0,03	0,0009	0,000027	0,00000081
18	1,78	0,25	0,0625	0,0156	0,0039
19	1,44	-0,09	0,0081	-0,00073	0,000066
20	1,52	-0,01	0,0001	-0,000001	0,00000001
Yekun	**30,52**	**0**	**1,0051**	**-0,0131**	**0,1685**

$$n=20$$

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{30,52}{20}=1,53$$

$$D_x=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1,0051}{20}=0,0502$$

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{0,0502}=0,2242$$

Paylanma histoqramını qurmaq üçün lazımdır:

$$x_{max}=2,0,\ \ x_{min}=1,0$$

$R=x_{max}-x_{min}=2,0-1,0=1,0$, burada R – variasiya genişliyi

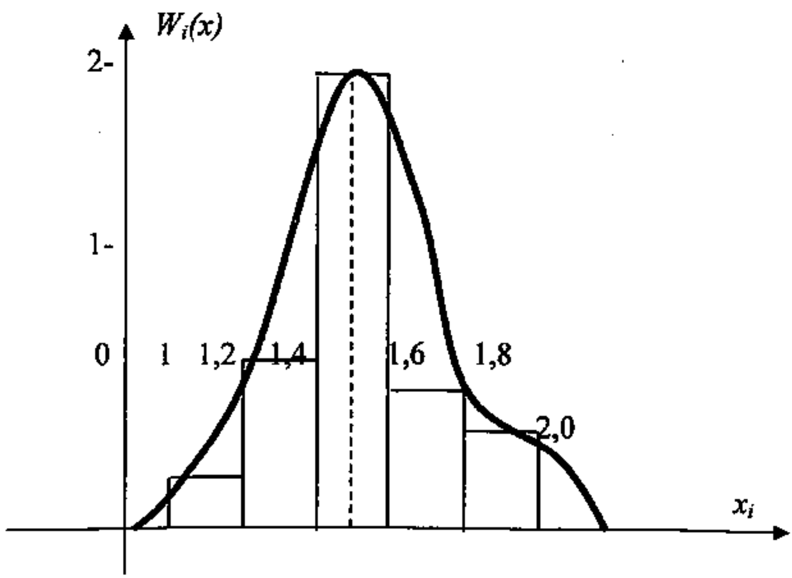
k=5 – intervalların sayı

$h=\dfrac{R}{k}=\dfrac{1,0}{5}=0,2$ - intervalın addımı (intervalın eni)

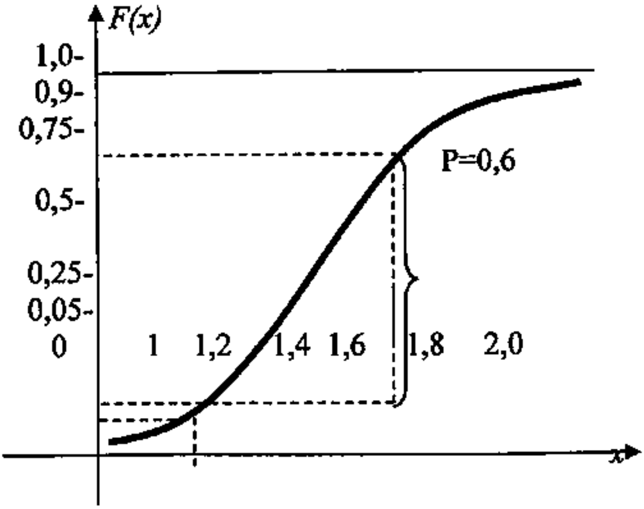
Hesablanmış nəticələri cədvəldə göstəririk.

№	interval	tezlik n_i	nisbi tezlik $\frac{m_i}{n}$	cəm tezliyi $F=\sum\frac{m_i}{n}$	empirik paylanma sıxlığı $W=\frac{m_i/n}{h}$
1	1,0÷1,2	1	0,05	0,05	0,25
	1,2÷1,4	4	0,20	0,25	1,00
	1,4÷1,6	10	0,50	0,75	2,50
	1,6÷1,8	3	0,15	0,90	0,75
	1,8÷2,0	2	0,10	1,00	0,50

Cədvəldəki göstəricilər əsasında paylanma histoqramın qrafikini qururuq.



Empirik paylanma funksiyası aşağıdakı qrafikdə göstərilib.



Qrafikdə görünür ki, tullanmaların [1,3-1,6] intervalına düşməsinin ehtimalı bərabərdir 0,6; yəni 60% bütün tullanmaların nəticələri həmin intervala daxildir.

İndi isə empirik paylanmanın normallığını yoxlayaq, yəni təyin edək ki, alınan paylanma Qayss normal paylanmasına uyğundurmu. Bunun üçün assimetriya və eksesa əmsallarını hesablayaq:

$$\mu_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n} = \frac{-0{,}0131}{20} = -0{,}000655$$

$$\mu_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n} = \frac{0{,}1685}{20} = -0{,}008425$$

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0{,}000655}{(0{,}2242)^3} = -0{,}058$$

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0{,}008425}{(0{,}2242)^4} - 3 = 0{,}33$$

$$S_A = \sqrt{\frac{6 \cdot 18}{21 \cdot 23}} = \sqrt{0{,}214} = 0{,}46$$

$$S_E = \sqrt{\frac{24 \cdot 20 \cdot 18 \cdot 17}{441 \cdot 23 \cdot 25}} = 0{,}76$$

A və *E* əmsalların hesablanmış qiymətləri (10)-ci şərti ödəyirlər, yəni

$$|-0{,}058| \leq 1{,}5 \cdot 0{,}46; \quad 0{,}058<0{,}69$$

$$|0{,}33 - 0{,}28| \leq 1{,}5 \cdot 0{,}76; \quad 0{,}05<1{,}14$$

Deməli alınan empirik paylanmanı normal hesab etmək olar.

§4 Funksional və statistik əlaqə

İdman tədqiqatında öyrənilən göstəricilər arasında tez-tez qarşılıqlı əlaqə ilə rastlaşırıq. Onun növü müxtəlif olur. Məs.: biomexanikada sürətin məlum göstəricilərinə görə tezliyin təyin olunması, psixologiyada Fexner qanunun, fiziologiyada Xill qanunu və başqaları funksional əlaqəni və ya bir göstəricinin hər mənasına uyğun gələn asılılığı xarakterizə edir.

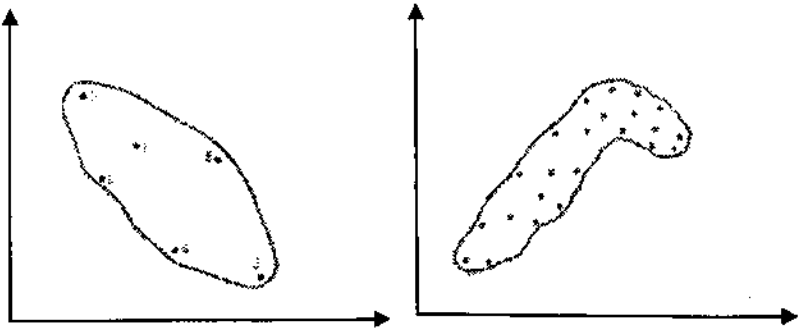
Qarşılıqlı əlaqənin digər növünə, məs.: bədənin çəkisinin uzunluğundan asılılığı aiddir. Bədənin uzunluğunun bir mənasına çəkinin bir mənası uyğun gələ bilər və əksinə. Belə hallarda bir göstəricinin bir mənasına digərinin bir neçə mənası uyğun gələrsə, həmin qarşılıqlı əlaqə statistik əlaqə adlanır.

İdman tədqiqatında müxtəlif göstəricilər əlaqələrin öyrənilməsinə böyük yer verilir, belə ki, bu bəzi qanunauyğunluqların aydınlaşması, məşqçi və müəllimin təcrübə işində istifadə etmək üçün onların gələcəkdə şifahi və riyazi təsvirinə imkan verir. Statistik əlaqələr arasında ən mühümü korrelyasion əlaqədir (latın sözü corelatio sözündən olub - əlaqə, uyğunluq deməkdir). Korrelyasiya bir göstəricinin orta ölçüsünün digərinin mənasından asılı olaraq dəyişilməsindən ibarətdir. Qarşılıqlı əlaqələrin araşdırılması üçün istifadə olunan statistik üsullar korrelyasiya analizi adlanır. Onun əsas məqsədi təzyiq edilən göstəricilərin təyin olunmasından, sıxlığından və istiqamətlərdən ibarətdir. Korrelyasiya analizi yalnız statistik əlaqəni araşdırmağa imkan verir. O, onların etibarlılığını və informativliyini qiymətləndirmək üçün sınaq nəzəriyyəsində geniş istifadə olunur. İrəlidə göstərildiyi kimi ölçünün müxtəlif imkanları korrelyasion analizin müxtəlif variantları tələb edir..

4.1 Korrelyasiya sahəsi

Qarşılıqlı əlaqələrin analizi koordinatların düzbucaqlı sistemində ölçü nəticələrinin qrafiki təsvirindən başlanır. Təsəvvür edək ki, 6 nəfər sınanılan şəxsin məşqin hazırlıq müddətinin başlanmasına qədər (X) və bitəndən sonra (Y) taxta üzərində çəkilməsinin ölçülərinin nəticələrini yazaq.

Bu nəticələr üçün qrafik quraq, absis oxuna x nəticələrini yazacağıq, ordinat oxu üzərinə isə - Y nəticələri. Beləliklə, hər nəticə cütü koordinatın düzbucaqlı sistemində nöqtə ilə göstəriləcək. /ş. 6/



(şəkil 6. Korrelyasiya sahəsi (xətti asılılıq))
(şəkil 7. Korrelyasiya sahəsi (xətsiz asılılıq)

Belə qrafiki asılılıq dolanma diaqramı və ya korrelyasiya sahəsi adlanır. Cədvəlin vizual analizi asılılıq formasının yaranmasına imkan verir. (heç olmasa fərz etməyə). Hazırki vəziyyətdə bu forma adi həndəsi fiqura - ellipsə yaxındır. Belə doğru qrafiki biz xətti asılılıq və ya qarşılıqlı əlaqənin xətti forması adlandıracağıq.

Lakin təcrübədə əlaqənin digər formalarına da rast gəlmək olar (məs.: ş.7). Eksperimental olaraq tenisdə ötürmə zamanı alınan bu asılılıq qarşılıqlı əlaqənin xətsiz forması və ya qarşılıqlı əlaqənin xətsiz asılılığına xasdır.

Beləliklə, korrelyasiya sahəsinin vizual analizi statistik asılılığın formasının xətti və ya xətsiz olmasını aşkar etməyə imkan verir. Bu analizə növbəti addım üçün korrelyasiyanın uyğun əmsalının seçilməsi və hesablanması üçün əhəmiyyətli məna kəsb edir.

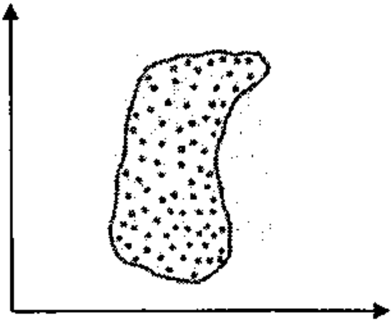
4.2 Əlaqənin sixlığının qiymətləndirilməsi

Korrelyasiya analizində qarşılıqlı əlaqənin sıxlığını qiymətləndirmək üçün xüsusi göstəricinin - əmsal korrelyasiyasının qiyməti (absolyut kəmiyyəti) istifadə olunur. Korrelyasiyanın istənilən əmsalının tam qiyməti 0-dan 1-ə kimi yerləşir. Bu əmsalın qiymətini belə başa salırlar (izah edirler).

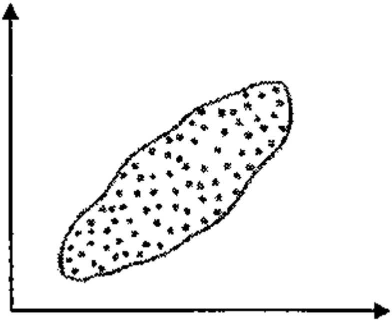
- Korrelyasiyanın əmsalı = 1.00 /funksional əlaqə, belə ki, bir göstəricinin qiymətinə digər göstəricinin digər bir qiyməti uyğun gəlir və ona görə də dağılma diaqramında heç bir variasiya müşahidə olunmur;
- Korrelyasiya əmsalı = 0,99-0,7 /güclü statistik əlaqə/
- Korrelyasiya əmsalı = 0,69-0,5 /orta statistik əlaqə/
- Korrelyasiya əmsalı = 0,43-0,2 /zəif statistik əlaqə/
- Korrelyasiya əmsalı = 0,13-0,09 /çox zəif statistik əlaqə/
- Korrelyasiya əmsalı = 0,00 /korrelyasiya yoxdur./

(Ş.8. nüvənin n=80 itələnməsi və mərkəzi gücün arasındakı çox zəif Korrelyasiya asılılığına misal. Korrelyasiya əmsalı = 0,09 -mərkəzi güc, ordinat üzrə - nüvənin itələmə nəticəsi).

(Ş.9. müxtəlif ağırlıqlı (n=80) nüvənin itələnməsi nəticələri arasında asılılıq, güclü Korrelyasiya asılılığına misal. Korrelyasiya əmsalı = 0,892. Absis üzrə - nüvənin itələnmə nəticəsi 5 kq, ordinat üzrə - nüvənin itələnmə nəticəsi 3 kq.



Şəkil 8.



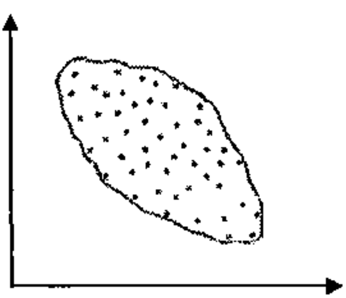
Şəkil 9.

(absis üzrə raketin sürəti, ordinat üzrə topun uçması sürəti).

Şəkil 9 və 9-da 2 müxtəlif asılılıq misal göstərilib. Beləliklə, korrelyasiya əmsalının qiyməti /absolyut kəmiyyəti/ 0-dan 1-ə qədər dəyişərək əlaqənin sıxlığı qiymətləndirməyə imkan verir. Sıxlıqdan başqa bizi əlaqənin istiqaməti də maraqlandıracaq.

4.3 Əmsalın istiqaməti

Şəkil 10-dən dağılma diaqramı güclü statistik əlaqədən başqa bir xüsusiyyətə də - asılılığın düz proporsional meylinə malikdir. Bu o deməkdir ki, 3 kq ağırlığında nüvənin istənilən nəticəsinin düzəlməsi 5 kq ağırlıqda nüvənin istənilən nəticəsinin (orta hesabla) yaxşılaşmasına səbəb olur. Ş 11-də əksinə proporsional asılılığın diaqramı göstərilmişdir.

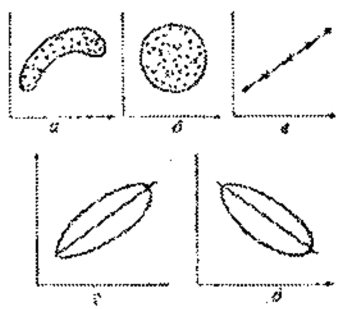


Şəkil 10.

(Ş 10. 100 m qaçışın və qaçaraq hoppanmanın (n=50) nəticələrinin asılılığı. Mənfi əlaqənin misalı: Korrelyasiya əmsalı=-0, 628.

Qaçışın vaxtının azalması ilə (sürətin artırılması zamanı) tullanmada nəticə artır).

Bu halda bu göstəricinin artması digərinin (orta hesabla) azalması ilə bağlıdır. Asılılığın istiqaməti korrelyasiyanın əmsalı işarəsində göstərilir.+/müsbət/ işarəsi düz proporsional və ya müsbət əlaqələri; - /mənfi/ işarə əksinə və ya mənfi əlaqəni göstərir. (ş.11).



Şəkil 11. Statistik əlaqənin misalları

a - xətsiz asılılıq forması, b-statistik asılılığın olmaması (korrelyasiya əmsalı=0), c-funksional asılılıq (korrelyasiya əmsalı=+1), q-müsbət asılılıq (korrelyasiya əmsalı > 0), d-mənfi asılılıq (korrelyasiya əmsalı < 0)).

4.4 Əlaqənin əmsallarının hesablanması üsulları

Əlaqənin əmsallarının hesablanması - hesabın mexaniki prosedurudur. Ancaq ondan əvvəl çətin cavablanan bəzi suallar gəlməlidir. Bu suallar öyrənilən göstəricilərə aiddir və belə yaranırlar. Tədqiq edilən göstərici hansı şkalada ölçülür? Bu göstəricinin neçə ölçüsü yerinə yetirilib? Göstəricinin bir sıra ölçülərini normal yerləşdirmə qanunu olan seçmə saymaq olarmı? və s. İrəlidə göstərildiyi kimi hər bir hal əlaqənin müəyyən əmsalının hesablanması ilə bağlıdır.

4.5 Brave-Pirson korrelyasının qoşa xətti əmsalının hesablanması

Ölçmələr əlaqələr və ya intervallar şkalasında həyata keçiriləndə və əlaqə forması xətti olarkən, əlaqənin ölçülməsində Brave-Pirson korrelyasiya əmsalı istifadə olunur. O latın hərfi "r" ilə qeyd olunur. "r" hesablanması, adətən, bu düsturla hesablanır:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad (11)$$

Burada $\overline{X}$ və $\overline{Y}$ - x və y göstəricilərinin orta riyazi qiymətidir, σ_X və σ_Y kvadrat kənarlaşmasıdır, n – ölçülərin sayıdır (yoxlanılanların).

Məs: yüngül atletika üzrə ixtisaslaşmış I kurs tələbələri bu kontrol tapşırıqları (sınaqları) üzrə yoxlanılmışlar: 30 m məsafəni qaçmaq (saniyə nəticəsini x qeyd edək) və üçlük hoppanmaq (metr nəticəsini y qeyd edək). Sınaqda cəmi 10 nəfər iştirak edirdi. Sınağın nəticələrini və aralıq hesabları cədvəl 22-də göstərilib.

4.6. Korrelyasiya əmsalının hesabı

Cədvəl 22

№	x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3,5	8,05	-0,2	0,72	-0,144	0,04	0,5184
2	3,6	7,34	-0,1	0,01	-0,001	0,01	0,0001
3	3,6	7,37	-0,1	0,04	-0,004	0,01	0,0006
4	3,6	7,77	-0,1	0,44	-0,044	0,01	0,1936
5	3,8	7,04	0,1	-0,29	-0,029	0,01	0,0841
6	3,7	7,17	0	-0,16	0	0	0,0256
7	3,9	6,50	0,2	-0,83	-0,166	0,04	0,6889
8	3,4	8,15	-0,3	0,82	-0,246	0,09	0,6724
9	3,6	6,98	-0,1	-0,35	0,035	0,01	0,1225
10	3,6	6,97	-0,1	-0,36	0,036	0,01	0,1296
Cəmi	**36,8**	**73,34**			**0,563**	**0,23**	**2,4368**

Sınağın nəticələrinin səpələnməsi diaqramını Ş.12 göstərilib. Elə fərz edək ki, diaqramın forması xəttidir. Korrelyasiya əmsalını hesablamaq üçün (addım-addım yazacağımız) alqoritmdən istifadə edəcəyik.

Addım 1. $\overline{X}$ və $\overline{Y}$ hesablamaq. 1 və 2 sütunlarının nəticələrinin məbləğini $n-\alpha$ bölmək,

$$\overline{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{36{,}8}{10}=3{,}7;$$

$$\overline{Y}=\frac{\sum Y_i}{n}=\frac{73{,}34}{10}=7{,}33$$

Addım 2. (x-$\overline{x}$) - sütun 4 və (y-$\overline{y}$) - sütun 5 hesablamaq

Addım 3. Vurğu hasilləri (x-$\overline{x}$) (y-$\overline{y}$) və onların məbləğini - sütun 6 hesablamaq

Addım 4. $\sum$ (x-$\overline{x}$)^2 sütun 7 və $\sum$ (y-$\overline{y}$)^2 sütun 8-fərqlərinin kvadratlarının məbləğini hesablamaq, 4 və 5 sütunlarının qiymətlərini kvadrata yüksəltmək və alınan nəticələri yığmaq.

Addım 5. σ_x və σ_y hesablamaq (7 və 8 sütunlarının məbləğini (n-1) bölmək və alınandan kvadrat kök çıxarmaq).

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{0{,}23}{10-1}}\approx 0{,}16$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum(y-\overline{y})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{2{,}43}{10-1}}\approx 0{,}52$$

Addım 6. r-nı hesablamaq. Alınan qiyməti (11) düsturunda yerinə qoymaq:

$$r=\frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}=0{,}677$$

Beləliklə, 30 m məsafəyə qaçışın və yerində üçlük hoppanmanın (öyrənilən ixtisaslaşma üçün) nəticələrinin arasında mənfi orta statistik əlaqə qeyd olundu. Bu o deməkdir ki, qaçışda nəticənin təkmilləşməsi (vaxtın azalması) üçlük hoppanma nəticələrinin təkmilləşməsi ilə (artması) bağlıdır.

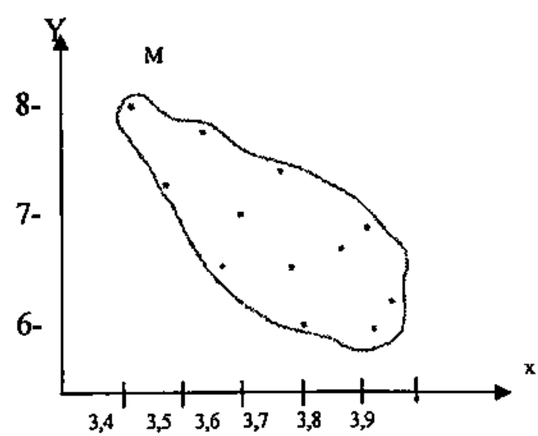
Bəzi hallarda əlaqənin sıxlığı aşağıdakı formula üzrə hesablanan determinasiya əmsalı D əsasında müəyyən olunur:

$$D=r^2\cdot100\%$$

Bu əmsal digər göstəricinin variasiyası ilə aydınlaşdırılan bir göstəricinin ümumi variasiyasının bir hissəsini təmin edir. Beləliklə, r=0,677 hesablanmış qiyməti üçün determinasiya əmsalı belə hesablanır:

$$D=(-0{,}677)^2\times100\%=45.8\% \qquad Y=a+b\cdot x$$

Beləliklə yalnız 30 m qaçışda və üçlük hoppanmada idman nəticələrinin 45.8% əlaqəsi onların qarşılıqlı təsiri ilə izah edilir. Variasiyanın qalan hissəsi (100%- 45.8%= 54.2%) digər təsadüfi (nəzərə alınmayan) faktların təsiri ilə izah olunur.



Topun atılma məsafəsi və atılma gücü arasındakı əlaqə (Şəkil. 12)

Sütunların №-si							
№ p/p	x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})$	$(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$
1	10,12	25,2	-0,92	-2,5	2,30	0,85	6,25
2	10,30	26,4	-0,74	-1,3	0,96	0,55	1,69
3	10,65	27,2	-0,39	-0,5	-0,19	0,15	0,25
4	11,00	27,9	-0,04	0,2	0,00	0,00	0,04
5	11,90	28,5	0,86	0,8	0,69	0,69	0,64
6	12,30	31,2	1,26	3,5	4,41	4,41	12,25
Cəmi	66,27	166,4	-	-	8,55	3,88	21,12

$$\bar{x}=\frac{66,27}{6}=11,04H; \quad \bar{y}=\frac{166,4}{6}=27,7m$$

$$r_{xy}=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2\cdot\Sigma(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$r_{xy}=\frac{8,55}{\sqrt{3,88\cdot 21,12}}=\frac{8,55}{9,05}=0,94$$

Statistik nəticə: 1) r_{xy}=0,94>0 - ilə əlaqədar olaraq x və y əlamətləri arasında korrelyasiya əlaqəsi mövcuddur; 2) r_{xy}=0,94 – nəticəsi intervalın yuxarı həddinə yaxın olduğu üçün $0\le|r_{xy}|\le 1$ – bu əlaqə sox sıxdır; 3) əmsal işarəsi müsbət olduğu üçün korrelyasiya düz mütənasibdir; yəni x – əlamətinin artması ilə y – əlaməti də paralel olaraq artır.

Pedaqoji nəticə: Sınaq iştirakçılarının topun atılma məsafəsinin uzaqlığı, onun atılma gücündən əsaslı surətdə asılıdır.

Yuxarıda verilən korrelyasiya əmsalı nümunəsi və ona müvafiq hesablama x və y əlamətləri ilə münasibətdədir. Onlar özlüyündə iki nizamlanmış cərgədən ibarətdir ki, variantlarına yalnız bir dəfə təsadüf edilir və ona görə də tezlik göstərici istisna təşkil edir.

İdmana həsr olunmuş tədqiqatlarda bu əmsal geniş yayılmışdır, xüsusilə Spirmen Əmsalı Düsturundan (SƏD-FKS) bütün korrelyasiya əmsalını hesablamaq üçün xüsusi düstur mövcuddur. Daha mürəkkəb variantlarda korrelyasiya əmsalını müəyyən etmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə olunur:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

burada $\overline{xy}$ - x_i və y_i göstəricilərinin hasilinin orta qiymətidir; σ_x, σ_y - x və y göstəricilərinin orta kvadratik yayınmasıdır.

4.7. Korrelyasiyanın ranq əmsalı. (Spirmen əmsalı)

Ranq əmsalı göstərir ki, əlaqə sıxlığı əlamətlərin özlərinin arasında deyil, onların sıra göstəriciləri arasında müəyyən edilir. Beləliklə, bir əlamətlər iyerarxiyasının digəri ilə əlaqəsi qiymətləndirilir.

Əlaqə sıxlığını aşkar etmək üçün korrelyasiyanın ranq əmsalından (Spirmen əmsalı) istifadə olunur.

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{1}^{n}(x_z - y_z)^2}{n(n-1)(n+1)} \qquad (12)$$

Burada ρ – korrelyasiyanın ranq əmsalı; x_z, y_z – tədqiq olunan əlamətlərin sıra yeri (ranqlar); n – aralarında əlaqə yaradılan əlamət cütlüklərinin sayıdır.

Ranq əmsalı Pirson əmsalına məxsus xüsusiyyətlərə malikdir və ona görə də onun statistik nəticələri Pirsol əmsalının statistik nəticələrinə müvafiq gəlir.

Nümunə – Təkbaşına konkisürmə proqramını yerinə yetirən fiquristlər** arasında məcburi x_z və sərbəst y_z tapşırıqları icra edərkən yerləşmə mövqeyi sıra ilə paylanır.

Sərbəst və məcburi tapşırıqların icrası zamanı yerləşmə mövqelərinin paylanması daxilində əlaqə mövcuddurmu?

** Fiqurist – mürəkkəb fiqurlar göstərən idmançı (Rusca-Azərbaycanda lüğət. – Bakı, 1978).

№ p/p	x_z	y_z	x_z-y_z	$(x_z-y_z)^2$
1	1	2	-1	1
2	2	1	1	1
3	3	3	0	0
4	4	5	-1	1
5	5	6	-1	1
6	6	4	2	4
7	7	7	0	0
Cəmi	-	-	-	8

Son nəticələr və əsas hesablamalar cədvəl 23-də verilmişdir.

$$n=7;\ n+1=7+1=8;\ n-1=7-1=6;$$

$$\rho=1-\frac{6\cdot 8}{7\cdot 8\cdot 6}=0{,}86$$

Korrelyasiyanın ranq əmsalı $\rho=0{,}86$ sıx qarşılıqlı əlaqənin mövcud olmasını təsdiq edir.

Statistik nəticə – Üzərində müşahidələr aparılmış idmançıların sərbəst və məcburi tapşırıqların icra etməsi arasında sıx əlaqə qeyd olunur. Korrelyasiyanın ranq əmsalı (12) aşağıdakı düstura çevrilə bilər:

$$\rho=1-\frac{6\Sigma(x_z-y_z)^2}{n(n^2-1)} \qquad (13)$$

Mütləq kəmiyyət sırasına müvafiq yerləşmələr əsasında ranqların təyin olunması nümunəsinə diqqət yetirək:

Nümunə – $x_i(c)$ – Həndbolçunun topun qapıya atdığı zamanı itələdiyi vaxtın göstəricisi; y_i (oyuna görə%) – topun qapıya düşmə ehtimalı.

İndi qiymətləndirək, görək səkkiz idmançıda bu göstəricilər arasında əlaqə varmı? Son nəticələr və əsas hesablamalar cədvəl 24-də verilmişdir.

Cədvəl 24

Topun qapıya atıldığı zaman itələndiyi vaxt və onun qapıya düşmə ehtimalı arasında əlaqə

№ p/p	x_i	y_i	x_z	y_z	x_z- y_z	$(x_z$-$y_z)^2$
1	0,18	24,2	1,5	8,0	-6,5	42,25
2	0,18	24,9	1,5	7,0	-5,5	30,25
3	0,17	25,6	3,0	6,0	-3,0	9,00
4	0,16	26,7	4,0	5,0	-1,0	1,00
5	0,15	27,8	5,5	4,0	1,5	2,25
6	0,15	28,4	5,5	3,0	2,5	6,25
7	0,14	29,9	7,0	2,0	5,0	25,00
8	0,13	30,5	8,0	1,0	7,0	49,00
Cəmi	-	-	-	-	-	**165,00**

Yada salaq ki, kəmiyyət göstəricilərinin bərabər qiymətlərinə onlara eyni ranqlar verilir. Bu məqsədlə müvafiq ranqlar onlar arasında bərabər bölünür.

Beləliklə, x_i əlaməti özündə 0,18-ə bərabər eyni ilk iki qiyməti daşıyır, məhz buna görə də onlar arasında bərabər paylanır:

$$\frac{1+2}{2}=1,5$$

Əgər qiymətlər eyni olmasaydı, o zaman onlar I və II sıra yerlərini bölüşəcəkdir. 0,17 – göstəricisi onlardan sonra III yeri tutur. IV yerdə isə – 0,16 göstəricisidir; V və VI - iki eyni göstərici – 0,15-dən ibarətdir və bu 5,5 ranqa malikdir; yəni

$$\frac{5+6}{2}=5,5 \text{ və i.a.}$$

Analoji qaydada y_i əlamətinin ranqlarını təyin edək. Birinci halda (x_i əlamətində) ranqlar böyük ədəddən kiçiyə doğru təyin olunmuşdur (0,18-dən, 0,13-ə kimi). Həmin prinsiplə y_i əlamətinə – ən kiçik ranqa da (I yer) 30,5 bərabər ən böyük ədəd təyin olunmalıdır (bax: cədvəl 24).

Yerdə qalan hesablamalar bu üsulla əvvəlki nümunələrdə olduğu kimi aparılır.

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 165}{8(8^2 - 1)} = 1 - 1{,}96 = -0{,}96$$

Statistik nəticə – Nəzərdən keçirdiyimiz əlamətlər x_i və y_i – arasında tərs mütənasib sıx korrelyasiya əlaqəsi mövcuddur.

Pedaqoji nəticə – Sınaq iştirakçılarının davranışında bir qanunauyğunluq müşahidə olunur: onlar topu atdıqda itələnmə vaxtı nə qədər az olarsa, o halda top qapıya daha dəqiq düşmüş olur.

Yekun olaraq onu da qeyd edək ki, korrelyasiyanın ranq əmsalının əsasında obyektin fərdi hesablaması deyil, obyektlərin ardıcıllıqla yerləşdirilməsinin hesablanması əhəmiyyət kəsb etdiyi üçün əlaqə sıxlığı zəif və tədqiqatın dəqiqliyi aşağı düşdüyü halda, informasiyanın təhlil surəti artır.

4.8. Korrelyasiya münasibətləri

Korrelyasiya əmsalı qarşılıqlı əlaqələrin düzxətli korrelyasiyasını, korrelyasiya münasibətləri isə – əyrixətli korrelyasiyasını əks etdirir.

Qarşılıqlı əlaqələrin düzxətli korrelyasiyasını, əyrixətli korrelyasiyadan fərqini tədqiqatın ilkin mərhələsində müəyyənləşdirmək mümkündür: əgər müşahidə olunan kəmiyyət göstəriciləri eynidirsə, deməli söhbət əyrixətli korrelyasiyadan gedir.

Korrelyasiya münasibətləri aşağıdakı düsturlarda ifadə olunmuşdur:

$$r_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (y' - y)^2}{\sum_1^n (y_i - y)^2}}$$

$$r_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x - x)^2}{\sum_1^n (x_i - x)^2}} \qquad (14)$$

$$r_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2 - \sum_1^n (y_i - y')^2}{\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (15)$$

$$r_{x/y} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 - \sum_1^n (x_i - x')^2}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

Burada $r_{y/x}$ – y-in x-dan asılılığını əks etdirən korrelyasiya münasibətləri; - $r_{x/y}$ x-in y-dən asılılığını əks etdirən korrelyasiya münasibətləri; x_i-y_i – əlamətin müşahidə olunan hesablanması, x' və y' - əlamətlərin orta xüsusiyyətləri; $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - əlamətlərin orta hesabı; n – tədqiq olunan qrupların həcmi.

Korrelyasiya əmsalından fərqli olaraq korrelyasiya münasibətləri həmişə müsbətdir. Çünki kökaltı göstəricinin ancaq müsbət hesabları istifadə olunur. Münasibətlərin qalan xüsusiyyətlərinin xarakteristikası əmsalın xüsusiyyətləri ilə üst-üstə düşür.

$$0 \leq r \leq 1$$

Göstərilən interval əlamətlərin qarşılıqlı əlaqəsinin sıxlığını qiymətləndirməyə imkan verir. r qiyməti 1-ə yaxın olduqca, əlaqə daha da sıx olur.

Korrelyasiya münasibətlərinin özünəməxsus xüsusiyyəti vardır. Hər bir əlamət cütlüyü iki münasibətlə dəyərləndirilir - $r_{x/y}$ – $r_{y/x}$. Əgər bu qiymətlər öz aralarında yaxındırlarsa, deməli əlamətlərin bir-birinə təsir qüvvəsi bərabərdir. Lakin əgər bu qiymətlər aşkarcasına fərqlənirlər, o zaman ola bilsin ki, üstün göstərici təsir gücünə malikdir. Məsələn, x və y əlamətlərinin bir-birinə təsirini araşdırarkən tədqiqatçı müəyyən edir ki: $r_{x/y}$=0,9; $r_{y/x}$=0,8.

$r_{y/x}$=0,8 olan bu hesablamada – x – əlamətinin – y – əlamətindən daha çox asılılığı (0,9) təsdiq olunur. Belə ki, - y – əlaməti daha sərbəstdir.

4.9. Korrelyasiya əmsalının etibarlığının qiymətləndirilməsi

Hesablanmış həqiqi korrelyasiya əmsalı seçmə yığım üçün nəzərdə tutulub. Seçmə yığım baş yığımdan götürülür. Ona görə də hər bir hesablamada korrelyasiya əmsalının xətası mövcuddur. Bu xəta baş yığımın və seçmənin korrelyasiya əmsalları arasındakı fərqdir.

Çoxsaylı müşahidələr üçün korrelyasiya əmsalının xətası (dəqiqliyi) aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$S_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}},$$

burada S_r – korrelyasiya əmsalının dəqiqliyi;

r - korrelyasiya əmsalı;

n – seçmənin həcmi.

Müşahidələrin sayı n<30 olarsa, korrelyasiya əmsalının xətası (dəqiqliyi) bu düsturla hesablanır:

$$S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$$

Korrelyasiya əmsalının etibarlığı Styüdentin t – kriteriyasının köməyi ilə təyin olunur:

$$t_{hes} = \frac{r}{S_r} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Styüdentik t_{kr} kritik (böhran) qiyməti $(t_{\alpha,k})$, burada α - əhəmiyyət səviyyəsi, k=n-2 Styüdent cədvəlindən götürülür.

Əgər $t_{hes} > t_{kr}$, onda hesablanılan korrelyasiya əmsalı ($1-\alpha$) ehtimallığı ilə sıfırdan fərqlidir.

Məsələ 13. Atletin ştanqa təkanı və yerindən hündürlüyə tullanma nəticələri arasındakı korrelyasiya əmsalı r=0,855. Korrelyasiya əmsalının etibarlığını qiymətləndirin.

Həlli. Korrelyasiya əmsalının dəqiqliyini hesablayaq:

$$S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-(0{,}855)^2}{13-2}} = 0{,}156$$

$$t_{hes}=\frac{r}{S_r}=\frac{0,855}{0,156}=5,48$$

Styüdent cədvəlindən

$$t_{kr}\,(\alpha=0,001,\ k=11)=4,44$$

$$t_{hes}>t_{kr};$$

Deməli, r=0,855 sıfırdan əhəmiyyətli fərqlənir.

İki yığımın korrelyasiya əmsallarının arasındakı fərqin dəqiqliyini və etibarlığını qiymətləndirmək üçün Fişerin Z çevrilməsindən istifadə etmək daha rahatdır. r-in Z-tə çevrilməsi aşağıdakı düsturla

$$Z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}\quad \text{və ya}$$

$$Z=1,151\cdot\lg\frac{1+r}{1-r}\quad \text{yerinə yetirilir.}$$

Bu göstəricinin üstünlüyü ondadır ki, o normal paylanmaya daha tez yaxınlaşır. Ona görə z – göstəricisi kiçik həcmli yığımlar üçün daha etibarlıdır.

r-in z-tə çevrilməsini cədvəl vasitəsi ilə etmək mümkündür (bax Əlavələr. cədvəl 2.)

Z-in dəqiqliyi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$S_z=\frac{1}{\sqrt{n-3}},$$

etibarlıq isə

$$t_{hes}=\frac{z}{S_z}$$

Misal. r=0,57, n-19 üçün z qiyməti cədvəldən (Əlavələr: cədvəl 2) götürülür.

$$z=0,648$$

Dəqiqlik hesablanır:

$$S_z=\frac{1}{\sqrt{19-3}}=0,25$$

onda

$$t_{hes} = \frac{0,648}{0,25} = 2,592$$

Cədvəldən (Əlavələr. cədvəl 1)

k=n-2=19-2=17 – sərbəstlik dərəcəsi və

α=0,02 – əhəmiyyət səviyyəsi üçün t kriteri təyin olunur: t=2,567

$t_{hes}=2,592>2,567=t_{kr}$ olduğundan hesablanmış korrelyasiya əmsalı etibarlıdır.

Tədqiqatlarda adətən iki korrelyasiya əmsalı müqayisə edilir. Müqayisənin məqsədi: iki korrelyasiya əmsalı arasındakı fərqin etibarlı və ya təsadüfi olmasının təyinidir.

İki seçmə yığımın korrelyasiya əmsalı arasındakı fərqin etibarlığı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 + 3}}},$$

burada z_1 və z_2 – korrelyasiya əmsalına münasib olan qiymətlər (bax. Əlavələr. Cədvəl 2)

Hesablanmış t qiymətinə görə ehtimal normal interval ehtimallar cədvəli ilə və ya n=∞ üçün Styüdent cədvəlindən təyin olunur.

4.10. Korrelyasiya əmsalının etibarı sərhədlərinin qiymətləndirilməsi

Əgər korrelyasiya əmsalı seçmə yığmadan təyin edilib və onun yəqin olması məlumdursa, onda orta xəta vasitəsi ilə baş yığımın korrelyasiya əmsalı üçün etibarı sərhədləri təyin etmək mümkündür:

$$r - t \cdot S_r \leq \widetilde{R} \leq r + t \cdot S_r \quad ,$$

burada R – baş yığımın korrelyasiya əmsalı;

r – seçmə yığımın korrelyasiya əmsalı;

S_r – korrelyasiya əmsalının xətası (dəqiqliyi).

Təcrübədə 0,95 və 0,99 ehtimallıqla t=1,96 və t=2,58 qiymətlər götürülür.

Kəmiyyətin paylanması normal paylanmaya yaxınlaşdıqda ehtibarlı sərhədlər $\tilde{Z}$ vasitəsi ilə təyin olunur.

$$\tilde{Z}-t\cdot S_{z}\leq \tilde{Z}\leq +t\cdot S_{\tilde{z}}$$

Etibarlı sərhədlər qurulduqdan sonra $\tilde{z}$-i r çevirmək olar.

Misal. n=19, r=0,57

Ehtibarlı sərhədləri təyin edin.

Həlli. Cədvəldən (bax Əlavələr. Cədvəl 2) götürülür ki, $\tilde{z}$=0,648

$$S_{\tilde{z}}=\frac{1}{\sqrt{19-3}}=0{,}25$$

$$0{,}648-1{,}96\cdot 0{,}25\leq \tilde{\tilde{Z}}\leq 0{,}648+1{,}96\cdot 0{,}25$$

$$0{,}158\leq \tilde{\tilde{Z}}\leq 1{,}138$$

Cədvələ görə $\tilde{Z}$=1,138 r=0,81 münasibdir

$\tilde{Z}$=0,158 r=0,16 münasibdir

Beləliklə, $\tilde{R}$ korrelyasiya əmsalı üçün etibarı sərhədlər:

$$0{,}16\leq \tilde{R}\leq 0{,}81$$

4.10 Korrelyasiya əlaqəsinin hesablanması

İdmanda keyfiyyət və kəmiyyət əlamətlərini öyrənərkən məlum olur ki, onlar bir-biri ilə bağlı şəraitdə baş verirlər. Bu əlamətlərin bir-biri ilə bağlığını (təsvirini) aşağıdakı məsələ üzərində açıqlayaq.

Öncə göstərilən nəzəriyyəyə əsaslanaraq həndbolçu-qızlardan ibarət yığma komandanın üzvləri üzərində aparılmış testlərin nəticələrinə əsaslanaraq iki əlamətin: sağ əlin dinamometriyası və topun atılma uzunluğu arasındakı əlaqənin sıxlığını təyin edək.

2007-ci il ərzində həndbolçu-qızlar komandasının üzvlərinin vaxtaşırı göstərdikləri hərəkətlərin nəticələri qeydə alınıb və əldə edilən nəticələr əsasında hesablamalar aparılıb. Bütün bu hesablamalar cədvəl və qrafik şəklində göstərilib. Topun (1 kq metsebol) atılma uzunluğu beş dəfə ölçülüb.

Əldə edilən nəticələr aşağıdakı cədvəldə verilib (cədvəl 25.).

1-ci sətirdə göstərilən hər bir idmançının beş göstəricisi əsasında orta qiymət təyin edilib və korrelyasiya əmsalının hesablanması cədvəli tərtib edilib (cədvəl 26).

Cədvəl 25.

№	sağ əlinin dinamometriyası (kq)	topun atılma uzunluğu (m)					topun atılma uzunluğunun orta qiyməti
1	34	15,60	16,40	16,00	15,70	17,30	16,2
2	34	14,80	16,20	15,80	15,20	17,10	15,9
3	36	14,40	15,60	20,00	15,40	17,20	16,5
4	42	14,40	14,70	15,80	17,80	16,40	15,8
5	42	16,50	16,90	15,00	14,70	17,60	16,1
6	46	15,10	13,20	15,30	16,80	17,00	15,5
7	40	15,50	16,10	16,00	6,80	19,60	16,8
8	32	16,20	16,20	18,00	15,80	17,40	16,8
9	50	16,90	17,40	19,20	18,80	19,60	18,6
10	40	16,00	17,20	18,20	17,80	19,60	17,8
11	38	15,10	16,60	21,10	17,80	20,40	18,2
12	36	15,70	15,50	16,50	15,60	17,10	16,1

Cədvəl 26.

№	x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
1	34	16,2	-5,2	-0,5	27,04	0,25	2,6
2	34	15,9	-5,2	-0,8	27,04	0,64	4,16
3	36	16,5	-3,2	-0,2	10,24	0,04	0,64
4	42	15,8	2,8	-0,9	7,84	0,81	-2,52
5	42	16,1	2,8	-0,6	7,84	0,36	-1,68
6	46	15,5	6,8	-1,2	46,24	1,44	-8,16
7	40	16,8	0,8	0,1	0,64	0,01	0,08
8	32	16,8	-7,2	0,1	51,84	0,01	-0,72
9	50	18,6	10,8	1,9	116,64	3,61	20,52
10	40	17,8	0,8	1,1	0,64	1,21	0,88
11	38	18,2	-1,2	1,5	1,44	2,25	-1,80
12	36	16,1	-3,2	-0,6	10,24	0,36	1,92
	470	**200,3**			**307,68**	**10,99**	**15,92**

Cədvəldə göstərilən nəticələrə əsaslanaraq korrelyasiya əmsalını hesablayaq.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{470}{12} = 39{,}166 \approx 39{,}2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{200{,}3}{12} = 16{,}691 \approx 16{,}7$$

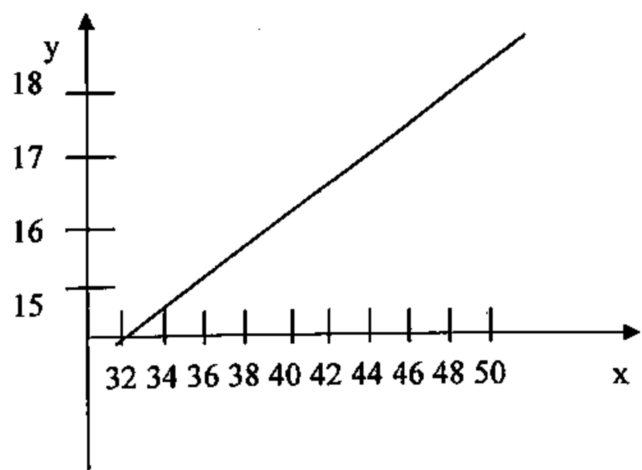
$$D_x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{307{,}68}{12} = 25{,}64$$

$$D_y = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{10{,}99}{12} = 0{,}92$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{25{,}64} = 5{,}06$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{0{,}92} = 0{,}96$$

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{15{,}92}{12 \cdot 5{,}06 \cdot 0{,}96} = \frac{15{,}92}{58{,}29} = 0{,}27$$



Şəkil 13.

Araşdırılan məsələdə x və y əlamətlər arasındakı korrelyasiya asılılığı diaqramda əks olunub.

Korrelyasiya əmsalının dəqiqliyini aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:

$$S_r = \frac{1 - r^2_{xy}}{\sqrt{n}}$$

burada r_{xy} - korrelyasiya əmsalı, n - əlamətlərin sayı.

$$S_r = \frac{1 - 0{,}27^2}{\sqrt{12}} = 0{,}16$$

Beləliklə, hesablanmış korrelyasiya əmsalının həqiqi qiyməti (0,27+0,16)-dır.

Korrelyasiya əmsalının xətası (səhvi) tapıldıqdan sonra, korrelyasiyanın ehtimallığı da tapılmalıdır. Korrelyasiyanın ehtimallığnı tapmaq üçün korrelyasiya əmsalını korrelyasiyanın dəqiqlik qiymətinə bölmək lazımdır. Korrelyasiyanın ehtimallığını aşağıdakı düsturla hesablayırıq:

$$t = \frac{r_{xy}}{S_r} = \frac{0{,}27}{0{,}36} = 1{,}6875$$

Sərbəstlik dərəcəsi S=n-2=12-2=10 və əhəmiyyət səviyyəsi a = 0,05 olduqda Styudent cədvəlindən t-kriterinin qiymətini götürək

$$t_{as} = t_{0,05;10} = 2{,}23$$

$$t < t_{as}, \text{ yəni } 1{,}6875 < 2{,}23$$

onu göstərir ki, x və y əlamətləri arasında statistik asılılıq mövcuddur və etibarlıdır.

Seçimi korrelyasiya əmsalı üçün etibarlı intervalı təyin edək:

n=12 və a=0,05 əhəmiyyət səviyyəsi üçün Styudent cədvəlindən tapırıq $t_{a,n} = t_{0,05;12}$=1,78. Onda etibarlı interval seçimi korrelyasiya əmsalı üçün aşağıdakı bərabərsizliklə təyin olunur:

$$r_{xy} - t_{a,n}\frac{1 - r^2_{xy}}{\sqrt{n}} \le R_{xy} \le r_{xy} + t_{n,a}\frac{1 - r^2_{xy}}{\sqrt{n}}$$

burada r_{xy} - hesablanmış korrelyasiya əmsalı,

$t_{n,a}$ - Styudentin t-kriterisi,

$\frac{1 - r^2_{xy}}{\sqrt{n}}$ - seçimi r_{xy} korrelyasiya əmsalının orta kvadratik yayınma qiyməti.

$$\Delta r = \pm t_{n,a}\frac{1-r^2_{xy}}{\sqrt{n}} = \pm 1{,}78\frac{1-0{,}27^2}{\sqrt{12}} = \pm 0{,}28$$

$$r_{xy} - \Delta r \le R_{xy} \le r_{xy} + \Delta r$$

$$0{,}27 - 0{,}28 \le R_{xy} \le 0{,}27 + 0{,}28$$

$$-0{,}01 \le R_{xy} \le 0{,}55$$

Beləliklə, r_{xy}=0,27 üçün korrelyasiya əmsalının həqiqi qiyməti (-0,01)-dən (+0,55) qədər intervalında yerləşə bilər. Korrelyasiya əmsalının daha dəqiq qiymətləndirilməsi üçün sınaqdan (testdən) keçənlərin sayı bir neçə yüz olmalıdır.

Determinasiya əmsalı əlamətlər arasındakı əlaqənin sıxlığını qiymətləndirir.

$$D = r^2 \cdot 100\%$$
$$D = (0{,}27) \cdot 100\% = 27\%$$

Beləliklə, hesablanmış korrelyasiya əmsalı üçün r=0,27 determinasiya əmsalı D=27% onu göstərir ki, yalnız 27% əlamətlər bir-birindən asılıdır, yəni sağ əlin dinamometriyası və topun atılması uzunluğu göstəriciləri arasındakı asılılıq 7,29%. Qalan hissə (100%-27%=73%) digər nəzərə alınmayan faktorlardan asılıdır.

Əldə edilən hesablamalara əsaslanaraq aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

1) r_{xy}=0,27 qiyməti onu göstərir ki, sağ əlin dinamometriyası və topun uzağa atılma əlamətləri arasında olan korrelyasiya əlaqəsi zəifdir və müsbətdir.

2) korrelyasiya əmsalın xətası ±0,16 buradan aydın olur ki, korrelyasiya əmsalının həqiqi qiyməti

$$r_{xy} = 0{,}27 \pm 0{,}16$$

3) Styudent cədvəlinə əsaslanaraq α=0,05 əhəmiyyət səviyyəsi və dərəcəsi n=10 üçün $t_{0,05;10}$=2,23 və $t<t_{0,05;10}$ (1,6875<2,23) onu göstərir ki, təyin olunmuş korrelyasiya əmsalı (r_{xy}=0,27) P=1- α=0,95 ehtimallığı ilə ehtibarlıdır.

4) hesablanmış korrelyasiya əmsalı üçün r=0,27 determi-

nasiya əmsalı D=7,29% onu göstərir ki, yalnız 27% əlamətlər bir-birindən asılıdırlar, yəni sağ əlin dinamometriyası və topun atılma uzunluğu göstəriciləri arasında asılılıq 27%.

Test nəticələrinin təhlili əsasında həndbol komandasının məşqçisinə tövsiyə olunur ki, məşq zamanı sağ əlin gücünü artıran hərəkətlərə daha çox diqqət yetirilsin.

§5. Reqressiya analiza

5.1. Reqressiya tənliyi

Korrelyasiya əmsalını öyrənən zaman məlum oldu ki, iki və ya üç göstərici arasında asılılığı korrelyasiya yolu ilə öyrənmək mümkün olduğu halda, bu əlaqələrin formalarını, birinin dəyişilməsindən asılı olaraq digərinin dəyişməsi səbəbini korrelyasiya əlaqəsi aydınlaşdırmır.

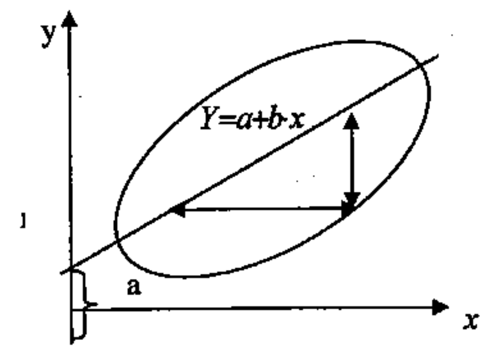
Dəyişən göstəricilər arasındakı əlaqəni reqressiya qanunları aydınlaşdırır. Son zamanlarda idmanda reqressiyadan daha geniş miqyasda istifadə edilir. Sadə korrelyasiyanı öyrənən zaman x və y-in bir-birindən asılı olaraq dəyişməsi qarşıda dururdu, halbuki reqressiyada əlavə olaraq bu əlaqənin növünü, məqsədini və səbəbini aydınlaşdırmaq düşünülür. Əgər dəyişən göstərici iki olarsa, reqressiya ikitərəfli olur. Belə ki, əgər göstəricilər x və y olarsa, bir tərəfdən x-i y-ə görə, digər tərəfdən y-i x-ə görə təyin etmək lazımdır.

Reqressiya bir neçə yolla ifadə edilə bilər. Onlardan reqressiyanın empirik xəttini qurmaq, reqressiyanın bərabərliyini aydınlaşdırmaq və reqressiya əmsalını hesablamaq yollarını göstərmək olar. Birinci iki üsul reqressiyanı qrafiki olaraq ifadə etməyə imkan verir.

Praktiki tədqiqatlarda paylanma diaqramının (korrelyasiya sahəsinin) riyazi tənliklə təqribi təsvir edilməsi ehtiyacı yaranır.

Ən sadə xətti asılılıq halında korrelyasiya sahəsi düz xətlə əvəz edilə bilər.

Xətti asılılıq üçün korrelyasiya ellipsi tənliklə ifadə olunur: $Y=a+b\cdot X$



(Şəkil.12 qaçışda və üçlük tullanmada nəticələr arasında asılılıq)

Korrelyasiya asılılığın bu riyazi ifadəsi reqressiya tənliyi adlanır. Reqressiya analizində əsas mərhələ Y – təsadüfi kəmiyyət ilə X – sərbəst dəyişən arasındakı asılılığın qurulmasıdır.

Burada a və b – reqressiya tənliyinin parametrləridir.

Asılılıq xətti olmazsa, onu parabola, hiperbola və digər riyazi tənliklərlə təsvir etmək olar.

5.2 Reqressiya tənliyinin əmsallarının hesablanması

Reqressiya əmsalı $b_{x/y}$ və $b_{y/x}$ kimi işarə edilir. Reqressiya əmsalını x-i y görə və y-i x görə aşağıdakı düsturlarla təyin edirlər:

$$b_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad ; \qquad b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

burada r – korrelyasiya əmsalı,

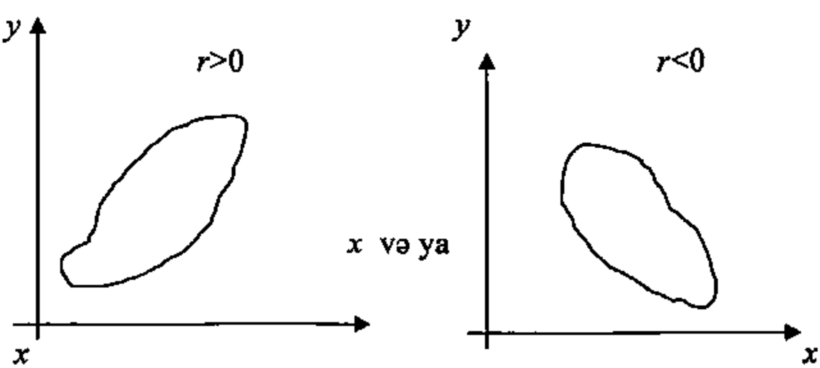
σ_x, σ_y - orta kvadratik yayınma (meyl)

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-1}}$$

Reqressiya əmsalının qiyməti $b_{y/x}$ x əlamətinin bir ölçü dəyişilməsinin x əlamətinin göstəricilərinə necə təsirini göstərir. Əgər reqressiya əmsalının $b_{y/x}$ işarəsi mənfidirsə, onda x əlamətinin bir ölçü qədər artması y-in bir ölçü qədər azalmasını göstərir. Əgər əlamətlər arasında korrelyasiya asılılığı xəttidirsə, yəni korrelyasiya sahəsi ellips şəklindədir, onda x-in y-dan y-ın isə x-dan asılılığını iki düzxətli tənliklərlə təsvir etmək olar. Bu tənliklər reqressiya tənlikləri adlanır.

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1 + b_{y/x} \cdot x \\ x &= a_2 + b_{x/y} \cdot y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{- düz tənlik} \\ &\text{- tərs tənlik} \end{aligned}$$



burada x və y – təsadüfi dəyişənlər,

$b_{y/x}$ və $b_{x/y}$; a_1 və a_2 – reqressiya əmsalları

$a_1 = \overline{Y} - b_{y/x} \cdot X$; $a_2 = \overline{X} - b_{x/y} \cdot Y$,

burada $\overline{X}$, $\overline{Y}$ - X və Y əlamətlərin orta qiymətləri

$$b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \quad b_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Reqressiya tənliyini aşağıdakı kimi təsvir etmək olar:

$$Y - \overline{Y} = b_{y/x}(X - \overline{X})$$

$$X - \overline{X} = b_{y/x}(Y - \overline{X})$$

Reqressiya tənliyinin keyfiyyətini qiymətləndirmək üçün qalıq orta kvadratik yayınma (meyl) hesablanır:

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \cdot \sqrt{1 - r^2} \quad \text{və} \quad \sigma_{x/y} = \sigma_x \cdot \sqrt{1 - r^2}$$

Bu qiymətlər mütləq olduğundan tənliklər bir-biri ilə müqaisə oluna bilməz. Ona görə tənliyin nisbi xəta qiyməti hesablanmalıdır:

$$\delta_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\bar{y}} \cdot 100\% \quad \text{və} \quad \delta_{x/y} = \frac{\sigma_{x/y}}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

$r=\pm 1{,}00$ olarsa, onda xətanın qiyməti sıfırdır, əgər $r=0$, onda xətanın qiyməti – maksimumdur. Düz tənlikdə qalıq orta kvadratik yayınma (meyl) y nəticələrinin reqressiya xətti oblastında x nəticələrinə uyğun səpələnməsini xarakterizə edir və əksinə – tərs tənlik üçün.

Misal. $\bar{x}=3{,}70, \quad \bar{y}=7{,}33$

$$\sigma_x = 0{,}16, \quad \sigma_y = 0{,}52$$

r=-0,677 olarsa, reqressiya tənliyinin əmsallarını hesablayın.

Həlli.

$$y=a_1+b_{y/x}\cdot x$$

$$b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -0{,}677\frac{0{,}52}{0{,}16} = -2{,}20$$

$$a_1 = \bar{y} - b_{y/x} \cdot \bar{X} = 7{,}33 - (-2{,}20) \cdot 3{,}7 - 15{,}47$$

$$x = a_2 + b_{y/x} \cdot y$$

$$b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0{,}677\frac{0{,}16}{0{,}52} = -0{,}21$$

$$a_2 = \bar{x} - b_{y/x} \cdot \bar{Y} = 3{,}7 - (-0{,}21) \cdot 7{,}33 = 5{,}24$$

Hesablanılan a və b əmsalları ilə tənlik aşağıdakı kimi yazılır:

$$y=15{,}47-2{,}20\cdot x$$
$$x=5{,}24-0{,}21\cdot y$$

Qalıq orta kvadratik meyl hesablanılır:

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \cdot \sqrt{1-r^2} = 0{,}52 \cdot \sqrt{1-(-0{,}677)^2} = 0{,}38$$

$$\sigma_{x/y} = \sigma_x \cdot \sqrt{1-r^2} = 0{,}16 \cdot \sqrt{1-(-0{,}677)^2} = 0{,}18$$

Tənliyin xətasını hesablayaq:

$$\delta_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{0{,}38}{7{,}33} \cdot 100\% = 5{,}2\%$$

$$\delta_{x/y} = \frac{\sigma_{x/y}}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0{,}18}{3{,}7} \cdot 100\% = 4{,}9\%$$

Beləliklə, x=5,24-0,21·y tənliyinin xətası kiçikdir, ona görə də idman nəticələrinin proqnozunda üstünlük bu tənliyə verilir.

5.3 Reqressiya əmsalının xətası

Reqressiya əmsalının xətası aşağıdakı düsturla hesablanılır:

$$S_{b_{yx}} = \frac{b_{y/x}}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}}$$

Burada $S_{by/x}$ – reqressiya əmsalının xətasıdır,

$$b_{y/x} = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2 - \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}}{n-2}}$$

$S_{by/x}$ üçün X və Y yerləri dəyişilir.

Etibarliliq Styüdentin t – kriteri vasitəsi ilə təyin olunur və düsturla hesablanır:

$$t = \frac{b_{y/x}}{S_{by/x}}$$

Əgər reqressiya əmsalı r, σ_x, σ_y vasitəsi ilə hesablanıbsa, onda reqressiya əmsalının xətası

$$S_{by/x} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$$ bərabərdir.

b_1 və b_2 reqressiya əmsallarının fərqinin xətası

$$S_{d(b_1-b_2)}=\sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{\sum(x_1-\bar{x}_1)^2}+\frac{S_2^{\,2}}{\sum(x_2-\bar{x}_2)^2}}$$

burada

$$S_{(1,2)}=\frac{\sum(y-\bar{y})^2-\dfrac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}}{n-2}$$

Müşahidələrin sayı nisbətən az olduqda (n<30) reqresiya əmsallarının xətalarının fərqi düsturla hesablanır:

$$S_{d(b_1-b_2)}=\sqrt{\frac{(n_1-2)S_1^{\,2}+(n_2-2)\cdot S_2^{\,2}}{n_1+n_2-4}\cdot\left(\frac{1}{\sum(x_1-\bar{x}_1)^2}+\frac{1}{\sum(x^2-\bar{x}^2)^2}\right)}$$

Reqresiya əmsallarının fərqinin etibarlılığının (yəqinliyinin) təyini üçün Styüdentin t – kriterisi hesablanır: $t=\dfrac{b_1-b_2}{S_{d(b_1-b_2)}}$

§7. Parametrlərin qiymətləndirilməsi

Baş yığımın təsviri üçün ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi modellərindən istifadə olunur. Bununla bağlı ehtimalların paylanması əsas məlumatı verir. Bu halda paylanma 2 əsas parametrlə (riyazi gözləmə və standart meyl) təyin olunur.

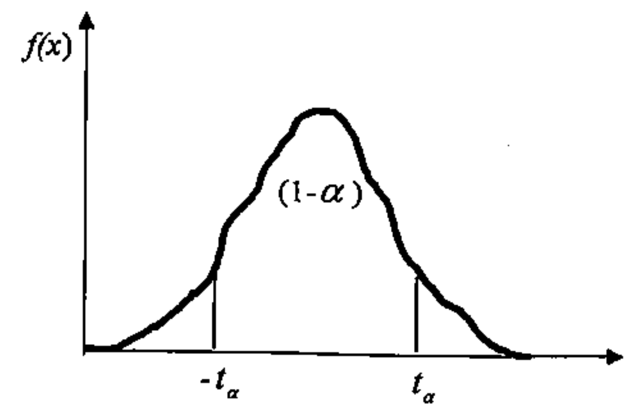
Qiymətləndirmə nəzəriyyəsində – seçmə zamanı baş yığım parametrlərinin qiymətləri və bu qiymətlərin alınma prosesi – qiymətləndirmə adlanır. Seçmə göstəricilərə əsasən baş yığım parametrlərinin qiymətlərinin təyin olunması nöqtəvi qiymətləndirmə adlanır.

Parametrlərin həqiqi qiymətlərinin böyük ehtimalla daxil olduğu intervalların sərhədlərinin təyin edilməsinə – interval qiymətləndirilməsi deyilir.

7.1 İnam intervalı

Məlum seçmə xarakteristikası $(\bar{x}, \sigma)$ üçün ümumi yığımın uyğun parametrlərinin ehtimal edilən intervalını təyin etmək olar. Baş parametrləri etibarı qəbul etməyə imkan verən ehtimala inam ehtimalı deyilir. Adətən, inam ehtimalı üçün 0,95; 0,99; 0,999 qiymətləri götürülür. Bu qiymətlərə 95%, 99% və 99,9% uyğun gəlir.

İnam ehtimalının səviyyəsinin seçilməsi tədqiqatçının praktiki məqsədinə uyğun olmalıdır. Qiymətləndirilən baş parametrlərin verilmiş ehtimalla yerləşdiyi interval inam intervalı adlanır.



Riyazi statistikada adətən 100(1-α)%-lı inam intervalından danışılır. Burada (1- α) inam ehtimalıdır, α-isə hansı kiçik ədəddir və baş parametrin inam intervalından kənara çıxması ehtimalını göstərir: α=0,05, α=0,01, α=0,001.

Normal paylanmış ümumi yığımın $\bar{X}_0$ orta qiyməti üçün inam intervalını təyin edək. n – həcmli seçmənin orta qiymətini $\bar{X}$

$t = \dfrac{\bar{x} - \bar{x}_0}{S_{\bar{x}}}$ düsturu ilə normalaşdıraq.

Burada $\bar{x}_0$ - qiymətləndirilən parametr – baş cəmin orta qiyməti;

$S_{\bar{x}}$ - orta qiymətin standart xətası;

t kəmiyyəti f=n-1 sərbəstlik dərəcəsinin Styüdent t – paylanmasına malikdir.

Həqiqi $\bar{x}_0$ parametrinin 100 (1-α)% ehtimalla yerləşdiyi inam intervalını təyin etməlidir. Bunun üçün α (məsələn 0,05) qiymət verilir. İnam ehtimalı Styüdent t – paylanmasının əyrisi altında – t_α –dən t_α qədər sahəyə uyğun gəlir. Onda inam intervalı aşağıdakı kimi olur:

$$-t_\alpha \le \frac{\bar{x}-\bar{x}_0}{S_{\bar{x}}} \le t_\alpha \qquad \text{və ya}$$

$$\bar{x}-t_\alpha \cdot S_{\bar{x}} \le \bar{x}_0 \le \bar{x}+t_\alpha \cdot S_{\bar{x}}$$

Bu da inam intervalının standart yazılmış formasıdır. Və

$$S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

nəzərə alaraq aşağıdakı formada yazmaq olar:

$$\bar{x}-t_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x}_0 \le \bar{x}+t_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

7.2 Statistik xarakteristikalar üçün inam intervalının qurulması

Seçmə – 100 basketbolçu, idman institutun tələbələrinin bədən uzunluğudur. Bu seçmə üçün aşağıdakı statistik xarakteristikalar alınıb.

orta qiymət $\bar{x}$=184,65 sm

orta kvadratik meyl σ=6,51 sm

variasiya əmsalı V=3,52%

Bu xarakteristikalar baş cəmi zəruri qiymətləndirmirlər, ona görə də aşağı və yuxarı hədd qiymətlərini təyin edirlər.

Baş orta qiymət M üçün təyin etmək lazımdır.

$X_{aş} \le M \le X_{yux}$

$X_{aş}$ və X_{yux} qiymətlərini təyin etmək üçün əhəmiyyət səviyyəsini α götürmək və ya inam ehtimallığı q=1-α

$X_{aş}$ və X_{yux} hədlərinə inam hədləri deyilir və düsturla hesablanır:

$$X_{aş(yüx)} = \overline{X} \pm U_{\alpha} \cdot S_{\bar{x}},$$

Burada U_{α} - verilmiş α səviyyəsi üçün normalanmış yayınmanın qiyməti,

S_{x} - orta qiymətinin standart xətası $(S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Verilmiş ölçülər üçün təyin edək

$$S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6{,}51}{\sqrt{100}} = 0{,}65$$

U_{σ}=1,96 α=0,05 səviyyə üçün (q=1-0,05=0,95)

$X_{aş} = \overline{X} - U_{\alpha} \cdot S_{\bar{x}} = 184{,}65 - 1{,}96 \cdot 0{,}65 = 183{,}38$

$X_{yux} = \overline{X} + U_{\alpha} \cdot S_{x} = 184{,}65 + 1{,}96 \cdot 0{,}65 = 185{,}92$

α=0,001 əhəmiyyət səviyyəsi üçün (q=1-0,001=0,999)

$U_{\alpha} = 3{,}29$

$X_{aş} = \overline{X} - U_{\alpha} \cdot S_{\bar{x}} = 184{,}65 - 3{,}29 \cdot 0{,}65 = 182{,}51$

$X_{yux} = \overline{X} + U_{\alpha} \cdot S_{x} = 184{,}65 + 3{,}29 \cdot 0{,}65 = 186{,}79$

Beləliklə, verilmiş baş cəm üçün müxtəlif əhəmiyyət səviyyələri ilə inam intervalı aşağıdakı kimi təyin olunub.

$\alpha = 0{,}05$ əhəmiyyət səviyyəsi üçün $183{,}38 \le M \le 185{,}92$

$\alpha = 0{,}001$ əhəmiyyət səviyyəsi üçün $182{,}51 \le M \le 186{,}79$

Beləliklə, 95% müşahidə olunan idmançıların bədən uzunluğunun orta qiyməti (183,38-185,92 sm) intervalında yerləşir.

99,9% idmançıların bədən uzunluğu (182,51-186,79 sm) intervalında yerləşir.

Əhəmiyyət səviyyəsi (α) yüksək olduqda qiymətləndirilən statistik xarakteristikanın inam intervalı daha genişdir.

σ^2 dispersiyası üçün inam intervalı aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\sigma^2_{aş(yux)} = \sigma^2 \pm U_\alpha \cdot S_{\sigma 2},$$

burada $S_{\sigma 2} = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n}}$ - dispersiyanın standart xətası; α =0,05 əhəmiyyət səviyyəsi üçün $U_\alpha = 1,95$

$$\sigma_{aş}^2 = 6,51^2 - 1,96 \cdot 6,51^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{100}} = 30,63$$

$$\sigma_{yux}^2 = 6,51^2 - 1,96 \cdot 6,51^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{100}} = 54,13$$

Beləliklə, α =0,05 səviyyəsi üçün baş cəm dispersiyasının inam intervalı alınır:

$$30,63 \le \sigma^2 \le 54,13$$

Variasiya əmsalı üçün inam intervalları təyin olunur:

$$V_{aş(yux)} = V \cdot \frac{1}{1 \pm \overline{U}_\alpha \sqrt{1 + 2 \cdot V^2}},$$

Burada $$\overline{U}_\alpha = \frac{U_\alpha}{\sqrt{2(n-1)}}$$

$\alpha = 0,05$ əhəmiyyət səviyyəsi üçün $U_\alpha = 1,96$

$$\overline{U}_\alpha = \frac{1,96}{\sqrt{2 \cdot (100-1)}} = 0,14$$

$$V_{aş} = V \cdot \frac{1}{1 + \overline{U}_\alpha \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot V^2}} = 3,52 \frac{1}{1 + 0,14\sqrt{1 + 2 \cdot 3,52^2}} = 2,055$$

$$V_{aş} = V \cdot \frac{1}{1 \_ \overline{U}_\alpha \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot V^2}} = 3,52 \frac{1}{1 - 0,14\sqrt{1 + 2 \cdot 3,52^2}} = 12,17$$

Beləliklə, baş cəmin variasiya əmsalı üçün inam intervalı $2,05 \le V \le 12,17$ $\alpha = 0,05$ əhəmiyyət səviyyəsi

§8. Statistik hipotezlərin yoxlanması

Əhəmiyyət kriterisi

İdmanda bəzi hadisələrin analizi zamanı bir sıra göstəricilərin ölçülməsi üçün çox vaxt yekunlaşdırıcı nəticə çıxarmağa lazım gətirir. Məsələn, məşqdən sonra 15 nəfər güləşçidən 3-də qeyritam (natamam) bərpaolunma müşahidə edilir. Buna əsaslanaraq məşqin ağırlığı haqda söyləmək olmaz. Əgər bu xoşagəlməz fakt 15 nəfər idmançının hamısında müşahidə olunarsa, onda məşqin düzgün qurulmaması haqda deyə bilərik. Bu halda seçimin reprezentativliyi əsasında nəticə çıxarmaq olar. Bu məsələ və həmçinin ayrı-ayrı qrupların orta nəticələrinin müqayisəsi, qarşılıqlı əlaqə əmsalının etibarlığının qiymətləndirilməsi və digər məsələlərin həlli statistik hipozetlərin yoxlanması üsulları ilə arapılır.

Riyazi üsullarla yoxlanılan ölçü nəticələrinin statistik xarakteristikalarına münasib fərziyyələr – statistik hipotez adlanır.

Adətən, statistik hipotezlər baş yığımı nəzərdən keçirir.

Tutaq ki, müayinə əsasında I kurs tələbələrin orta boyu - $\overline{X}_1$. Eyni zamanda, öyrənilən yaş qrupu üçün avropa miqyasında bu göstərici $\overline{X}_0$.

Deməli, $\overline{X}_0$ - baş yığım xarakteristikası

$\overline{X}_1$ - seçmənin xarakteristikasıdır.

Fərz edək ki, bizim tələbələrin orta boyu avropa tələbələrinin orta boyuna bərabərdir. Hipotez, hansındakı müqaisə olunan yığımlar arasında fərq yoxdur sıfır hipotez adlanır və H_0 kimi işarə olunur.

Sıfır hipoteza əks olunan hipotez – alternativ adlanır və H_1 kimi işarə olunur.

Bizim misalda sıfır hipotez $H_0 : (\overline{X}_1 = \overline{X}_0)$ kimi, alternativ isə $H_1 : (\overline{X}_1 > \overline{X}_0)$ və ya $H_1 : (\overline{X}_1 < \overline{X}_0)$ kimi göstərmək olar.

Statistik xarakteristikalarının müqaisəsində çox nadir halda onların mütləq bərabərlik halı ilə rastlaşırıq. Hər hansı təsadüfi və ya qanunauyğun səbəbdən onlar bir-birindən fərqlənirlər.

Statistik hipotezin yoxlanması zamanı məqsəd ondadır ki, təsadüfi təsirləri qanunauyğun təsirlərdən ayırmaq (seçmək).

Aydındır ki, əgər fərq (meyl) çox kiçikdirsə, onda onun təsadüfi olması ehtimalı çox böyükdür və əksinə əgər meyl böyükdürsə – onun təsadüfi olması ehtimalı kiçikdir.

Statistik hipotezlərin yoxlanmasında tədqiqatçının qərarını tam əminliklə qəbul etmək olmaz. Burada həmişə səhv qərarın qəbul edilmə riski mövcuddur. Bu risk dərəcəsinin qiymətləndirilməsi statistik hipotezin yoxlanmasının mahiyyətini təşkil edir. Hipotezlərin yoxlanması zamanı baş verən xətaları – səhvləri - iki yerə ayırmaq olar.

1. Həqiqi fərziyyənin rədd etmə ehtimalına 1-ci növ səhv deyilir.

2. Səhv fərziyyə qəbulunun ehtimalına 2-ci növ səhv deyilir.

Hipotezin qəbul və ya rədd edilməsi müəyyən kriterinin əsasında aparılır. Qabaqcadan verilmiş ehtimallıqla həqiqi hipotezin qəbulu və səhv hipotezin rədd edilməsi qanununa statistik kriteri deyilir.

I-ci növ səhvin ehtimalına kriterinin əhəmiyyət səviyyəsi deyilir və α ilə işarə olunur.

Tədqiqatçı əhəmiyyət səviyyəsini seçə bilər. Əhəmiyyət səviyyəsi meyl (fərq) ehtimalını xarakterizə edir. Ən geniş yayılmış səviyyələr $\alpha = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}001$.

Məsələn, $\alpha = 0{,}01$ səviyyə onu göstərir ki, seçmə qiymət orta hesabla 100 müsahidədə 1 dəfə təsadüf edə bilər.

$q = 1 - \alpha$ kəmiyyətinə inam ehtimalı deyilir.

Əhəmiyyət səviyyəsi $\alpha = 0{,}05$ olduqda inam ehtimalı q=1-0,05=0,95 bərabərdip. Beləliklə, hipotezlərin yoxlanmasının əsas mərhələləri aşağıdakılardır:

1. Sıfır hipotezin tərtibi (hansını ki, sonra rədd və ya qəbul etmək lazımdır).

2. Əhəmiyyət səviyyəsinin seçilməsi.

3. Statistik xarakteristikaların seçmə qiymətlərinin təyin edilməsi (seçmə cəmin ölçülməsi və ya müşahidə əsasında).

4. Statistik hipotezin yoxlanması üçün kriterinin seçilməsi.

5. Seçilmiş əhəmiyyət səviyyəsi üçün kriterinin hesabi və böhran qiymətlərinin müqaisəsi. Müqaisə nəticəsinə əsaslanaraq hipotezin qəbul və ya rədd edilməsi.

Fərz edək ki, təcrübədə hündürlüyə tullanan gənc idmançıların 2 qrupu iştirak edir.

1-ci qrup – ənənəvi proqram üzrə məşq edir.

2-ci qrup – xüsusi hərəkətlər kompleksi üzrə məşq edir.

Alınan göstəricilər əsasında

1) nəticələrin variasiyalığı artıb: $\delta_2 > \delta_1$

2) orta nəticə 5 sm yüksəlib: $\mu_2 - \mu_1 = 5sm$

Orta qiymətlər arasındakı fərq 5 sm olduqda, demək olar ki, yeni hərəkət kompleksi effektivdir.

Lakin, bu zaman hansı (xətalara) səhvlərə yol verilib deyə bilmərik, çünki iki məşq üsulu arasında fərqlərin olub-olmamasını dəqiq sübut etmək mümkün deyil.

Seçmə göstəricilərinin sıfır hipotezi ödəyib – ödəmədiyini dəqiq müəyyən edən metodlara əhəmiyyət kriterisi deyilir. Adətən, hipotezlərin yoxlanma proseduraşı aşağıdakı ardıcıllıqla aparılır:

1. Seçmə göstəricilərə əsasın statistik kriteri adlanan hər hansı bir kəmiyyətin qiyməti hesablanır. Bu kriteri, adətən, məlum standart paylanmaya malik olur (məsələn, normal paylanma, Styudent t paylanması, Fişerin F paylanması və s.)

2. Kriterinin hesablanmış qiyməti onun böhran qiyməti ilə müqaisə edilir. Böhran qiymət uyğun cədvəldən götürülür.

3. Müqaisənin nəticəsi əsasında hipotezin qəbul və ya rədd edilməsi haqda qərar qəbul olunur.

Əgər, kriterinin hesablanmış qiyməti böhran qiymətini aşmır, onda verilmiş əhəmiyyət səviyyəsində H_0 hipotezi qəbul edilir. Bu halda baş yığımlar arasındakı fərqi ancaq seçimin təsadüfliyi ilə izah etmək olar.

Əgər verilmiş əhəmiyyət səviyyəsi üçün kriterinin hesablanmış qiyməti böhran qiymətindən böyükdürsə, onda baş yığımlar arasındakı fərq qəbul olunur, yəni H_0 hipotezi rədd edilir. Bu halda deyirlər ki, müşahidə olunan fərq statistiki baxımdan əhəmiyyətlidir.

Praktiki əhəmiyyət barədə rəy hadisəni öyrənən tədqiqatçı tərəfindən verilir və burada həqiqi kriteri – onun təcrübə və intuisiyasıdır. Statistik əhəmiyyət kriterisi tədqiqatlarda istifadə olunan formal dəqiq alətdir. Əhəmiyyət kriterilərini üç tipə bölürlər:

1. Parametrik kriterilər.

Bu kriterilər baş yığımın parametrlərinin paylanma hipotezlərinin yoxlanmasına xidmət edir.

2. Qeyri-parametrik kriterilər.

Bu kriterilər baş yığımın parametrlərinə istinad etmədən hipotezləri yoxlayır.

3. Uzlaşma kriterilər.

Baş yığımın və seçmə yığımın paylanmasını əvvəlcə qəbul edilmiş nəzəri modeli ilə uzlaşdıran (razılaşdıran) hipotezləri yoxlayır.

8.1. Statistik etibarlılıq

Statistik etibarlılığın bədən tərbiyəsi və idman praktikasında əhəmiyyətli rolu var. Eyni bir baş cəmdən bir neçə seçmə təyin etmək mümkündür. Statistikada seçmələrin müqayisəsinə baxılır.

- əgər onlar əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənmirlər, yəni faktiki eyni bir baş cəmdən seçiliblər, onda onlar arasındakı fərq statistiki əhəmiyyətsizdir.

-əgər seçmələr arasındakı fərq əhəmiyyətlidir, yəni onlar müxtəlif baş cəmlərdən götürülüb, onda həmin fərq statistiki etibarlıdır.

Seçmələrin statistik etibarlılığın qiymətləndirilməsi bədən tərbiyəsi və idmanda müxtəlif məsələlərin həlli deməkdir. Məsələn, təlimin eyni metodları, tapşırıq və test komplekslərin yoxlanması, eksperimental və kontrol qrupların müqayisəsi və s. Bunun üçün statistik etibarlılığın kriterisi tətbiq olunur. Bu kriteri müqayisə olunan seçmələr arasındakı fərqin olması və onun etibarlılığını təyin edir.

Bütün kriterilər iki qrupa ayrılır: parametrik və qeyri parametrik.

Parametrik kriteri normal paylanma qanunun əsas göstəricilərinin təyini nəzərdə tutur (orta qiymət $\bar{x}$ və orta kvadratik meyl σ). Parametrik kriteri daha dəqiq və konkret hesab olunur.

Bədən tərbiyəsi və idmanda daha geniş istifadə olunan statistik etibarlılığın kriterisi aşağıdakılardı:

- Styüdent kriterisi,
- Fişer kriterisi,
- Vilkolson kriterisi,
- Van-dep-Varden kriterisi.

Styüdent kriterisi. Styüdent kriterisi parametrik kriteridir və seçmənin göstəricilərinin müqayisəsi üçün istifadə olunur. Seçmələr həcmlərinə görə müxtəlif ola bilərlər.

Styüdent kriterisi aşağıdakı kimi təyin olunur.

Styüdent kriterisi düsturla hesablanır:

$$t = \frac{\bar{d}}{S_d}$$

Burada $d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ müqayisə olunan seçmələrin orta qiymətləri,

$$\bar{X}_d = \frac{\sum d_i}{n}$$

S_d – orta qiymətlərin standart meyli.

Baş cəmin həcmi N məlum deyilsə və $n \geq 20$ olarsa

$S_d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ düsturu ilə hesablanır.

$$\sigma = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

n – seçmənin həcmi.

Baş cəmin həcmi N=∞, yəni məlum deyilsə n<20 olarsa, onda

$$S_d = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}$$

Baş cəmin həcmi N məlumdursa və $n \geq 20$ olduqda

$$S_d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}$$ düsturu ilə təyin olunur.

Əhəmiyyət səviyyəsi α=0,05 və sərbəstlik dərəcəsi ədədi f=n-1 üçün Styüdent cədvəlindən t_{kr} qiyməti götürülür (bax. Əlavələr. Cədvəl 1).

Əhəmiyyət kriterisi onu göstərir ki, orta fərq bu fərqin statistik səhvindən neçə dəfə böyükdür.

İki seçmənin orta fərqi ilə fərqlənməsi o vaxt etibarlı sayılır ki, hesablanılan kriteri cədvəldən götürülən kriteridən böyükdür, yəni $t_{hes}>t_{kr}$. Buna əsaslanaraq sıfır hipoteza H_o rədd edilir, yəni seçmələrin əlamətlərinin dəyişilməsinə öyrənilən faktorun təsiri qəbul olunur.

İki seçmənin orta fərqlə fərqlənməsi o vaxt etibarsız sayılır ki, hesablanılan kriteri cədvəl qiymətindən yüksək deyilsə, yəni $t_{hes}<t_{kr}$. Bu halda sıfır hipoteza H_0 qəbul olunur, yəni tədqiqat olunan seçmələr arasında fərq yoxdur. Fərq ola bilər, lakin kifayət qədər olmayan reprezentativlikdən (görkəmliyindən) və qrupun həcminin kiçikliyindən onlar gözə görünmür. Daha böyük həcmli seçmədə təkrar tədqiqatlar fərqin etibarlığını aşkar edə bilər. t kriterinin qiyməti Styüdent cədvəlində iki dəyişən kəmiyyətdən asılı olaraq göstərilir: sərbəstlik dərəcəsi (f) və əhəmiyyət səviyyəsi (α). Pedaqoji tədqiqatlar üçün əhəmiyyət səviyyəsi α =0,05 götürülür.

Sərbəstlik dərəcəsi ədədi f=n-1 kimi təyin olunur.

Məsələ. Eksperimental qrupda qumbaranı uzağa tullanması nəticələri yeni hərəkət kompleksini tətbiq etməzdən əvvəl (x) və sonra (y) göstəriciləri verilib.

x:	50	43	40	40	40	40	38	38	40
y:	49	49	46	45	46	44	42	44	40

Məşqdən əvvəl və sonra qumbaranı uzağa tullanmasının orta nəticələri arasında fərqin etibarlığını təyin edin.

Həlli.

№	x_i	y_i	$d_i=y_i-x_i$	$d_i-\bar{d}$	$(d_i-\bar{d})^2$
1	59	49	-1	-5	25
2	43	49	6	2	4
3	40	46	6	2	4
4	40	45	5	1	1
5	40	46	6	2	4
6	40	44	4	0	0
7	38	42	4	0	0
8	38	44	6	2	4
9	40	40	0	-4	16
n=9	369	405			58

$$\bar{x}=\frac{369}{9}=41$$

$$\bar{y}=\frac{405}{9}=45$$

$$\bar{d}=\bar{y}-\bar{x}=45-41=4$$

$$\sigma_d=\sqrt{\frac{\Sigma(d_i-\bar{d})^2}{n}}=\sqrt{\frac{58}{9}}=2{,}53$$

$$S_{\bar{d}}=\frac{\sigma_d}{\sqrt{n-1}}=\frac{2{,}53}{\sqrt{9-1}}=\frac{2{,}53}{\sqrt{8}}=0{,}89$$

$$t_{hes}=\frac{\bar{d}}{S_d}=\frac{4}{0{,}89}=4{,}49$$

Sərbəstlik dərəcəsi ədədi f=n-1=9-1=8

$$\alpha=0{,}05 \quad t_{kr}=2{,}31$$

$$t_{hes}>t_{kr} \;\; ; \; 4{,}76>2{,}31$$

Nəticə. Qurbaranın uzağa tullanmasının orta nəticələri arasında fərqi əhəmiyyətli və etibarlıdır.

Deməli, demək olar ki, qurmaranın uzağa tullanması nəticələrinin dəyişilməsi təsadüf deyil; onlar yeni hərəkət kompleksinin tətbiqi əsasında yaranıblar.

Fərz edək ki, t_{hes}=2,09. onda $t_{hes}<t_{kr}$. Bu halda demək olar ki, orta nəticələr arasında fərq əhəmiyyətli deyil və α=0,05 səviyyəsi üçün etibarsızdır, yəni qumbaranın uzağa tullanmasına yeni hərəkət kompleksinin təsiri sübut olunmayır. Bu halda eksperimenti böyük

həcmli seçimin üzərində təkrarən aparmaq lazımdır.

Fişer kriterisi. Fişer kritersi parametrik kriteriyalara aiddir, seçim göstəricilərinin yayınmasının müqayisəsi üçün tətbiq olunur. Bədən tərbiyyəsi və idmanda bu müqayisə idmançının funksional və texnika göstəricilərinin stabilliyini (sabitliyini) göstərir. Fişer kriterisi aşağıdakı ardıcıllıqla təyin olunur:

1. Fişer kriterisi F düsturla hesablanır.

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2},$$

burada σ_1^2, σ_2^2 – müqayisəvi seçmələrin dispersiyaları. Fişer kriterinin şərti ilə surətdə böyük dispersiya yerləşir, yəni F ədədi mütləq vahiddən böyükdür.

2. Əhəmiyyət səviyyəsi α =0,05 və sərbəstlik dərəcəsi hər iki seçmələr üçün hesablanılır:

$$k_1=n_1-1; \qquad k_2=n_2-1.$$

3. Fişer cədvəlindən F_{kr} tapılır.

4. F_{hes} və F_{kr} müqayisə edib, nəticə cixarilir:

-əgər $F_{hes} \geq F_{kr}$, onda seçmələr arasındakı fərq statistiki etibarlıdır;

-əgər $F_{hes} < F_{kr}$, onda seçmələr arasındakı fərq etibarsızdır.

Məsələ. I qrup tələbələr (28 nəfər) kontrol tapşırığı-turnikdə dartınma – yerinə yetirərək $\bar{x}_1 = 16$ dartınma, $\sigma_1 = 4$ statistik xarakteristikaları alınıb, II qrupda (26 nəfər) $\bar{x}_2 = 18$ və $\sigma_2 = 5$ alınıb. Qrupların fiziki səviyyəsini təyin edin.

Həlli. Fərz edək ki, I və II qrup statistik xarakteristikalarına görə eynidirlər. Bu zaman sıfır hipoteza $H_0 : (\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ kimi yazılır.

$$F_{hes} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} = 1{,}56$$

Sərbəstlik dərəcəsi: $k_2=n_2-1=26-1=25$

$k_1=n_1-1=28-1=27$

Əhəmiyyət səviyyəsi: α =0,05 götürülür.

Fişer cədvəlindən (bax. Əlavələr. Cədvəl 3).

$$F_{kr}=1,93$$

Beləliklə, $F_{kr}>F_{hes}$, 1,93>1,56, yəni sıfır hipotez $H_o:(\sigma_1^2=\sigma_2^2)$ q=1-α=1-0,05=0,95 ehtimallıqla rədd edilir. Deməli, turnikdə dartınma göstəricisinin dəyişkənliyi I və II qrupda əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir: I qrupun tələbələrin fiziki hazırlığı eyni səviyyədədir.

8.2 İki seçmənin orta qiymətlərinin müqayisəsi (asılı olmayan seçmələr)

İki seçmənin orta qiymətlərinin müqayisəsi zamanı hər ikisi eyni yığımdan olduğu üçün, bir birindən çox az fərqlənmə fərziyyəsi yoxlanılır. Bu halda aşağıdakı statistik xarakteristikalar məlumdurlar: $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \sigma_1, \sigma_2$ uyğun olaraq seçmələrin həcmləri n_1 və n_2

Əvvəlcə sıfır hipotez yazılır:

Sonra t_{hes} (hesabı) kriterinin qiyməti hesablanılır.

1. Seçmələrin həcmi bərabər, dispersiyaları isə müxtəlifdir.

$n=n_1=n_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$$t_{hes}=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\cdot\sqrt{n}$$

Sərbəstlik dərəcəsinin ədədi $f=2n-2$

2. Seçmələrin həcmləri və dispersiyaları müxtəlifdir.

$$n_1 \neq n_2, \quad \sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$t_{hes}=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Sərbəstlik dərəcəsinin ədədi $f=n_1+n_2-2$

3.Seçmələrin həcmləri müxtəlif, dispersiyaları isə bərabərdir.

$$n_1 \neq n_2, \quad \sigma_1 = \sigma_2$$

$$t_{hes}=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

Sərbəstlik dərəcəsinin ədədi $f=n_1+n_2-2$

Kriterinin qiymətini hesabladıqdan sonra, onu $t_{\alpha,f}$ böhran qiyməti ilə müqayisə edirik, ($t_{\alpha,f}$- styüdent cədvəlindən götürülür. bax Əlavələr. Cədvəl 1). Burada α - əhəmiyyət səviyyəsi: α=0,05, f – sərbəstlik dərəcəsi ədədidir.

t_{hes} və $t_{\alpha,f}$ müqayisəsi nəticəsində alınır:

- əgər $t_{hes}<t_{\alpha,f}$ olarsa, onda sıfır hipotezi

$H_o:(\bar{x}_1=\bar{x}_2)$ ehtimallıqla q=1-α qəbul olunur;

-Əgər $t_{hes}\geq t_{\alpha,f}$ olarsa, onda sıfır hipotezi $H_o:(\bar{x}_1=\bar{x}_2)$ ehtimallıqla q=1-α rədd edilir.

Yuxarıdakı məsələnin şərti

Misal. $\bar{X}_1=16,\ \alpha_1=4,\ n_1=28$

$\bar{X}_2=18,\ \alpha_2=5,\ n_2=26$

Burada seçmələrin həcmləri və dispersiyaları müxtəlifdir, ona görə t aşağıdakı düsturla hesablanılır.

$$t_{hes}=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{|16-18|}{\sqrt{\frac{4^2}{28}-\frac{5^2}{26}}}=1{,}61$$

Sərbəstlik dərəcəsinin ədədi $f=n_1+n_2-2=52$

Əhəmiyyət səviyyəsini α=0,05 götürək.

Styüdent cədvəlindən (bax. Əlavələr, cədvəl 1)

α=0,05 və f=52 olduqda $t_{\alpha,f}$=2,04

$t_{hes}<t_{\alpha,f}$ (1,61<2,04) olduğundan sıfır hipotezi $H_o:(\bar{x}_1=\bar{x}_2)$ q=1-α=0,95 ehtimallıqla qəbul olunur, yəni nəzərdə tutulduğu kimi qruplar bir-birindən əhəmiyyətli dərəcədə öyrənilən əlamət üçün fərqlənmir. Müşahidə olunan fərqi təsadüfi qəbul etmək olar.

8.3 Göstəricilər arasında statistik etibarlılığın təyin edilməsi

Statistik etibarlılıq, bir-biri ilə müqayisə olunan seçmələr arasındakı fərqin əhəmiyyətli olmasını göstərin. Əgər idmançılar qruplarını seçmə kimi təqdim etsək, onda onlar arasında əhəmiyyətli fərqin olduğunu və ya olmadığını təyin etmək olar.

Məsələ. Kontrol (x_i) və eksperimental (y_i) qruplarda idmançıların qaçış sürətinin nəticələrini (m/san) müqayisə edib, eksperimentin effektivliyini təyin edin.

Həlli. Qaçış nəticələri və onların hesablamaları aşağıdakı cədvəldə verilib. Kontrol qrupun nəticələrinin təhlili.

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot n_i$
1	3,6	2	7,2	-0,3	0,09	0,18
2	3,7	4	14,8	-0,2	0,04	0,16
3	3,8	5	19,0	-0,1	0,01	0,05
4	3,9	8	31,2	0,0	0,00	0,00
5	4,0	6	24,0	0,1	0,01	0,06
6	4,2	5	21,0	0,3	0,09	0,45
Cəmi	-	**30**	**117,2**	-	-	**0,85**

$$\bar{x} = \frac{117,2}{30} \approx 3,9(m/san)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{0,9}{30} = 0,03(m/san)^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{0,03} = 0,17 \approx 0,2(m/san)$$

$$\bar{x} \pm \sigma_x = 3,9 \pm 0,2(m/san)$$

Eksperimental qrupun nəticələrinin təhlili

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(y_i-\bar{y})^2 \cdot n_i$
1	3,7	3	11,1	-0,3	0,09	0,27
2	3,9	4	15,6	-0,1	0,01	0,04
3	4,0	9	36,0	0,0	0,00	0,00
4	4,1	8	32,8	0,1	0,01	0,08
5	4,2	4	16,8	0,2	0,04	0,16
6	4,3	2	8,6	0,3	0,09	0,18
Cəmi	-	**30**	**120,9**	-	-	**0,73**

$$\bar{y} = \frac{120,9}{30} \approx 4,03(m/san)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{0,73}{30} \approx 0,024(m/san)^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{0,024} \approx 0,155(m/san)$$

$$\bar{y} \pm \sigma_y = 4,03 \pm 0,2(m/san)$$

İki qrupun reprezentativlik xətasını təyin edək:

$$m_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{0,2}{\sqrt{30}} = 0,04(m/san)$$

$$m_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} = \frac{0,2}{\sqrt{30}} = 0,04(m/san)$$

Qrupların fərqini Styüdent kriterisi ilə təyin edək:

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = \frac{|3,9 - 4,0|}{\sqrt{0,04^2 + 0,04^2}} \approx 1,75$$

Sərbəstlik dərəcəsi ədədi $n_1+n_2-2=30+30-2=58$ və əhəmiyyət səviyyəsi $\alpha=0,05$ üçün t kriteri qiymətini cədvəldən götürürük (bax əlavələr. Cədvəl 1)

$t_{kr}=2,00$ $t_{hes}=1,75$

$2,00>1,75;$ $t_{kr}>t_{hes}$

Statistik nəticə: Seçmələrin bir-birindən fərqi statistik etibarlıdır.

Qaçış sürətinin nəticələri eksperimental qrupda daha yaxşı olduğu üçün eksperimenti effektli hesab etmək olar.

Məsələ. İdmançının ştanqa qaldırma sürəti məşqdən əvvəl (x_i) və sonra (y_i) dəfələrlə ölçülür. Göstəricilərin stabilliyini (etibarlılığını) təyin edin.

Həlli. Məşqdən əvvəl alınan göstəricilərinin təhlili

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
1	1,44	1	1,44	-0,06	0,0036	0,0036
2	1,48	2	2,96	-0,02	0,0004	0,0008
3	1,49	3	4,47	-0,01	0,0001	0,0003
4	1,50	6	9,00	0,00	0,0000	0,0000
5	1,52	5	7,60	0,02	0,0004	0,0020
6	1,54	3	4,62	0,04	0,0016	0,0048
Cəmi	-	**20**	**30,09**	-	-	**0,0115**

$$\bar{x} = \frac{30,09}{20} \approx 1,5(m/san)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{0,0115}{20} \approx 0,00061(m/san)^2$$

Məşqdən sonra alınan göstəricilərinin təhlili

№	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
1	1,49	4	5,96	-0,02	0,0004	0,0016
2	1,50	7	10,50	-0,01	0,0001	0,0007
3	1,52	6	9,12	0,01	0,0001	0,0006
4	1,53	1	1,53	0,02	0,0004	0,0004
5	1,54	1	1,54	0,03	0,0009	0,0009
6	1,55	1	1,55	0,04	0,0016	0,0016
Cəmi	-	**20**	**30,2**	-	-	**0,0058**

$$\bar{y} = \frac{30,2}{20} \approx 1,51(m/san)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{0,0058}{20} \approx 0,00030(m/san)^2$$

Nəticələrin stabilliyini (etibarlılığını) Fişer kriteri vasitəsi ilə təyin edək:

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{0,00061}{0,00030} \approx 2,03$$

P=0,95 və sərbəstlik səviyyəsi ədədi $k_1=k_2=20-1=19$ üçün F_{kr} qiyməti Fişer cədvəlindən götürülür. $F_{kr}=2,2$ (bax Əlavələr.

Cədvəl 3).

Statistik nəticə: $F_{hes}<F_{kr}$ yəni 2,03<2,2 olduqda, müqayisə olunan seçmələr arasındakı fərq statistiki etibarsız hesab olunur.

Beləliklə, idmançının məşqdən əvvəl və sonra göstərdiyi nəticələr arasındakı fərq əhəmiyyətli olmadığı üçün, onları stabil (etibarlı) hesab etmək olar.

Məsələ. Müxtəlif yaşlı üç qrup məktəblilərin: 10 yaşlı (x_i), 11 yaşlı (y_i) və 12 yaşlı (z_i) qol əzələlərin nisbi gücü təhlil olunub (H/10kq). Məktəblilər məşq etməyiblər və ölçülən göstəricilər onların yaş dəyişikliyin dinamikasını göstərir. Həmin dinamikanı qiymətləndirin.

Həlli. 10 yaşlı məktəblilərin göstəricilərinin təhlili

№	x_i	n_i	x_in_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\cdot n_i$
1	0,28	2	0,56	-0,04	0,0016	0,0032
2	0,30	4	1,20	-0,02	0,0004	0,0016
3	0,32	9	2,99	0,00	0,0000	0,0000
4	0,33	8	2,64	0,01	0,0001	0,0008
5	0,35	6	2,10	0,03	0,0009	0,0054
6	0,36	1	0,36	0,04	0,0016	0,0016
Cəmi	-	**30**	**9,74**	-	-	**0,0126**

$$\bar{x}=\frac{9,74}{30}=0,32$$

$$\sigma_x^2=\frac{0,0126}{30}\approx 0,0004$$

$$\sigma_x=\sqrt{0,0004}\approx 0,01$$

$$m_x=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\frac{0,02}{\sqrt{30}}\approx 0,0036$$

11 yaşlı məktəblilərin göstəricilərinin təhlili

№	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 \cdot n_i$
1	0,30	7	2,10	-0,03	0,0009	0,0063
2	0,33	8	2,64	0,00	0,0000	0,0000
3	0,34	7	2,38	0,01	0,0001	0,0007
4	0,35	6	2,10	0,02	0,0004	0,0024
5	0,36	1	0,36	0,03	0,0009	0,0009
6	0,37	1	0,37	0,04	0,0016	0,0016
Cəmi	-	**30**	**9,95**	-	-	**0,0119**

$$\bar{y} = \frac{9,95}{30} \approx 0,33; \qquad \sigma_y^2 = \frac{0,0119}{30} \approx 0,0004$$

$$\sigma_y = \sqrt{0,0004} \approx 0,02; \qquad m_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} = \frac{0,02}{\sqrt{30}} \approx 0,0036$$

12 yaşlı məktəblilərin göstəricilərinin təhlili

№	z_i	n_i	$z_i n_i$	$z_i - \bar{z}$	$(z_i - \bar{z})^2$	$(z_i - \bar{z})^2 \cdot n_i$
1	0,35	3	1,05	-0,03	0,0009	0,0027
2	0,36	5	1,80	-0,02	0,0004	0,0020
3	0,37	7	2,59	-0,01	0,0001	0,0007
4	0,39	6	2,34	0,01	0,0001	0,0006
5	0,40	5	2,00	0,02	0,0004	0,0020
6	0,41	4	1,64	0,03	0,0009	0,0036
Cəmi	-	**30**	**11,42**	-	-	**0,0116**

$$\bar{z} = \frac{11,42}{30} = 0,38; \qquad \sigma_z^2 = \frac{0,0116}{30} \approx 0,0004$$

$$\sigma_z = \sqrt{0,0004} \approx 0,02; \qquad m_z = \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}} = \frac{0,02}{\sqrt{30}} \approx 0,0036$$

Təhlil olunan seçmələri Styüdent və Fişer kriteriyaları vasitəsi ilə müqaisə edək. Styüdent kriterini hesablayaq.

$$t_1 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} = \frac{|0,32 - 0,33|}{\sqrt{0,0036^2 + 0,0036^2}} \approx 1,96$$

$$t_2 = \frac{|\bar{y} - \bar{z}|}{\sqrt{m_y^2 + m_z^2}} = \frac{|0,33 - 0,38|}{\sqrt{0,0036^2 + 0,0036^2}} \approx 9,80$$

Əhəmiyyət səviyyəsi α=0,05 və sərbəstlik dərəcəsi ədədi k_1=k_2=n_1+n_2-2=30+30-2=58 üçün Styüdent kriterinin qiyməti

t_{kr}=2,00 (bax Əlavələr. Cədvəl 1).

t_1=1,96<t_{kr}=2,00 – fərq statistiki etibarsızdır;

t_2=9,8>t_{kr}=2,00 – fərq statistiki etibarlıdır.

Fişer kriterini hesablayaq.

$$F_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{0,0004}{0,0004} \approx 1,0$$

$$F_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{0,0004}{0,0004} \approx 1,0$$

α=0,05 və k_1=k_2=30-1=29 üçün Fişer kriterinin qiyməti F_{kr}=1,9 (bax Əlavələr. Cədvəl 3).

F_1=1,0<F_{kr}=1,9, yəni fərq statistiki etibarsızdır;

F_2=1,0<F_{kr}=1,9, yəni fərq statistiki etibarsızdır.

Statistiki nəticə: 10 və 11 yaşlı məktəblilərin göstəriciləri statistiki etibarsızdır. 11 və 12 yaşlı məktəblilərin göstəriciləri etibarlıdır.

Qol əzələlərin nisbi gücü məktəblilərin yaşından asılı olaraq dinamik dəyişilir.

§6. Dispersiya analizi

İdman təcrübəsində bizi daha çox maraqlandıran sual: bir və ya bir neçə faktorların nəticəvi əlamətə (qeydə alınan) olan əhəmiyyətli təsiridir.

Dispersiya analizinin əsas məqsədi kənar faktorların əlaqəsi və nəticəvi əlamətə və göstəriciyə olan təsirinin qiymətləndirilməsidir. Fiziki hərəkətlər kompleksinin idman nəticəsinə əhəmiyyətli təsiri məsələsini araşdıraq. Bu məsələdə bir faktor tədqiq olunur, ona görə də məsələnin araşdırmasında bir faktorlu dispersiya analizindən istifadə olunur.

Faktorlar idarə olunan və idarə olunmayanlara ayrılırlar. Məsələn, məşq yükünün həcmi, idmançının ixtisası və təsnifatı – idarə olunan faktorlara aiddir, idmançının emosional vəziyyəti, iş qabiliyyəti, metroloji şərait – idarə olunmayan faktorlardır. Adətən, hər faktorun təsiri bir neçə qrup üzərində sınaqdan keçirilir. Belə qrupların sayı faktorun səviyyəsini xarakterizə edir.

Dispersiya analizi metodu əlamətin variasiyasının qiymətləndirmə təsirini faktor kimi qəbul etmək üçün imkan verir. Dispersiya analizinin əsas ideyası – müşahidə nəticələrinin ümumi variasiyasının iki komponentindən ibarət olmasındadır (qrupdaxili və qruparası variasiya).

Variasiya altında variantların kvadrat yayınma cəmi başa düşülür, yəni

$$\sum(x-\bar{x}_0)^2$$

Tədqiqat zamanı bir qrupun bir neçə dəfə testləşdirmə (sınaqlaşdırma) halı ilə rastlaşırıq. Nəticələrin təkrarında dispersiya analizinin elə modeli tədbiq olunur ki, burada qrupdaxili və qruparası variasiya arasındakı əlaqə nəzərə alınır. Bu model aşağıdakı kimi yazılır:

$$Q_{ümumi}=Q_{qa}+Q_{qd}$$

burada $Q_{ümumi}$ – ümumi variasiya;
Q_{qa} – qruparası variasiya;
Q_{qd} – qrupdaxili variasiya

Bu model testlər nəzəriyyəsində daha geniş istifadə olunur və dəfələrlə sınaq apardıqda testin etibarlığını qiymətləndirir.

Bu qanuna uyğunluğu misal üzərində izah edək. Tədqiq edilən 3 nəfər 2 cəhddə yerindən uzunluğa tullanmada aşağıdakı nəticələri göstəriblər.

Tədqiq edilənlər	1-ci cəhddin nəticəsi (sm)	2-ci cəhddin nəticəsi (sm)
1	210	212
2	207	208
3	216	210
orta nəticə	211	210

qrupdaxili variasiya

qruparası variasiya

Orta nəticələri təyin etmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə edilir:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\overline{X}_0 = \frac{210+207+216+212+208+210}{6} = 210{,}5$$

1-ci cəhddin orta nəticəsi (I qrup)

$$\overline{X}_1 = \frac{210+207+216}{3} = 211$$

2-ci cəhddin orta nəticəsi (II qrup)

$$\overline{X}_2 = \frac{212+208+210}{3} = 210$$

Kvadrat yayınma ümumi cəmi (ümumi variasiya) ümumi orta və hər nəticənin arasındakı variasiyanı müəyyən edir (1-ci və 2-ci cəhdlər) və düsturla hesablanır:

$$Q_{ümumi} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_o)^2$$

$Q_{ümumi}=(210-210{,}5)^2+(207-210{,}5)^2+(216-210{,}5)^2+(212-210{,}5)^2+(208-210{,}5)^2+(210-210{,}5)^2=51{,}5$

$$Q_{qa} = \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x}_o)^2 \cdot n_i$$

$$Q_{qa}=(211-210{,}5)^2 \cdot 3+(210-210{,}5)^2 \cdot 3=1{,}5$$

$$Q_{qd} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

Q_{qd}=(210-211)+(207-211)+(216-211)^2+(212-210)^2+(208-210)^2+(210-210)^2=50.

$Q_{ümumi}$, Q_{qa}, Q_{qd} nəticələrindən məlum olur ki, bərabərlik ödənilir.

$$51{,}5=1{,}5+50$$
$$51{,}5=51{,}5$$

Bu misalda fərz etmək olar ki, 1-ci cəhddin nəticələri 2-ci cəhddin nəticələrindən fərqlənmirlər. Onda bu fərziyyəni statistik hipotez şəklində yazmaq olar $Ho:(\overline{X}_1=\overline{X}_2)$

Fərz etsək ki, iki cəhd bir-birindən yalnız vaxt ölçüsü ilə fərqlənirlər. Onda demək olar ki, vaxt ölçüsü (iki cəhd arasındakı) idman nəticəsinə təsir göstərmir.

İdman nəticəsinə göstərilən faktorların sayından asılılıq dispersiya analizi birfaktorlu və çoxfaktorlu ola bilər.

9.1. Birfaktorlu dispersiya analizinin hesablanması

Fiziki hərəkətlər kompleksinin idman nəticəsinə əhəmiyyətli təsiri məsələsini araşdıraq. Bu məsələdə bir faktor tədqiq olunur, ona görə də məsələni araşdırmaq üçün bir faktorlu dispersiya analizindən istifadə olunur. Dispersiya analizi metodu əlamətin variasiyasının qiymətləndirmə təsirini faktor kimi qəbul etmək üçün imkan verir. Dispersiya analizin əsas ideyası müşahidə nəticələrinin ümumi variasiyasının iki komponentdən ibarət olmasındadır (qrupdaxili və qruparası variasiya). Tədqiqat zamanı, bir qrupun bir neçə dəfə testləşdirmə (sınaqlaşdırma) halı ilə rastlaşırıq. Nəticələrin təkrarında dispersiya analizinin elə modeli tətbiq olunur ki, burada qrupdaxili və qruparası variasiya arasındakı əlaqə nəzərə alınır.

Testlər nəzəriyyəsində bu model daha geniş istifadə olunur. Modelin tətbiqini aşağıdakı məsələ üzərində araşdıraq. İdmançı-həndbolçu qızlar (10 nəfər) aşağıdakı testlərdən keçiblər: top ilə qaçış, uzunluğa tullanma, üç qat tullanma. Hər üç test ilkin mərhələdə: fiziki hazırlığın cəmləşməsi mərhələsi əsasında keçirilib.

Sınaq müddətində idmançı-qızlar ümumi fiziki hazırlıqlarını yaxşılaşdırıblar. İsbat etmək lazımdır ki, bu yaxşılaşdırma ehtibarlıdı. Yoxlanılan hipotez bu cür təsvir edilir:

H_0: $(\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3)$, yəni fərz edirik ki, üç sınağın orta qiymətləri bərabərdir, həmçinin, idman nəticələrinin sınaqdan sınağa təkrarlanmasını qiymətləndirək. Bunun üçün qrupdaxili korrelyasiya əmsalını hesablamaq lazımdır, bu da testin etibarlıq əmsalı ilə eynidir (bərabərdir).

Sınağın nəticələri və aralıq hesablamalar aşağıdakı cədvəldə verilib.

Test - uzunluğa tullanma (metr)

№	1-ci sınaq	2-ci sınaq	3-cü sınaq	Sətirlərin cəmi $\Sigma x_{sət}$	Sətirlər cəminin kvadratı $(\Sigma x_{sət})^2$
1	2	3	4	5	6
1	2,35	2,33	2,38	7,06	49,8436
2	2,08	2,10	2,15	6,33	40,0689
3	2,25	2,30	2,40	6,95	48,3025
4	2,12	2,20	2,38	6,70	44,89
5	1,90	2,00	2,10	6,00	36,00
6	2,20	2,30	2,30	7,00	49,00
7	2,18	2,20	2,28	6,66	44,3556
8	1,96	2,15	2,18	6,27	39,3129
9	2,28	2,30	2,36	6,94	48,1636
10	2,08	2,18	2,20	6,46	41,7316
Sütunun cəmi $\Sigma x_{süt}$	**21,40**	**22,06**	**22,73**	**$\Sigma\Sigma x_{sət}$=66,19**	**$\Sigma(\Sigma x_{sət})2$= 441,6687**
Sütunun cəminin kvadratı $(\Sigma x_{süt})^2$	457,96	486,436	516,6529	**$\Sigma(\Sigma x_{süt})^2$=1461,265**	
$\bar{x}_1 = 2{,}140$ $\bar{x}_2 = 2{,}206$ $\bar{x}_3 = 2{,}273$ $\bar{x}_0 = 2{,}2063$				**$\Sigma\Sigma x^2$=147,3833**	

Nəticələrin ümumi sayını hesablayaq:

$N=n_1+n_2+n_3=10+10+10=30$

Sətirlərin cəmini hesablayaq (sütun 5):

1-ci sətir: 2,35+2,33+2,38=7,06
2-ci sətir 2,08+2,10+2,15=6,33 və s.

5-ci sütundakı ədədlərin cəmini hesablayaq:
$\Sigma\Sigma x_{sət}$=7,06+6,33+....+6,46=66,19

Sətir cəminin kvadratlarını hesablayaq:
1-ci sətir: $(7,06)^2$=49,8436
2-ci sətir: $(6,33)^2$=40,0689 və s.

6-cı sütunun cəmini hesablayaq:
$\Sigma(\Sigma x_{sət})^2$=441,6687

2-ci, 3-cü və 4-cü sütundakı ədədlərin cəmini hesablayaq:
2-ci sütun: $\Sigma x_{süt}$=21,40
3-cü sütun: $\Sigma x_{süt}$=22,06
4-cü sütun: $\Sigma x_{süt}$=22,73

Ədədlərin sütun cəminin kvadratlarını hesablayaq:
2-ci sütun: $(\Sigma x_{süt})^2$=457,96
3-cü sütun: $(\Sigma x_{süt})^2$=486,6436
4-cü sütun: $(\Sigma x_{süt})^2$=516,6529

Ədədlərin sütun cəminin kvadratlarının cəmini hesablayaq:
$\Sigma(\Sigma x_{süt})^2$=45,96+486,6436+516,6529=1461,2565

Qrupların və ümumi orta qiymətləri hesablayaq:

$$\bar{x}_1 = \frac{21,40}{10} = 2,14$$

$$\bar{x}_2 = \frac{22,06}{10} = 2,206$$

$$\bar{x}_3 = \frac{21,40 + 22,06 + 22,73}{30} = 2,2063$$

Qrup orta qiymətlər bir birindən fərqlənirlər. İsbat etmək lazımdır ki, bu fərq etibarlıdır.

Cədvəldəki nəticələrin kvadrat cəmini hesablayaq:

$\Sigma\Sigma x^2=(2,35)^2+(2,08)^2+....+(2,20)^2=1461,2565$

Ümumi variasiyanı hesablayaq;

$$Q_{üm} = \sum\sum x^2 - \frac{\sum\sum(x_{süt})^2}{n \cdot k}$$

$$Q_{üm} = 147,3833 - \frac{(66,19)^2}{30} = 147,3833 - 146,0372 = 1,3461$$

Qruparası variasiyanı hesablayaq:

$$Q_{qr.ar} = \frac{\sum(\sum x_{sūa})^2}{n} - \frac{(\sum\sum x_{sət})^2}{n \cdot k}$$

$$Q_{qr.ar} = \frac{1461,2565}{10} - \frac{(66,19)^2}{30} = 146,12565 - 146,0372 = 0,08845$$

Qrupdaxili variasiyanı hesablayaq:

$$Q_{qr.d} = \frac{\sum(\sum x_{sət})^2}{k} - \frac{(\sum\sum x_{sət})^2}{n \cdot k}$$

$$Q_{qr.d} = \frac{4416687}{3} - \frac{(66,19)^2}{30} = 147,2229 - 146,0372 = 1,1857$$

Qalıq variasiyanı hesablayaq:

$$Q_q = Q_{üm} - Q_{qr.ar} - Q_{qr.d}$$

$$Q_q = 1,3461 - 0,08845 - 1,1857 = 0,07195$$

Ümumi dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2{}_{üm} = \frac{Q_{üm}}{N-1} = \frac{1,3461}{30-1} = 0,0464$$

Qruparası dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2{}_{qr.ar} = \frac{Q_{qr.ar}}{k-1} = \frac{0,08845}{3-1} = 0,0442$$

Qrupdaxilı dispersiyanı hesablayaq:

$$\sigma^2{}_{qr.ar} = \frac{Q_{qr.d}}{n-1} = \frac{1,1857}{10-1} = 0,1317$$

Qalıq dispersiyanı hesablayaq;

$$\sigma^2_{qalıq} = \frac{Q_q}{(n-1)(k-1)} = \frac{0{,}07195}{(10-1)(3-1)} = 0{,}00399$$

$H_o : (\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3)$ hipotezin yoxlaması üçün F_1 hesablayaq:

$$F_1 = \frac{\sigma^2_{qr.ar}}{\sigma^2_q} = \frac{0{,}0442}{0{,}00399} = 11{,}07$$

$$F_2 = \frac{\sigma^2_{qr.d.}}{\sigma^2_q} = \frac{0{,}1317}{0{,}00399} = 30{,}5$$

Fişerin paylanma cədvəlinə əsasən a = 0,05 və sərbəstlik dərəcəsi

$$K_1 = k - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$K_2 = (n-1)(k-1) = (10-1)(3-1) = 18 \text{ üçün } F_{\alpha,k_1,k_2} = 3{,}55$$

$$3{,}55 < 11{,}07 (F_{\alpha,\gamma_1,\gamma_2} < F_1)$$

α=0,05 və sərbəstlik dərəcəsi

$$K_1=n-1=10-1=9$$

$$K_2=(n-1)(k-1)=(10-1)(3-1)=18$$

$$F_{\alpha,k_1,k_2} = 2{,}46$$

$$2{,}46 < 30{,}5 (F_{\alpha,k_1,k_2} \prec F_2)$$

Beləliklə, hipoteza $H_o : (\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3)$ 95%-li ehtimalla rədd edilir. Deməli, idmançı-qızlar, sınaq müddətində, test nəticələrini yaxşılaşdırıblar.

Öyrənilən faktorun (fiziki hərəkətlərin) test nəticəsinə təsirini hesablayaq:

$$\eta_1 = \frac{Q_{qr.ar}}{Q_{um}} = \frac{0{,}08845}{1{,}3461} = 0{,}0657$$

Qrupdaxili korrelyasiya əmsalını hesablayaq:

$$\eta_2 = \frac{\sigma^2_{qr.d} - \sigma^2_q}{\sigma^2_{qr.d}} = \frac{0{,}1317 - 0{,}00399}{0{,}1317} = 0{,}96$$

Hesablama nəticələrini cədvəl şəklində göstərək:

Variasiya	Kvadratlar cəmi	Sərbəstlik dərəcəsi	Dispersiya	F-kriteri
Ümumi	1,3461	N-1 30-1	0,0464	-
Qrupdaxili (sınaq arası)	1,1157	n-1 10-1	0,1317	F_2=30,5 α=0,05 $F_{\alpha,k_1,k_2}=2,46$
Qruparası	0,08845	k-1 3-1	0,0442	F_1=11,07α =0,05 $F_{\alpha,k_1,k_2}=3,55$
Qalıq	0,07195	(n-1)(k-1) (10-1)(3-1)	0,00399	-

İkinci test - top ilə 30 metr məsafəni qaçmaq. Testin nəticələri aşağıdakı cədvəldə göstərilib;

K	1-ci sınaq	2-ci sınaq	3-cü sınaq	Sətirlərin cəmi $\Sigma x_{sət}$	Sətirlər cəminin kvadratı $(\Sigma x_{sət})^2$
1	4,29	6,26	5,85	16,4	268,96
2	4,6	6,35	6,22	17,17	294,8089
3	4,54	6,15	6,36	17,05	290,7025
4	5,05	5,45	6,15	16,65	277,2225
5	4,95	6,00	6,85	17,60	309,76
6	4,83	5,80	6,22	16,85	283,922
7	4,6	5,81	6,40	17,11	292,7521
8	5,29	6,92	7,72	19,93	397,2049
9	4,5	5,57	6,34	16,41	269,2881
10	4,9	5,10	5,99	15,99	255,6801
Sütunun cəmi $\Sigma x_{süt}$	47,61	59,41	64,1	$\Sigma\Sigma x_{sət}$=171,12	$\Sigma(\Sigma x_{sət})^2$=2940,3016
Sütunun cəminin kvadratı $(\Sigma x_{süt})^2$	2266,7121	3529,5481	4108,81	$\Sigma(\Sigma x_{süt})^2$=9905,0702	
$\bar{x}_1=4,761$ $\bar{x}_2=5,941$ $\bar{x}_3=6,41$ $\bar{x}_0=5,704$				**ΣΣx2=995,6941**	

Dispersiya analizinin nəticələri aşağıdakı cədvəldə göstərilib:

Variasiya	Kvadratlar cəmi	Sərbəstlik dərəcəsi	Dispersiya	F-kriteri
Ümumi	19,62574	N-l 30-1	0,6767496	-
Qrapdaxili (sınaq arası)	4,03207	n-1 10-1	0,4480077	F_2=6,981 α=0,05 F_{α,k_1,k_2} =2,46
Qruparası	14,43856	k-1 3-1	7,21928	F,=1 56,243 a=0,05 F_{α,k_1,k_2} =3,55
Qalıq	1,15511	(n-l)(k-l) (10-1)(3-1)	0,0641727	-

Öyrənilən faktorun test nəticələrinə təsirini hesablayaq:

$$\eta_1 = \frac{Q_{qr.ar}}{Q_{um}} = \frac{14,43856}{19,62574} = 0,735$$

Qrupdaxili korrelyasiya əmsalı

$$\eta_2 = \frac{\sigma^2_{qr.d} - \sigma^2_q}{\sigma^2_{qr.d}} = \frac{0,448077 - 0,0641727}{0,4480077} = 0,8567$$ və ya

$(0,8567)^2 \cdot 100\% = 73,39\%$

Əldə edilən nəticələrə əsaslanaraq bu qənaətə gəlirik, məşq zamanı fiziki hərəkətlərin yerinə yetirilməsi test nəticələrinə bir o qədər əhəmiyyətli təsir göstərməyib.

	1-ci sınaq	2-ci sınaq	3-cü sınaq	Sətirlərin cəmi Σx_{sat}	Sətirlər cəminin kvadratı $(\Sigma x_{sət})^2$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	7,43	7,20	7,30	21,93	480,9249
2	6,60	6,55	6,65	19,80	392,04
3	6,89	7,10	6,65	20,64	426,0096
4	6,48	6,05	6,15	18,68	348,9424
5	5,50	5,50	5,54	16,54	273,5716
6	6,99	6,80	6,80	20,59	423,9481
7	6,81	6,74	6,80	20,35	414,1225
8	5,61	5,90	6,25	17,76	315,4176

1	2	3	4	5	6
9	7,35	6,85	6,70	20,90	436,81
10	6,60	6,15	6,45	19,20	368,64
Sütunun cəmi $\Sigma x_{süt}$	66,26	64,84	65,29	$\Sigma\Sigma x_{sat}$=196,39	$\Sigma(\Sigma x_{sat})^2$=3880,4267
Sütünun cəminin kvadratı $(\Sigma x_{süt})^2$	4390,3876	4204,2256	4262,7841	$\Sigma(\Sigma x_{sat})^2$=12857,397	
$\bar{x}_1 = 6,626$ $\bar{x}_2 = 6,484$ $\bar{x}_3 = 6,526$ $\bar{x}_0 = 6,5453$				$\Sigma\Sigma x^2$=1290,2799	

Dispersiya analizin nəticələri aşağıdakı cədvəldə göstərilib:

Variasiya	Kvadratlar cəmi	Sərbəstlik dərəcəsİ	Dispersiya	F-kriteri
Ümumi	4,6455	N-l 30-1	0,16	-
Qrupdaxili (sınaq arası)	7,8411	n-1 10-1	0,8712	F_2=-4,7528 α=0,05 $F_{\alpha,k_1,k_2}=2,46$
Qruparası	0,1053	k-1 3-1	0,05265	F_1=-0,2872 α=0,05 $F_{\alpha,k_1,k_2}=3,55$
Qalıq	-3,3009	(n-1)(k-1) (10-1)(3-1)	-0,1833	-

Öyrənilən faktorun test nəticələrinə təsirini hesablayaq:

$$\eta_1 = \frac{Q_{qr.ar}}{Q_{um}} = \frac{0,1053}{4,6455} = 0,0226$$

Qrupdaxili korrelyasiya əmsalmı hesablayaq:

$$\eta_2 = \frac{\sigma^2_{qr.d} - \sigma^2_q}{\sigma^2_{qr.d}} = \frac{0,8712 + (-0,1833)}{0,8712} = 1,05$$

Nəticə: α=0,05 və sərbəstlik dərəcəsi k_1 və k_2 üçün $F_{\alpha,k_1,k_2} > F_1$ və $F_{\alpha,k_1,k_2} > F_2$ 3,55 >-0,2872; 2,46>-4,7528

Aparılan tədqiqatlar və hesablamalar əsasında aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

Həndbolçu-qızların idman hazırlığına fiziki hərəkətlərin təsirini qiymətləndirərək aşağıdakı nəticələrə gəlirik:

1. Sınaqlar zamanı aparılan testlər etibarlıdır;
2. İdmançı qızların fiziki hazırlığı birsəviyyəlidir;
3. Uzunluğa tullanma və 30 metr məsafəyə qaçışda olan testlər idmançıların göstərdiyi nəticəyə müsbət təsir edib;
4. Üçqat tullanma testləri idmançıların nəticələrini yaxşılaşdırmayıb.

Hərəkətlər kompleksini bir daha nəzərdən keçirmək və dəyişikliklər etmək tövsiyə edilir.

Üçqat tullanmada əldə edilən nəticələri yüksəltmək üçün məşq zamanı fiziki hərəkətlərdə bir sıra dəyişikliklər etməli və onların sayını artırmaq tələb olunur.

ƏLAVƏLƏR

Styüdent t – kriterisinin böhran qiymətləri

Cədvəl 1

Sərbəstlik dərəcəsi ədədi	Əhəmiyyət səviyyəsi			
	α=0,1	α=0,05	α=0,01	α=0,001
1	6,314	12,706	63,657	636,619
2	2,92	4,308	9,925	31,599
3	2,353	3,182	5,841	12,924
4	2,132	2,776	4,604	8,61
5	2,015	2,571	4,032	6,869
6	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,895	2,365	3,499	5,408
8	1,86	2,306	3,355	5,041
9	1,833	2,262	3,25	4,781
10	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,771	2,16	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,977	4,14
15	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,746	2,12	2,921	4,015
17	1,74	2,11	2,898	3,965
18	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,725	2,086	2,845	3,85
21	1,721	2,08	2,831	3,819
22	1,717	2,074	2,819	3,792
23	1,714	2,069	2,807	3,768
24	1,711	2,064	2,797	3,745
25	1,708	2,06	2,787	3,725
26	1,706	2,056	2,779	3,707
27	1,703	2,052	2,771	3,69
28	1,701	2,048	2,763	3,674
29	1,699	2,045	2,756	3,659
30	1,697	2,042	2,75	3,646
40	1,684	2,021	2,704	3,551
50	1,676	2,009	2,678	3,505
60	1,664	2,000	2,66	3,505
80	1,664	1,99	2,639	3,416
100	1,66	1,984	2,626	3,391
120	1,658	1,98	2,617	3,373
200	1,653	1,972	2,601	3,34
500	1,648	1,965	2,586	3,31
∞	1,645	1,96	2,58	3,291

Z -ədədi üçün korrelyasiya əmsalının qiymətləri

Cədvəl 2

r	ədədin 1/100 hissəsi									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
0,3	0,309	0,321	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,338	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,498	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,663	0,678
0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,776	0,793	0,811	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,951	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,188	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,527	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647

Cədvəl E.K.Merkuryeva tərəfindən tərtib olunub (1970)

Fişer F kritesinin böhran qiymətləri

Cədvəl 3

	k_1 – sərbəstlik dərəcəsi										
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161	200,0	216	225	230	234	237	239	241	242	243
2	18,1	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,9	8,8	8,8	8,8	8,8
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	6,1	6,0	6,0	6,0	5,9
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,8	4,7	4,7
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,2	4,1	4,1	4,0
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,7	3,6	3,6
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	2,1	3,0	3,0	2,9
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,6
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,6	2,5
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,5	2,5
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3
21	4,3	3,5	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3
23	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2
25	4,2	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2
27	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,2
29	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1
40	4,1	3,2	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0
50	4,0	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,3	2,1	2,1	2,0	2,0
100	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9
150	3,9	3,1	2,7	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9
200	3,9	3,0	2,7	2,4	2,3	2,1	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8
400	3,9	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8
1000	3,9	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8

k_1 – sərbəstlik dərəcəsi

12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
8,7	8,7	5,8	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	5,6	5,6
5,9	5,9	5,8	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	5,6	5,6
4,7	4,6	4,6	4,6	4,5	4,5	4,5	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4
4,0	4,0	3,9	3,9	3,8	3,8	3,8	3,8	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
3,6	3,5	3,5	3,4	3,4	3,4	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,2	3,2
3,3	3,2	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	3,0	2,9	2,9
3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7
2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,5
2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4
2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3
2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2
2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1
2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,1
2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0
2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9
2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9	1,8
2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8
2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,7
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7
2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7
2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7
2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7
2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7	1,6
2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6
2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5
2,0	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5
1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3
1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	1,2
1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2
1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1
1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,1	1,1
1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	1,0

TESTLƏR
Həqiqi ədədlər

1. Aşağıdakı ədədlərdən hansı ədəd oxunda -3-dən 12 vahid məsafədə yerləşir.
A) -12 B) -11 C) 9 D) 12 E) 11

2. Aşağıdakı ədədlərdən hansı ədəd oxunda 4-dən 16 vahid məsafədə yerləşir.
A) -16 B) 16 C) -13 D) 13 E) -12

3. Ədəd oxu üzərində 3-dən 5 vahid məsafədə olan ədədlərin cəmini tapın.
A) 6 B) 7 C) 4 D) 5 E) 8

4. -5,1 və 1,2 ədədləri arasında yerləşən tam ədədlərin cəmini tapın.
A) 14 B) -14 C) -15 D) -13 E) -4

5. x=2 olduqda $\left|\frac{3x-5}{7-3x^2}\right|$ ifadəsinin qiymətini tapın.
A) 9 B) 8 C) $-\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{5}$ E) -9

6. Qarşılıqlı tərs ədədləri göstərin.
A) 3;-3 B) 3; 0,3 C) $3;\frac{1}{3}$ D) $3;-\frac{1}{3}$; E) $-3;\frac{1}{3}$

7. İki ədədin ədədi ortası 12,01 onlardan biri 18,43-dür.
O biri ədədi tapın.
A) 5,59 B) 12,01 C) 18,43 D) 24,02 E) 15,22

8. İki ədədin ortası 23,22-dir. Bu ədədlərdən biri 23,22 isə o biri ədədi tapın.
A) 46,22 B) 22,23 C) 23,22 D) 23 E) 22

9. -4,2 və 1,6 ədədləri arasında yerləşən tam ədədlərin cəmini tapın.
A) 14 B) -14 C) -15 D) -13 E) -4

10. 2 ədədin əksi ilə tərsinin fərqini tapın.
A) $-\frac{3}{2}$ B) $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{5}{2}$ D) $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$ E) -1

11. Hansı bərabərlik doğru deyil?

A) $a+b=b+a$ B) $ab=ba$ C) $(a+1)\cdot b-b=ab$

D) $(a+1)\ (b+1)=ab+1$ E) $(a+b)\cdot c=ac+bc$

12. Bərabərliklərdən hansı doğru deyil?

A) $a-b=a+(-b)$ B) $a+(b-c)=a+b-c$

C) $a-(b-c)=a-b-c$ D) $a-o=a$

E) $a:(-1)=-a$

13. Hesablayın: $-3+|2|\cdot|-1|-|4|:|-2|$

A) -1 B) -7 C) 3
D) 7 E) 6

14. Hesablayın: $-4:|-2|+3:|-1|-1$

A) 0 B) -2 C) 4
D) 5 E) 6

15. Hesablayın: $\dfrac{84(3\cdot 5-50)}{12\cdot(-7)}$

A) 23 B) 35 C) 42
D 30 E) 28

16. Hesablayın: $\dfrac{|-4{,}2|\cdot|-3{,}2|}{|-16|\cdot|0{,}7|}$

A) -1,2 B) 1,2 C) 12 D) -12 E) 0,12

17. Hesablayın: $\dfrac{|-3{,}8|\cdot|-2{,}6|}{|-13|\cdot|1{,}9|}$

A) 0,4 B) 0,8 C) -0,4 D) 0,8 E) 4

18. $a=0{,}3$ olarsa, $(a+5)(a^2+5a+25)-125$ ifadəsinin qiymətini hesablayın

A) 0 B) 5,3 C) 27 D) 0,027 E) 0,09

19. İfadənin qiymətini tapın: $16{,}2\cdot(-0{,}4)+3{,}8\cdot(-0{,}4)$

A) -8 B) 80 C) 20 D) -10 E) -80

20. Hesablayın: $(13\frac{7}{9})^2-14\frac{7}{9}\cdot 12\frac{7}{9}$

A) $\frac{49}{81}$ B) $\frac{7}{9}$ C) 0 D) 26 E) 1

FUNKSİYA VƏ ONUN XASSƏLƏRİ

1. Aşağıdakı funksiyalardan hansı cüt funksiyadır?

A) $y=x^3$ B) $y=|x|$ C) $y=x^2-x$ D) $y=x^2+x$

E) $y=x$

2. Aşağıdakı funksiyalardan hansı tək funksiyadır?

A) $y=x^2+1$ B) $y=x-3$ C) $y=x^5-1$

D) $y=x|x|$ E) $y=x^2$

3. Aşağıda göstərilmiş nöqtələrdə hansı $y=x^2-1$ funksiyanın qrafikinə aiddir?

A) $M(1;2)$ B) $P(3;8)$ C) $N(4;1)$ D) $K(0;2)$

E) $Q(2;1)$

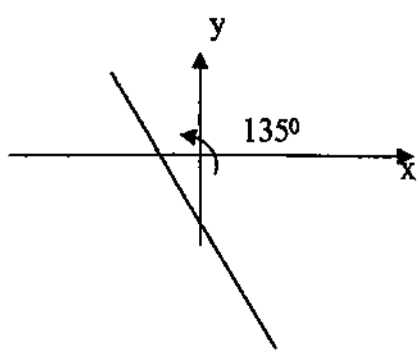
4. $f(x)=5x-x^3$ olduqda $f(-1)-i$ hesablayın.

A) -4 B) -6 C) 4 D) 6 E) 0

5. $f(x)=x^2-5x-1$ olduqda $f(+1)-i$ hesablayın.

A) -5 B) 1 C) 5 D) -1 E) 0

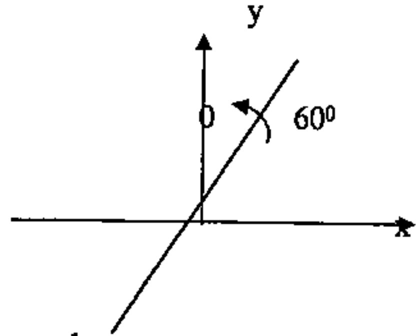
6. Qrafikə görə xətti asılılığı müəyyən edin.



A) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ B) $y=-\frac{1}{2}x$ C) $y=-x$

D) $y=\sqrt{3x}$ E) $y=-\sqrt{3x}$

7. Qrafikə görə xətti asılılığı müəyyən edin.



A) $y=\frac{1}{2}x$ B) $y=x$ C) $y=\sqrt{3x}$ D) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

E) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

8. $y=\sqrt{x-3}$ funksiyasının təyin oblastını tapın.

A) $(-\infty;3]$ B) $(3;\infty)$ C) $[3;\infty)$ D) $(0;3]$ E) $(-\infty;\infty)$

9. $y=\sqrt{1-x}$ funksiyasının təyin oblastını tapın.

A) $(-\infty;1]$ B) $(-\infty;-1]$ C) $(-1;1)$ D) $(1;\infty)$ E) $(-\infty;1)$

10. Aşağıdakı funksiyalardan hansı xətti funksiyadır?

A) $y=x+\frac{1}{x}$ B) $y=x^2-\frac{1}{x}$ C) $y=\frac{x}{5}+\frac{1}{3}$

D) $y=x-\frac{1}{x}$ E) $y=\frac{1}{x}+5$

11. Aşağıdakı funksiyalardan hansı tək funksiyadır?

A) $y=-x^3$ B) $y=|x|$ C) $y=x^2$ D) $y=x^2+1$ E) $y=x^4$

12. Aşağıdakı funksiyalardan hansı cüt funksiyadır?

A) $y=x^2$ B) $y=-x$ C) $y=x^3$ D) $y=\frac{1}{x}$ E) $y=-\frac{1}{x}$

13. $f(x)=x^2-5x-1$ funksiyası verilib. $f(1)$-i hesablayın.

A) -5 B) 1 C) 5 D) -1 E) 0

14. $f(x)=5x-x^3$ funksiyası verilib. $f(-1)$-i hesablayın.

A) -4 B) -6 C) 4 D) 6 E) 0

15. Hansı funksiya azalandır?

A) $y=\frac{1}{2}(3x+1)$ B) $y=4x$ C) $y=2x+1$

D) $y=-\frac{1}{2}x$ E) $y=\frac{1}{2}x$

16. Hansı funksiya artandır?

A) $y=-\frac{1}{4}$ B) $y=-2x-1$ C) $y=\frac{1}{3}x$

D) $y=\frac{1}{5}(2-3x)$ E) $y=-\frac{1}{2}x$

17. Hansı funksiya azalandır?

A) $y=\frac{x}{2}$ B) $y=\frac{1}{3}x-2$ C) $y=\frac{1}{4}x+2$

D) $y=\frac{x+3}{7}$ E) $y=-\sqrt{3}\ x-2$

18. $f(x)=-x^2-2x+3$ olduqda, $f(-3)$-ü tapın.

A) -1 B) 0 C) 1 D) 3 E) -3

19. Hansı nöqtə $y=2x-4$ funksiyasinın qrafiki üzərindədir?

A) (0;0) B) (5;7) C) (-10; 16)

D) (-4;0) E) (10;16)

20. $f(x)=-x^2+4x-3$ olduqda, $f(0)$-ı tapın.

A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) 0

FUNKSİYANIN NÖQTƏDƏ LİMİTİ FUNKSİYANIN KƏSİLMƏZLİYİ

1. $x=2$ nöqtəsində $f(x)=x^3$ funksiyasının limitini tapın.

A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) 6

2. $\lim\limits_{x\to -1}(8+4x+x^2)$-i hesablayın.

A) -1 B) 13 C) 8 D) 0 E) 5

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x-4}$-i hesablayın.

A) 2 B) 1 C) 4 D) 3 E) 0

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{25x-5x^2}{4x-20}$-i hesablayın.

A) $\dfrac{25}{4}$ B) $-\dfrac{1}{4}$ C) 5 D) $-\dfrac{25}{4}$ E) 4

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-111}{5x-x^2}$-i hesablayın.

A) -3 B) 3 C) $\dfrac{3}{5}$ D) $\dfrac{1}{5}$ E) $-\dfrac{3}{5}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x-x^2}{x^3+3x}$-i hesablayın.

A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) 1

7. $f(x)=x^2+5x$ funksiyasının kəsilməz olduğu aralığı göstərin.

A) $(-\infty;0)$ B) $(-\infty;\infty)$ C) $(0;\infty)$ D) $(-\infty;0]$ E) $[0;\infty)$

8. $f(x)=x^3+3x$ funksiyasının kəsilməz olduğu aralığı göstərin.

A) $(-\infty;-3]$ B) $(-\infty;0)$ C) $(0;+\infty)$ D) $(-\infty;\infty)$ E) $[-3;\infty)$

9. $f(x)=x-2x^3$ funksiyasının kəsilməz olduğu aralığı göstərin.

A) $(0;\infty)$ B) $(-\infty;0)$ C) $(-\infty;\infty)$ D) $(-\infty;0)$ E) $[0;\infty)$

10. $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2+2x}$ funksiyasının kəsilməz olduğu aralıqları göstərin.

A) $(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;\infty)$ B) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$

E) $(-\infty;\infty)$ C) $(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$ D) $(-\infty,2)\cup(2;\infty)$

11. $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}$ funksiyasının kəsilməz olduğu aralığı

göstərin.

A) $(-\infty;0)\cup(0,\infty)$ B) $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;\infty)$

C) $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$ D) $(-\infty;\infty)$ E) $(-\infty;0)$

12. $f(x)=x^4-9x$ funksiyanın kəsilməz olduğu aralığı göstərin.

A) $(-\infty;\infty)$ B) $(-\infty;0)$ C) $(0;\infty)$ D) $(-\infty;0)$ E) $[0;+\infty)$

13. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$ funksiyasının kəsilməz olduğu aralıqları göstərin.

A) $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;\infty)$ B) $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$

C) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ D) $(-\infty;\infty)$

E) $(-\infty;1)$

14. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}$-i hesablayın.

A) $-\dfrac{1}{81}$ B) $-\dfrac{1}{108}$ C) 3 D) 0 E) $\dfrac{1}{9}$

15. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4x-x^2}{x^2+x-20}$-i hesablayın.

A) 0 B) 1 C) $-\dfrac{4}{9}$ D) $\dfrac{1}{9}$ E) 9

16. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}-2)$-i hesablayın.

A) -3 B) -1 C) 0 D) -2 E) 1

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-1}{6n^2+3n}$-i hesablayın.

A) $\dfrac{4}{5}$ B) 1 C) 0 D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{3}{5}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x^2+3x-4}{x-1})$-i hesablayın.

A) -5 B) 5 C) $\dfrac{1}{3}$ D) 0 E) 4

19. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ -i hesablayın.

A) 1 B) -1 C) 0 D) 3 E) $\frac{1}{3}$

20. $\lim_{n \to \infty} \frac{6n^2-3n+7}{8n^2-3}$ -i hesablayın.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{6}{11}$ E) $\frac{7}{11}$

TÖRƏMƏNİN NÖQTƏDƏ HESABLANMASI

1. $f(x)=2x^3-5x^2+4x-7$ funksiyanın törəməsini tapın.

A) $3x^2-5x-4$ B) $6x^2-10x-7$ C) x^3-x^2+4

D) $6x^4-10x+4$ E) $3x^2-5x+4$

2. Düsturlardan hansı səhvdir?

A) $(a^x)^1=a^x \ln a$ B) $(\ln x)^1=\frac{1}{x}$ C) $(\log_a x)^1=\frac{1}{x\ln a}$

D) $(tgx)^1=\frac{1}{\cos^2 x}$ E) $(ctgx)^1=\frac{1}{\sin^2 x}$

3. Hansı bərabərlik doğrudur?

A) $(\sqrt{x})^1=\frac{1}{\sqrt{x}}$ B) $(tgx)^1=\frac{1}{\cos^2 x}$ C) $(ctgx)^1=\frac{1}{\sin^2 x}$

D) $(a^x)^1=a^x$ E) $(\frac{1}{x})^1=\frac{1}{x^2}$

4. $f(x)=x^4-2x^2-3$ funksiyası verilmişdir. $f^1(-1)$ -i tapın.

A) 4 B) -1 C) 1 D) 0 E) -3

5. $f(x)=x^4-2x^2-3$ funksiyası verilmişdir. $f^1(-3)$ -ü tapın.

A) -102 B)-96 C) 102 D) 60 E) -30

6. $f(x)=2x^2+5$ funksiyası verilmişdir. $f^1(-2)$ -ni tapın.

A) -8 B) -3 C) 1 D) 13 E) 10

7. $f(x)=4x^4-5x^3-3x^2+1$ funksiyası verilmişdir. $f^1(-1)$ -i tapın.

A) -25 B) 25 C) 37 D) -37 E) 13

8. $f(x)=3x^3-4x^2-5x$ funksiyası verilmişdir. $f^1(-1)$-i tapın.

A) 10 B) 11 C) 16 D) 13 E) 12

9. $f(x)=3x^3-5x$ funksiyası üçün $f^1(3)$-ü tapın.

A) 32 B) -42 C) 76 D) 42 E) 18

10. $y=2x^3-4x+2$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $6x-4$ B) $6x^2-4$ C) $6x^3-4$ D) $3x-2$ E) $6x^2+4$

11. $y=4x^5-3x^2+5$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $20x^4-6x$ B) $20x^4-6x+5$ C) $4x^4-6x$

D) x^5-x^2 E) $4x^4-3x$

12. $y=\sqrt{x^2+3}$ funksiyası üçün $y^1(1)$-i tapın.

A) 1 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

13. $y=\sqrt{x^2+5}$ funksiyası üçün $y^1(2)$-ni tapın.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{1}{6}$

14. $y=\sqrt[5]{x^3}$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ B) $\frac{5}{3}\sqrt[5]{x^2}$ C) $\frac{5}{3\sqrt[5]{x^2}}$ D) $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5}$ E) $\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

15. $f(x)=3x^2-6x$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) x^2-6 B) $2x+3$ C) $6x-6$ D) $3x-6$ E) 3

16. $f(x)=x^3+\sqrt{2}$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $3x+\sqrt{2}$ B) $3x^2$ C) $x+\sqrt{2}$ D) x^3+1 E) $3x^2+\sqrt{2}$

17. $y=\frac{3}{x}$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $-\frac{1}{3x}$ B) $-\frac{3}{x^2}$ C) 1 D) $3x$ E) $3-x$

18. $y=\frac{2}{x^4}$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $\frac{1}{4x^3}$ B) $2+x^4$ C) $\frac{2}{4x^3}$ D) $-\frac{8}{x^5}$ E) $-2x^4$

19. $y=\sin 3x^2$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $6x\cdot\cos 3x^2$ B) $3x^2\cdot\sin x$ C) $2\sin 3x$

D) $3x\cdot\cos 3x^2$ E) $\cos 6x$

20. $y=5x^3-3x^2+6$ funksiyasının törəməsini tapın.

A) $15x^2+3x$ B) $15x^2-6x+6$ C) $5x^3+6$

D) $15x^2-6x$ E) $-3x^2+6$

FUNKSİYANIN ARTMASI VƏ AZALMASI ƏLAMƏTLƏRİ

1. $y=f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur və $f^1(x)\rangle 0$ olarsa, qiymətlərdən hansı ən böyükdür?

A) $f(-2)$ B) $f(-1)$ C) $f(5)$ D) $f(4)$ E) $f(3)$

2. $y=f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur və $f^1(x)\langle 0$ olarsa, $f(x)\rangle f(2)$ bərabərsizliyini həll edin.

A) $(-2;2)$ B) $(2;\infty)$ C) $(-\infty;-2)$ D) $-\infty;2$

E) həll etmək olmaz.

3. $y=\frac{x^3}{x-2}$ funksiyasının neçə böhran nöqtəsi var?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $y=x^2$ funksiyasının böhran nöqtəsini tapın.

A) $x=1$ B) $x=0$ C) $x=2$ D) $x=3$ E) $x=4$

5. $y=4x^2-6x$ funksiyasının artma aralığını tapın.

A) $[-1;0]$ B) $[1;3]$ C) $[0;1]$ D) $(-1;0)$ E) $[-0,75;\infty)$

6. $y=4x^3-3x^2$ funksiyasının artma aralığına daxil olan ən kiçik natural ədədi tapın.

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

7. $y=x^3$ funksiyasının neçə ekstremum nöqtəsi var?

A) 2 B) *yoxdur* C) 1 D) 5 E) 4

8. $y=|x-4|$ funksiyasının azalma aralığını tapın.

A) $(0;\infty)$ B) $(-\infty;4]$ C) $[0;\infty)$ D) $(-\infty;4]$ E) $[0;5)$

9. $y=x+\dfrac{1}{x}$ funksiyasının maksimum nöqtəsini tapın.

A) $x=3$ B) $x=1,3$ C) $x=2,5$ D) $x=-1$ E) $x=4$

10. $y=f(x)$ funksiyasının $[0;3]$ aralığında törəməsi müsbət $(f'(x)\rangle 0)$ olarsa, qiymətlərdən hansı ən böyükdür?

A) $f(5)$ B) $f(2)$ C) $f(3)$ D) $f(4)$ E) $f(2,5)$

11. $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-x^2$ funksiyasının maksimum nöqtəsini tapın.

A) $x=-4$ B) $x=1$ C) $x=2$ D) $x=3$ E) $x=0$

12. $y=4x^2-6x$ funksiyasının böhran nöqtəsini tapın.

A) $x=2$ B) $x=0,75$ C) $x=6$ D) $x=7$ E) $x=1,25$

13. $y=x^3-3x^2$ funksiyasının artma aralıqlarını tapın.

A) $(-\infty;0]\cup[2;\infty)$ B) $(0;2)$ C) $(0;1)\cup(2;\infty)$

D) $[0;1]\cup[2;3]$ E) $\varnothing$

14. $[-1;1]$ parçasında $y=3x^2-x^3-3$ funksiyasının ən kiçik qiymətini tapın.

A) -3 B) 1 C) -1 D) 4 E) 5

15. $[0;3]$ parçasında $y=x^2-4$ funksiyasının ən böyük qiymətini tapın.

A) 5 B) -4 C) 0 D) -5 E) 4

16. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-5x+11$ funksiyasının böhran nöqtəsini tapın.

A) 10 B) -10 C) 0 D) 5 E) 12

17. $f(x)=2x^2-5x+2$ funksiyasının ən kiçik qiymətini tapın.

A) $1\frac{1}{4}$ B) $-1\frac{1}{4}$ C) $1\frac{1}{2}$ D) $-1\frac{1}{8}$ E) $1\frac{1}{8}$

18. $f(x)=4x-\dfrac{x^3}{3}$ funksiyasının böhran nöqtələrini tapın.

A) ± 1 B) 3 C) $\pm 1{,}5$ D) ± 2 E) ± 3

19. $y = x^2 + 6x - 4$ funksiyasının azalma aralığını tapın.

A) $(-\infty;-3)$ B) $(0;3)$ C) $(-\infty;0)$ D) $(-\infty;\infty)$ E) $(-\infty;3)$

20. $y = x^2 + 2x - 1$ funksiyasının minimumunu tapın.

A) $x = 1$ B) $x = -1$ C) $x = \pm 1$ D) $x = 0$ E) $x = 2$

İBTİDAİ FUNKSİYA
QEYRİ-MÜƏYYƏN İNTEQRAL

1. $f(x) = 3x^2 - 1$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

A) $-x^3 - x + c$ B) $x^3 + x + c$ C) $3x^3 - x + c$

D) $3x^3 + x + c$ E) $x^3 - x + c$

2. $f(x) = 10x^9 + 1$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

A) $x^{10} - x + c$ B) $x^{10} + x + c$ C) $10x^{10} + x + c$

D) $x^{10} + c$ E) $10x^{10} + c$

3. $f(x) = 4x^3$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

A) $x^4 + c$ B) $\frac{x^4}{4} + c$ C) $x^3 + c$

D) $x^2 + c$ E) $-x^2 + c$

4. $f(x) = 4x + 1$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

A) $2x^2 + x - c$ B) $2x^2 + x + c$ C) $\frac{1}{2}x^4 + x^2 - c$

D) $2x^2 - x - c$ E) $-2x^2 - x + c$

5. $f(x) = 2x - 1$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

A) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$ B) $x^2 + x + c$ C) $-x^2 + x + c$

D) $-x^2 - x + c$ E) $x^2 - x + c$

6. $f(x) = 4x^3 - 6x$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

A) $x^3 - 2x^2 + c$ B) $x^4 - 3x^2 + c$ C) $2x^4 - 3x + c$

D) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^2+c$ B) x^4+3x^2+c

7. $f(x)=x^2-3x+2$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

A) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x+c$ B) $\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+5x+c$

C) $\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}x+c$

D) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+c$ E) $\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+c$

8. $f(x)=\frac{1}{2}x+x^4$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

A) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}-c$ B) $\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}-c$ C) $\frac{x^2}{4}+\frac{x^5}{5}+c$

D) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}+c$ E) $\frac{x^2}{4}-\frac{x^5}{5}+c$

9. $\int(2x+3)dx$ hesablayın.

A) $2x^2+3x+c$ B) x^2+3x-c C) x^2+3x+c

D) $2x^2+3+c$ E) x^2+3+c

10. $\int\frac{dx}{x^2}$ hesablayın.

A) $\frac{1}{x}-c$ B) $-\frac{1}{x}+c$ C) $\frac{1}{x}+c$ D) $\frac{1}{x^2}+c$ E) $-\frac{1}{x^2}+c$

11. $\int(ax+b)dx$ hesablayın.

A) ax^2+bx+c B) x^2+c C) $\frac{a}{2}x^2+bx+c$

D) $\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}x+c$ E) x^2+bx+c

12. $\int 4x^5dx$ hesablayın.

A) $\frac{2}{3}x^6-c$ B) $\frac{2}{3}x^6+c$ C) $\frac{4}{5}x^5+c$

D) $-\frac{2}{3}x^6+c$ E) $\frac{4}{5}x^6+c$

13. $\int x^6dx$ hesablayın.

A) $\frac{x^2}{6}+c$ B) $\frac{x^7}{7}+c$ C) $\frac{x^6}{6}+c$

D) $6x^6+c$ E) $7x^7+c$

14. $\int \sqrt[3]{x}dx$ hesablayın.

A) $\frac{4}{3}x\sqrt[3]{x}+c$ B) $\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}+c$ C) $x\sqrt[3]{x}+c$

D) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+c$ E) $3x\sqrt[3]{x}+c$

15. $\int 4\sqrt{x}\,dx$ hesablayın.

A) $\frac{1}{3}x\sqrt{x}+c$ B) $x\sqrt{x}+c$ C) $-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+c$

D) $\frac{8}{3}x+c$ E) $\frac{8}{3}x\sqrt{x}+c$

16. $\int (x-x^3)dx$ hesablayın.

A) $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+c$ B) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-c$ C) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+c$

D) $x^2-\frac{x^4}{4}+c$ E) x^2-x^4+c

17. $\int \frac{2dx}{x^2}$ hesablayın.

A) $-\frac{2}{x}+c$ B) $\frac{2}{x}-c$ C) $\frac{2}{x^2}+c$

D) $2x^2+c$ E) $\frac{1}{x^2}+c$

18. $\int (3-\frac{2}{x^4})dx$ hesablayın.

A) $3+\frac{2}{x^3}+c$ B) $3x+\frac{2}{x^3}+c$ C) $3-\frac{2}{x^4}+c$

D) $3x+\frac{2}{3x^3}+c$ E) $3x-\frac{6}{x^5}+c$

19. $\int(x^2+4x+4)dx$ hesablayın.

A) x^3+2x^2+4x+c B) $\frac{x^3}{3}+2x^2+4x+c$

C) $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+c$ D) x^3+x^2+4+c E) $\frac{x^3}{3}+2x^2+x+c$

20. $\int\frac{x^2-4}{x-2}dx$ hesablayın.

A) $\frac{x^2}{2}+2x+c$ B) x^2-4+c C) x^2+4+c D) $\frac{x^2}{2}-2x+c$

E) $\frac{x^2}{2}+x-c$

MÜƏYYƏN İNTEQRAL

MÜƏYYƏN İNTEQRALIN SAHƏLƏRİN HESABLANMASINDA TƏTBİQİ

1. $\int_2^3(2x-1)dx$ inteqralını hesablayın.

A) 4 B) 3,5 C) 3 D) $10\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

2. $\int_0^3(2-x)^2dx$ inteqralını hesablayın.

A) 1,5 B) $32\frac{2}{3}$ C) 6 D) 3 E) $3\frac{2}{3}$

3. $\int_1^5 x^3dx$ inteqralını hesablayın.

A) 125 B) 131 C) 625 D) 624 E) 156

4. $\int_0^1 (3x+2)dx$ inteqralını hesablayın.

A) 4 B) 3,5 C) 2 D) 7 E) $\frac{1}{2}$

5. $\int_1^2 x^4 dx$ inteqralını hesablayın.

A) $6\frac{1}{5}$ B) $6\frac{3}{5}$ C) 1 D) $\frac{5}{33}$ E) 24

6. $\int_{-2}^0 (2x+x^2)dx$ inteqralını hesablayın.

A) $-\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

7. $\int_{-1}^0 x^3 dx$ inteqralını hesablayın.

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

8. $\int_{-5}^1 (x+2)^2 dx$ inteqralını hesablayın.

A) 18 B) 234 C) 150 D) -150 E) -108

9. $\int_0^1 (4x^3+2x+1)dx$ inteqralını hesablayın.

A) 3 B) 2 C) 6 D) 5 E) 4

10. $\int_{-2}^2 (2x^2-3)dx$ inteqralını hesablayın.

A) $-1\frac{1}{3}$ B) $2\frac{1}{3}$ C) $-1\frac{2}{3}$ D) $1\frac{2}{3}$ E) 1

11. $\int_1^4 \sqrt{x}\ dx$ inteqralın hesablayın.

A) $\frac{14}{3}$ B) $\frac{15}{4}$ C) 5 D) 4 E) $\frac{11}{3}$

12. $\int_2^4 \frac{x^2-9}{x+3}dx$ inteqralını hesablayın.

A) 0 B) 8 C) 4 D) 6 E) 12

13. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$ inteqralını hesablayın.

A) 8 B) 10 C) 11 D) 9 E) $\frac{45}{4}$

14. $y=x^2$, $y=x$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

15. $y=x^3, y=1, x=o$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

16. $y=x^2, y=0, x=2$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

A) $\frac{4}{3}$ B) 4 C) 3 D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

17. $y=x^2$ və $y=2-x$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

A) 4,5 B) 9 C) 3 D) $4\frac{1}{3}$ E) $2\frac{1}{3}$

18. $y=5x, x=2, y=0$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

A) 8 B) 9 C)10 D) 11 E) 12

19. $y=x^3, y=2x$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

A) 6 B) 4,5 C) 7 D) 2 E) -2

20. $y=x^2, y=o, x=2, x=3$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

A) 6 B) $6\frac{1}{3}$ C) 11 D) 9 E) $11\frac{2}{3}$

ÖLÇÜ NƏTİCƏLƏRİNİN STATİSTİK XARAKTERİSTİKALARI. EMPRİK PAYLANMANIN HƏNDƏSİ TƏSVİRİ – POLİQON, HİSTOQRAM VƏ KUMULYATA.

A variantı.

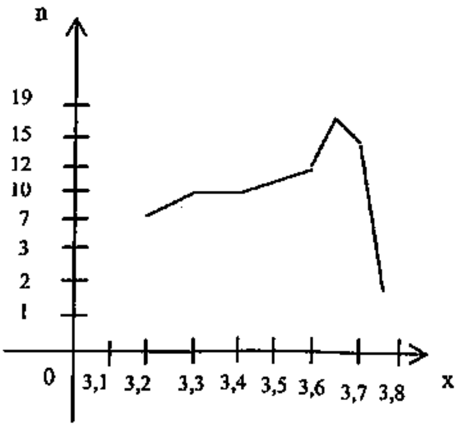
1. Tutaq ki, uzunluğa tullananların yarışı zamanı aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

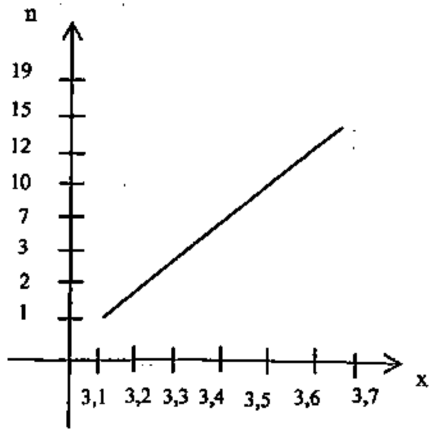
3,20; 3,30; 3,40; 3,60; 3,70; 3,80; 3,90

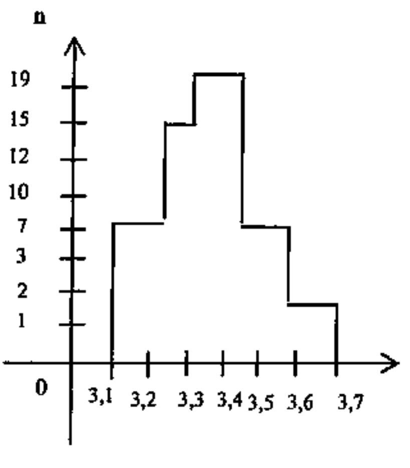
Bu ədələrin tezliyi aşağıdakı kimi olmuşdur:

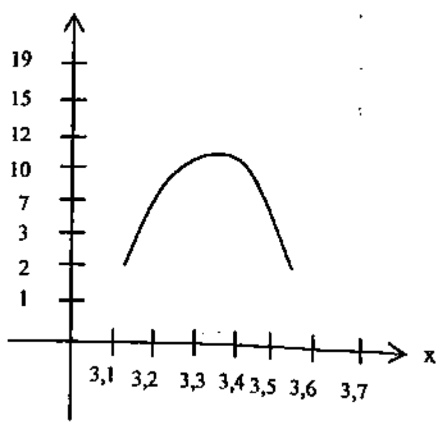
7; 10; 10; 12; 19; 15; 3

Alınmış nəticələrin paylanma poliqonunun qrafiki aşağıdakılardan hansılardır?







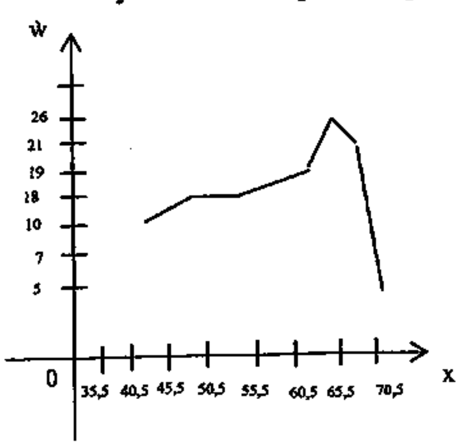


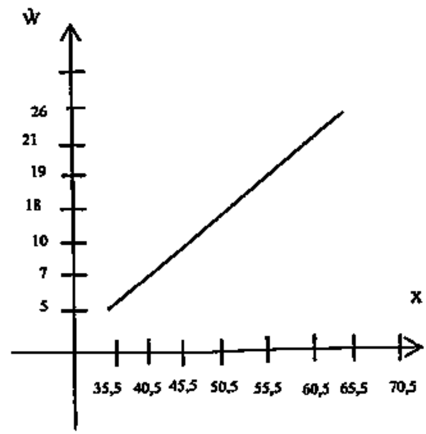
2. Tutaq ki, ölçmə nəticəsində alınan ədədlər intervallarla verilib.

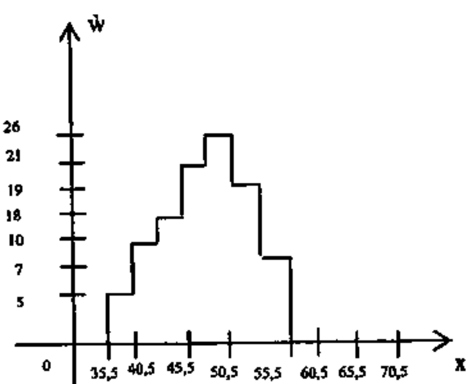
35,5 - 40,5
40,5 - 45,5
45,5 - 50,5
50,5 - 55,5
55,5 - 60,5
60,5 - 65,5
65,5 - 70,5

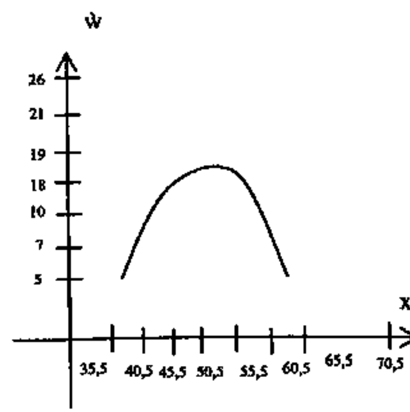
Həmin intervallarda ədədlərin tezliyi uyğun olaraq *5,10, 18, 21, 26,19,7* kimdir.

Paylanma histoqramını göstərin.





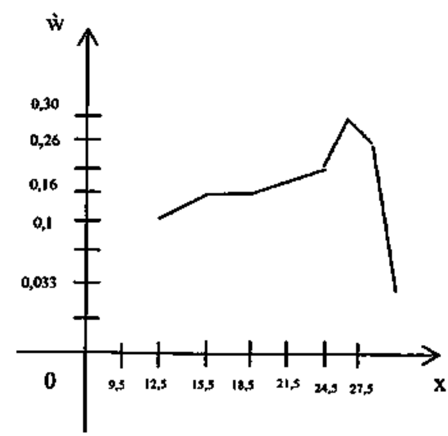


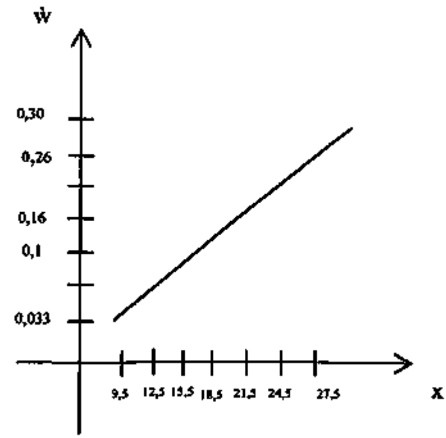


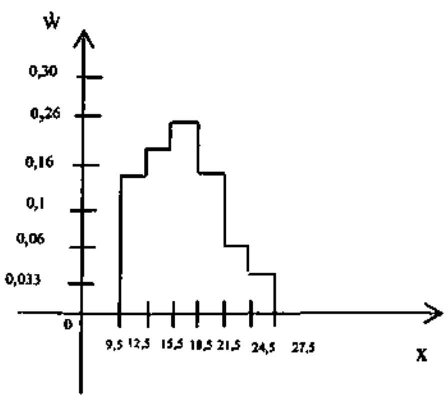
3. Ölçmə nəticələri aşağıdakı kimidir:
9,5 - 12,5
12,5 - 15,5
15,5 - 18,5
18,5 - 21,5
21,5 - 24,5
24,5 - 27,5

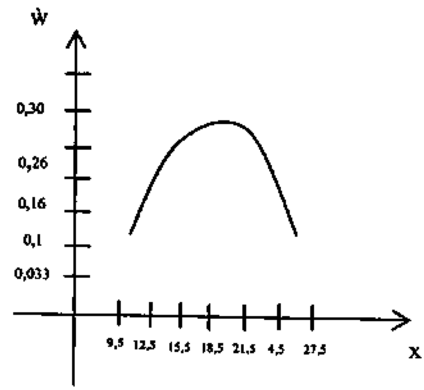
Ədələrin tezliyi isə uyğun olaraq *0,16; 0,26; 0,30; 0,16; 0,06; 0,033* kimidir.

Paylanma histoqramının qrafikini tapın.



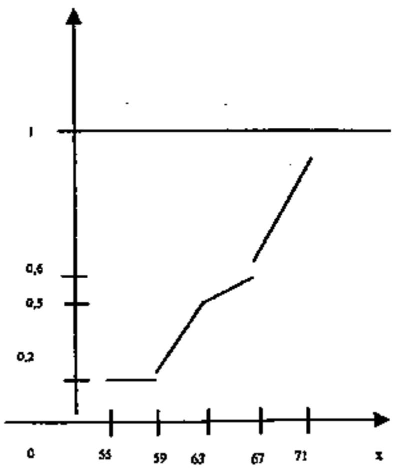


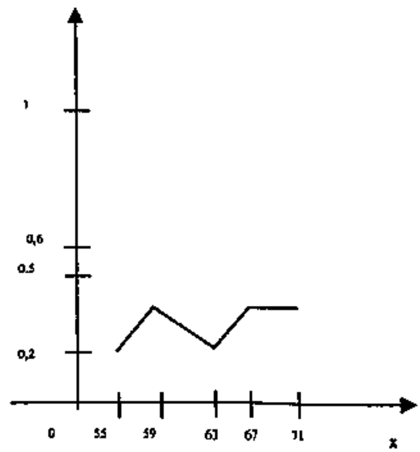


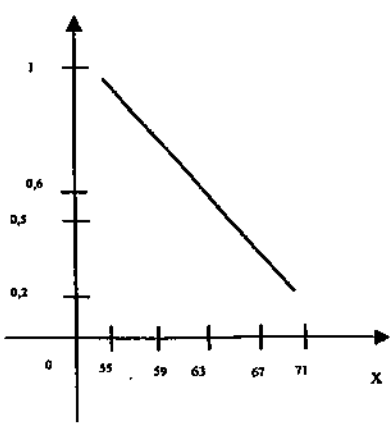


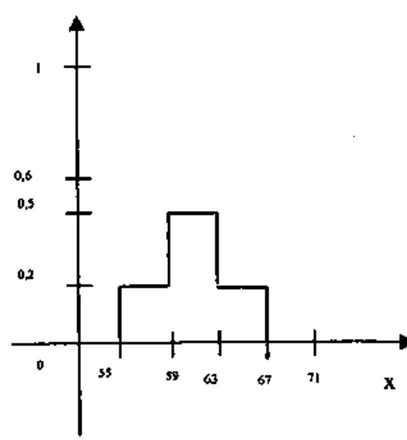
4. Məktəblilərin hündürlüyə tullanma nəticələri aşa-ğıda göstərilib. Verilənlər əsasında məktəblilərin idman nəticələrinin dəyişməsini cəm tezliklərinin qrafiki vasitəsilə təsvir edin. *n=10, k=4*

55; 62; 57; 59; 65; 59; 69; 70; 69; 71;









5. Aşağıdakı nəticələr üçün $\overline{X}$, D, σ, V, M_o, M_e tapın.

A)	13	0,1	0,3	13	12	15
B)	15	281	11	0,21	11	12
C)	12,3	2,01	1,4	11, 4	12	12
D)	1,13	0,1	2,1	9,19	15	13
E)	2,1	0,5	0,12	0,2	13	10

6. Ağır atletlər aşağıdakı nəticələri göstəriblər.

X:	110	120	130	140	150	160	170	180	200	210
Y:	64	68	72	76	80	84	88	90	93	94

Korrelyasiya əlaqəsini tapın.

A) 0,98 B) 0,1 C) 0,5 D) 0,35 E) 0

7. İdmançıların boy və çəkiləri ölçülüb.

X:	178	170	184	180	168
Y:	80	67	87	83	70

Bunlar arasındakı korrelyasiya əlaqəsini tapın.

A)0 B)0,5 C)0,98 D)0,1 E)0,6

8. Aşağıdakı nəticələr üçün M_o və M_e tapın.

57 55 59 62 69 71 59 65 68 70

A) M_o=71 M_e=63,5

B) M_o =59 M_e=63,5

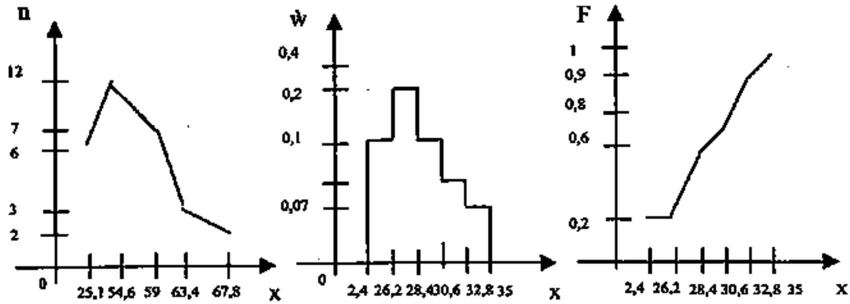
C) M_o=59 M_e=71

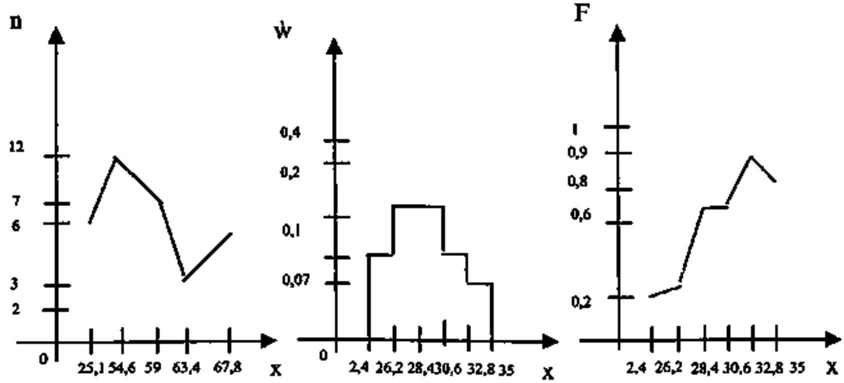
D) Mo=62 M_e=62

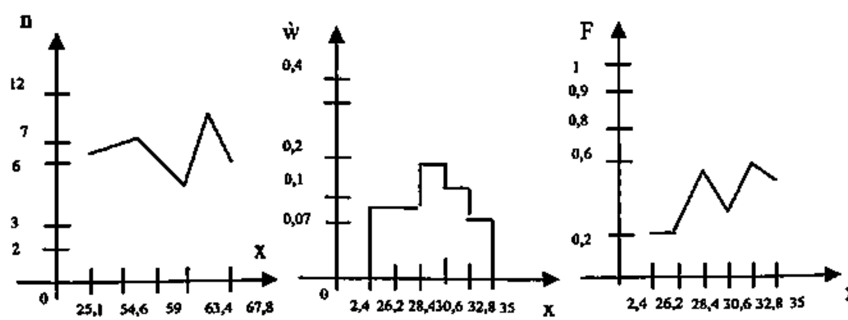
E)Mo=68 M_e=70

9. Aşağıdakı nəticələr üçün paylanma funksiyasının qrafikini göstərin. K=5, n=30

28; 27; 29; 28; 32; 26; 28; 31; 30; 26; 27; 28; 29; 28; 29; 28; 30; 31; 28; 29; 30; 28; 26; 34; 35; 26; 25; 24; 28; 28;







10. Aşağıdakı verilənlər üçün M_o və M_e tapın.

24 25 26 26 27 28 29 30 30 30 30 31 32 35 37

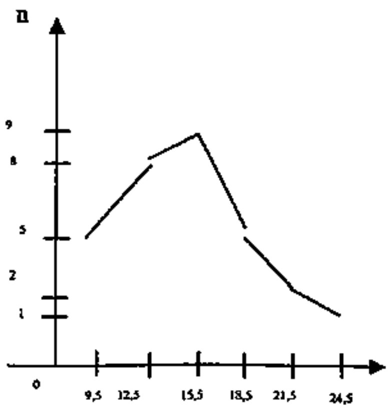
A) M_o=29 M_e=30

B) $M_o=25$ $M_e=29$
C) $M_o=30$ $M_e=29$
D) $M_o=30$ $M_e=28$
E) $M_o=32$ $M_e=24$

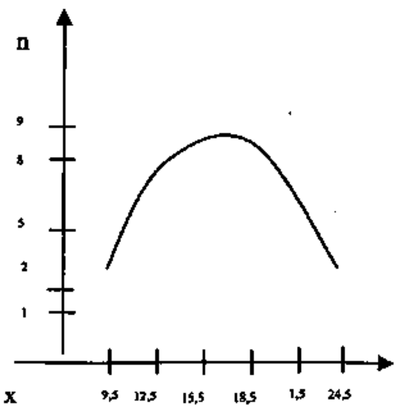
B variantı

1. Ölçmə nəticəsində aşağıdakı nəticələr alınmışdır:
9,5 12,5 15,5 18,5 21,5 24,5
Bu ədədlərin tezliyi uyğun olaraq: 5,8,9,5,2,1 kimidir.
Paylanma poliqonunun qrafikini göstərin.

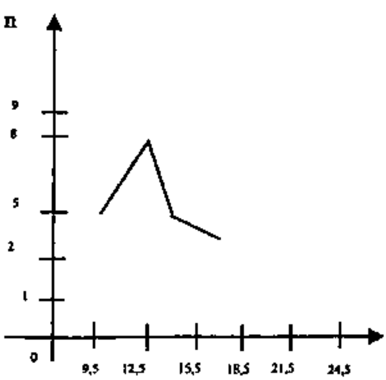
A)



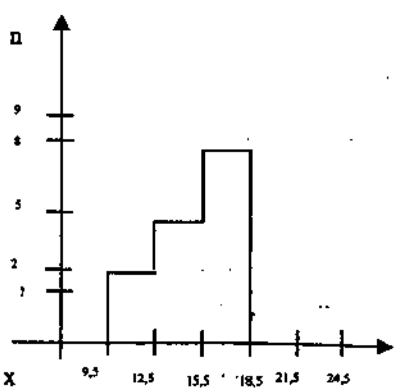
B)



C)

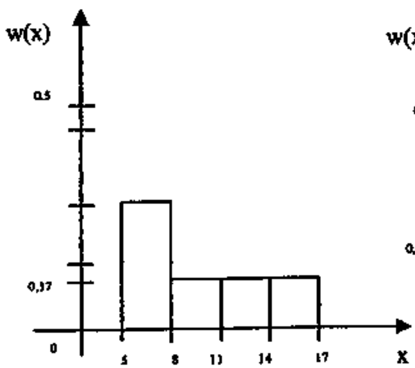


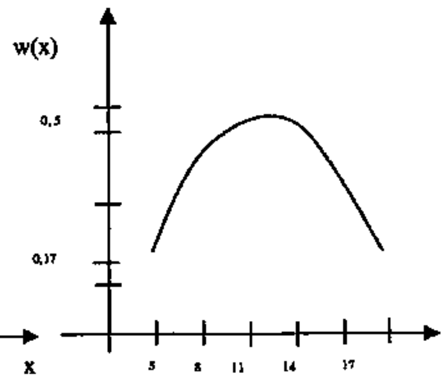
D)

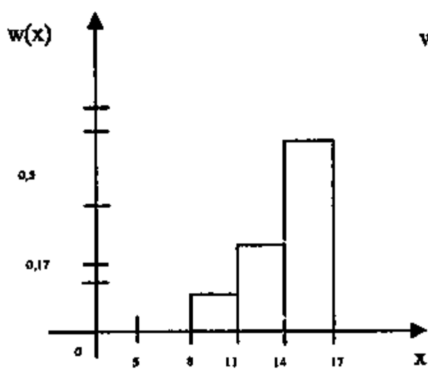


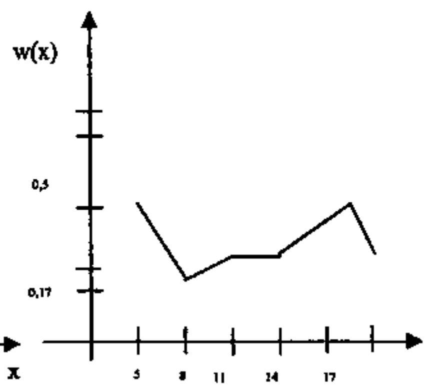
2. Aşağıdakı verilənlər əsasında paylanma histoqramını təyin edin.

I 5-8
II 8-11
III 11-14
IV 14-17
Ədədlərin tezliyi: 0,5; 0,17; 0,17; 0,17





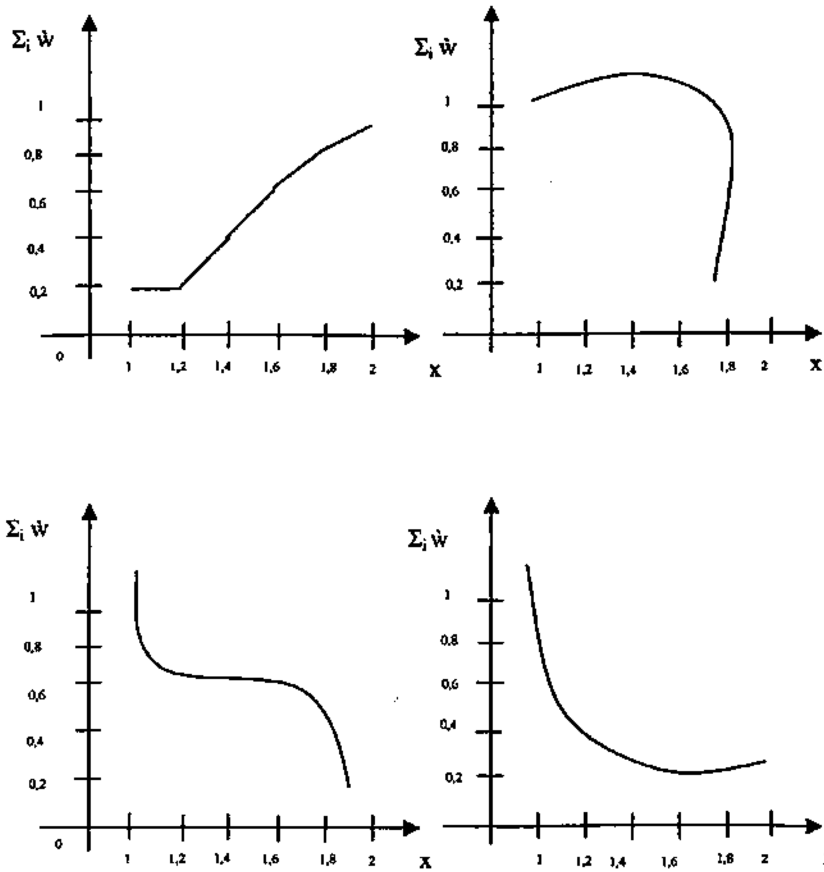




3. Aşağıda 20 tələbədən ibarət 1qrupun hündürlüyə tullanma nəticələri verilib. K=5 n=20

1,0 1,25 1,28 1,33 1,39 1,4 1,44 1,45 1,47 1,48 1,49 1,52 1,53 1,55 1,56 1,65 1,72 1,78 1,92 2,0

İdman nəticələrinin dəyişməsini cəm tezliklərinin qrafiki vasitəsilə göstərin.



4. Yüngül atletlər məşq zamanı 60 m məsafəni qaçaraq aşağıdakı nəticələri göstərmişlər.

X_i 8,2 8,5 7,9 7,8 8,2 8,1 7,6 8,3 8,2 7,8

Göstərilən nəticələr üçün $\overline{X}$, D, σ, tapın.

A) 6,08; 1,005; 2,06
B) 8,06; 0,0684; 0,26;
C) 19,3; 1,85; 0,04
D) 2,8; 0,01; 6,08
E) 2,8; 0,01; 6,08

5. Beş idmançının sağ (X) və sol (Y) biləklərinin dinamometriyası arasında korrelyasiya əlaqəsini təyin edin.

X	70	65	68	61	60
Y	60	55	54	58	50

A) 0 **B)** 0,2 **C)** 0,5
D) 0,7 **E)** 0,9

6. Aşağıdakı nəticələr üçün korrelyasiya əmsalını hesablayın.

X	3,15	3,000	3,05	2,87	3,25	2,80
Y	9,16	9,34	9,11	8,85	9,50	8,45

A) 0,9 **B)** 0,7 **C)** 0,3
D) 0 **E)** 0,1

7. Aşağıdakı nəticələr üçün $\overline{X}$, D, σ, tapın.

375; 390; 400; 420; 410; 405; 400; 385; 360; 393

A) 216	535,1	142
B) 385	2,01	50,1
C) 113,1	372	56,1
D) 839,3	693	516
E)393,8	273,96	16,5

8. Aşağıdakı nəticələr üçün M_ovə M_e tapın.

0,76; 0,86; 0,74; 0,92; 0,90; 0,91; 0,86; 0,85; 0,77

A) M_o=0,86	M_e=0,86
B) M_o=0,76	M_e=0,90
C) M_o=0,74	M_e=0,77
D) M_o=0,86	M_e0,85
E) M_o=0,90	M_e=0,91

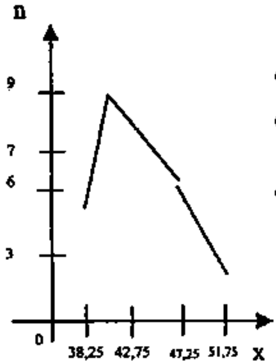
9. Aşağıdakı nəticələr üçün $\overline{X}$, D, σ, V, tapın.

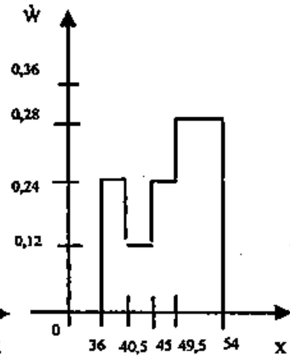
80; 84; 89; 85; 92; 94; 95; 100; 97; 88

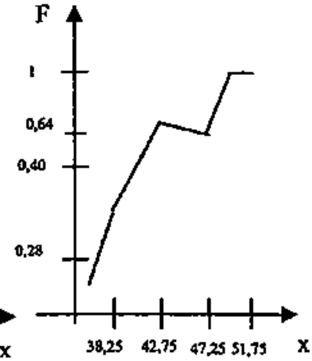
A) 40,5	25,9	0,12	0,3
B) 77	46	5,6	5,68
C) 90,4	35,46	5,95	6,58
D) 100	3,54	0,2	1,96
E) 90,4	25,9	0,3	0,01

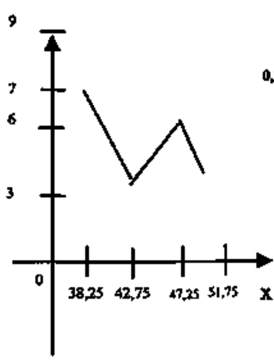
10. Aşağıdakı nəticələr üçün paylanma funksiyasının qrafikini qurun. N=25 k=4

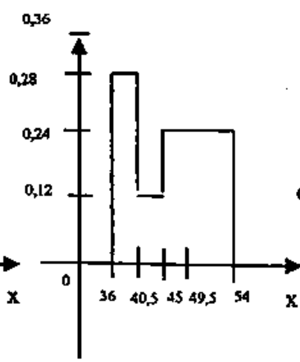
48; 36; 43; 39; 51; 52; 54; 50; 45; 40; 37; 48; 46; 38; 50; 52; 39; 48; 47; 45; 52; 50; 37; 48; 51

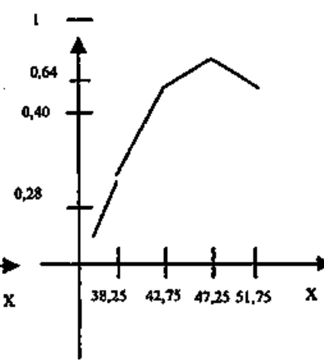

n
9
7
6
3
0
38,25 42,75 47,25 51,75
X

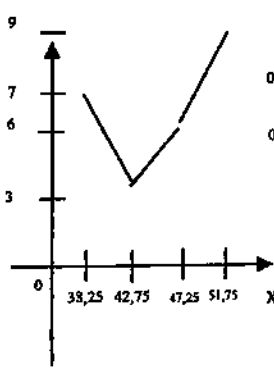

W
0,36
0,28
0,24
0,12
0
36 40,5 45 49,5 54
X

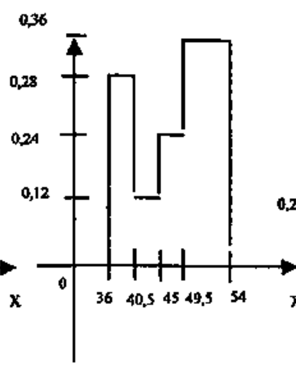

F
1
0,64
0,40
0,28
38,25 42,75 47,25 51,75
X

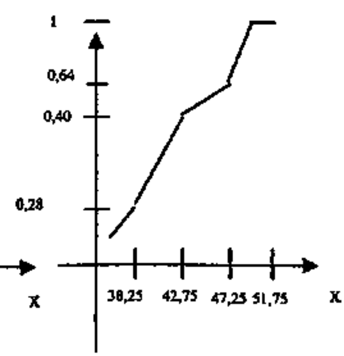

9
7
6
3
0
38,25 42,75 47,25 51,75
X


0,36
0,28
0,24
0,12
0
36 40,5 45 49,5 54
X


1
0,64
0,40
0,28
38,25 42,75 47,25 51,75
X


9
7
6
3
0
38,25 42,75 47,25 51,75
X


0,36
0,28
0,24
0,12
0
36 40,5 45 49,5 54
X


1
0,64
0,40
0,28
38,25 42,75 47,25 51,75
X

Ədəbiyyat

1. Кудрявцев Л.Д. «Курс математического анализа», Москва, «Высшая математика», 1981.

2. Игнатьева А.В. и др. «Курс Высшей математики», 1968.

3. Səlimov Y., Səbzəliyev M. Ehtimal nəzəriyyəsinin elementləri. Bakı, «Maarif», 1989.

4. Şahbazov Ə. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika.Bakı, "Maarif", 1974.

5. Əhmədova N.M. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı,2002.

6. Gülməmmədov V.Y. Riyaziyyatdan çalışmaların həlli metodları. Bakı, «Maarif» ,1990.

7. Məmmədov R. Ali riyaziyyat kursu. Bakı,«Maarif»,1984.

8. Əbiyev T.Q. Ali riyaziyyat fənnində statistik analizin əsasları. Bakı, AzDBTİA-nın çap artırma sahəsi, 200

9. Həsənov İ. Cəbr və analizin başlanğıcı. Çalışmaların həlli. Bakı, «Kür» nəşriuuatı , 2005.

10. Ağayeva M.S. Ali riuaziyyat fənnindən praktiki məşqələlər üçün metodiki göstərişlər. (Test tapşırıqları). Bakı, AzDVTİA-nın çap artırma sahəsi,2007.

11. Тарасов Н.П. Курс высшей математики.М., «Высшая школа»,1969.

12. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. М., «Высшая школа», 1972.

13. Гмурман В.Е. Теория вероятности и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1977.

14. Абиев А.Г. Математические и статистические основы спортивной метрологии с применением персональной ЭВМ. Баку, 19898.

15. Иванов В.С., Щикно К.В. Основы математической статистики. М., ФиС,1990.

16. Масальгин Н.П. Математико-статистические методы в спорте. М., ФиС,1974.

17. Баранова З.М.,Суслаков Б.А. Методические разработки о применении корреляционного анализа в спорте. М.,Изда-

ние ГЦОЛИФКа, 1980.
18. Суслаков Б.А. Применение дисперсионного анализа в спортивных исследованиях. М., Издание ГЦОЛИФКа, 1982.
19. Начинская С.В. Спортивная метрология. М.,АСАДЕМА
20. Səlimov Y., Səbzəliyev M. Ehtimal nəzəriyyəsinin elementləri. Bakı, «Maarif», 1989.
21. Şahbazov Ə. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif", 1974.
22. Əhmədova N.M. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı,2002.
23. Gülməmmədov V.Y. Riyaziyyatdan çalışmaların həlli metodları. Bakı, «Maarif» ,1990.
24. Məmmədov R. Ali riyaziyyat kursu. Bakı, «Maarif»,1984.
25. Əbiyev T.Q. Ali riyaziyyat fənnində statistik analizin əsasları. Bakı, AzDBTİA-nın çap artırma sahəsi, 200
26. Həsənov İ. Cəbr və analizin başlanğıcı. Çalışmaların həlli. Bakı, "Kür", nəşriyyatı 2005.
27. Ağayeva M.S. Ali riyaziyyat fənnindən praktiki məşqələlər üçün metodiki göstərişlər. (Test tapşırıqları). Bakı, AzDVTİA-nın çap artırma sahəsi, 2007.

MÜNDƏRİCAT

"Müəllim" nəşriyyatında çap olunmuşdur.

Çapa imzalanmış 10.06.2014. Sifariş № 195.
Kağız formatı $60\times84^{1/16}$. 16,5 ç.v.
Sayı 100.